Chapitre 7
Nombres réels et suites numériques

Dans ce chapitre, après avoir étudié les nombres réels, nous allons étudier les suites numériques. Nous donnerons des définitions précises de la limite d'une suite et cela nous permettra de démontrer les théorèmes sur les limites de suites de façon rigoureuse. Nous étudierons quelques suites particulières : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques ainsi que l'étude des suites récurrentes.

Table des matières

1 Nombres réels **2**

1.1 Majorant/minorant/maximum/minimum/borne supérieure/borne inférieure 2

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$ 3

1 Nombres réels

1.1 Majorant/minorant/maximum/minimum/borne supérieure/borne inférieure

Définition d'un majorant, d'un minorant, d'une partie majorée, minorée et bornée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **un majorant** de A si : $\forall a \in A \quad a \leqslant M$
- On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **un minorant** de A si : $\forall a \in A \quad m \leqslant a$
- On dit que A est **majorée** si elle a un majorant. C'est-à-dire si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leqslant M$
- On dit que A est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée :

$$A \text{ bornée} \iff \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a \in A \quad m \leqslant a \leqslant M$$

Exemples 1.
1. L'intervalle $[\,0\,;1\,[$ est
2. L'intervalle $]\,0\,;1\,[$ est
3. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est
4. L'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est

Attention, il n'y a pas unicité du majorant/minorant

On dit donc «*un majorant*», «*un minorant*» et non «*le majorant*».

Définition d'un maximum/minimum

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(M, m) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que M est **le maximum/le plus grand élément** de A si $M \in A$ et M est un majorant de A. On note $M = \max(A)$.
- On dit que m est **le minimum/le plus petit élément** de A si $m \in A$ et m est un minorant de A. On note $m = \min(A)$.
- Un **extremum** de A est le maximum ou le minimum de A.

Remarque 1. Si le maximum/minimum de A existe alors il est unique.

Exemple 2. Si $A \subset \mathbb{R}$ avec A non vide et ayant un nombre fini d'éléments, alors A admet un maximum et un minimum.

Définition d'une borne supérieure/inférieure

On appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A (s'il existe). On le note $\sup(A)$.
On appelle **borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A (s'il existe). On le note $\inf(A)$.

Remarques 2.
- Lorsqu'il y a existence de la borne supérieure/inférieure, alors cette borne est unique.
- Une borne supérieure n'est pas nécessairement un maximum. Une borne inférieure n'est pas nécessairement un minimum.
- Si A n'est pas majorée, alors, par convention $\sup A = +\infty$. Si A n'est pas minorée, par convention, $\inf A = -\infty$.
- Si A admet une borne supérieure, alors cette borne supérieure coupe $\mathbb{R}$ en deux parties :
  — Si $x \geqslant \sup(A)$, alors, x est un majorant de A : pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$.
  — Si $x < \sup(A)$, alors, x n'est pas un majorant de A : il existe $a \in A$ tel que $x < a$.

Théorème n° 1 : de la borne supérieure/inférieure *(admis)*

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition n° 1 : lien entre bornes supérieures/inférieures et extrema

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet un plus grand élément alors elle admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.
2. Si A admet un plus petit élément alors elle admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

Exemples 3. Compléter le tableau ci-dessous. Démontrer rigoureusement les lignes 5 et 8.

Ensemble E	$\min(E)$	$\inf(E)$	$\max(E)$	$\sup(E)$
$E = \{0\}$				
$E = \{0;1\}$				
$E =]\,0\,;1\,[$				
$E = [\,0\,;1\,[$				
$E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$				
$E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$				
$E = [\,0\,;1\,[\cap \mathbb{Q}$				
$E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$				

Solution des exemples 3 : Traitons le cas où $E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ Soit $a \in E$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Il y a donc deux cas suivant la parité de n :

- Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$, alors $a = 1 + \frac{1}{2p}$, alors $1 < a \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
- Si n est impair, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q+1$, alors $a = -1 + \frac{1}{2q+1}$, alors $-1 < a \leqslant -1 + \frac{1}{2}$.

On a ainsi montré que pour tout $a \in E$, $-1 < a \leqslant \frac{3}{2}$ On remarque ainsi que $\frac{3}{2}$ est un majorant de x. De plus, $\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2} \in E$. Donc $\frac{3}{2}$ est un maximum de E et une borne supérieure de E.

De plus, -1 est un minorant de E. Comme E est non vide et minorée, on en déduit que E admet une borne inférieure. Soit m un minorant de E, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $m \leqslant -1 + \frac{1}{2q+1}$, en faisant tendre q vers $+\infty$ et comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite (ce résultat sera démontré plus loin), on en déduit que $m \leqslant -1$. Ainsi, -1 est un minorant et est plus grand que tous les minorants de E, ainsi, $\inf(E) = -1$. Si A admettait un minimum, alors on aurait $\min(E) = \inf(E) = -1$ et donc $-1 \in E$. Ce qui est absurde, car on a montré plus haut que tous les éléments de E étaient strictement plus grands que -1. Ainsi, E n'admet pas de minimum. ■

Proposition n° 2 : cas des parties de $\mathbb{Z}$

1. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide, alors A admet un minimum ssi elle est minorée.
2. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide, alors A admet un maximum ssi elle est majorée.
3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non vide, alors A admet un minimum.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. Les ensembles suivants sont appelés **intervalles** :

- $[\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ intervalle **fermé borné** ou **segment**
- $]\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervalle **ouvert borné**
- $]\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ intervalles **bornés semi-ouverts ou semi-fermés**
- $[\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, $]\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ intervalles **minorés et non majorés**
- $]\,-\infty\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$, $]\,-\infty\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ intervalles **majorés et non minorés**
- $\mathbb{R} =]\,-\infty\,;+\infty\,[$ intervalle **ouvert** et **fermé** non majoré non minorée, $\varnothing$ intervalle **ouvert** et **fermé**

Proposition n° 3 : caractérisation des intervalles

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors : I est un intervalle de $\mathbb{R}$ $\iff$ $\forall (x,y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$

Démonstration de la proposition n° 3 :

- Si I est un intervalle, alors I est l'un des dix types d'ensembles donnés dans la définition.
  - Traitons le cas où $I =]\,a\,;+\infty\,[$ où $a \in \mathbb{R}$ Montrons qu'alors
$$\forall (x,y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$$
    Soit $(x,y) \in]\,a\,;+\infty\,[$, supposons $x \leqslant y$ et montrons que $[\,x\,;y\,] \subset I$. Soit $z \in [\,x\,;y\,]$, alors $x \leqslant z \leqslant y$, mais comme $x \in I$, on a $x > a$. Donc $z \geqslant x > a$, ainsi, $z > a$ et donc $z \in I$. Ceci montre que $[\,x\,;y\,] \subset I$.
  - Traitons le cas où $I =]\,a\,;b\,]$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leqslant b$. Montrons qu'alors
$$\forall (x,y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$$
    Soit $(x,y) \in]\,a\,;b\,]$, supposons $x \leqslant y$ et montrons que $[\,x\,;y\,] \subset I$. Soit $z \in [\,x\,;y\,]$, alors $x \leqslant z \leqslant y$, mais comme $x \in I$, on a $x > a$. Donc $z \geqslant x > a$, ainsi, $z > a$ de plus, comme $y \in I$, $y \leqslant b$ et $z \leqslant y$ donc $z \leqslant b$ et donc $z \in]\,a\,;b\,] = I$. Ceci montre que $[\,x\,;y\,] \subset I$.
  - Les autres cas se traitent de la même façon.
- Réciproquement, supposons qu'on ait un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall (x,y) \in I^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow [\,x\,;y\,] \subset I$$
  Remarquons que si I est vide, alors I est déjà un intervalle. Supposons donc I non vide. Il y a alors plusieurs cas : I est majoré ou non majoré, I est minoré ou non minoré. Si I est majoré (resp. minoré), comme il est non vide, il admet une borne supérieure (resp. inférieure) Cette borne supérieure (resp. inférieure) appartient à I ou n'appartient pas à I. En combinant toutes ces possibilités, on obtient neuf cas :

  cas 1 : I non majorée et non minorée. Dans ce cas, montrons que $I = \mathbb{R}$.
  Par hypothèse, $I \subset \mathbb{R}$.
  Soit $z \in \mathbb{R}$. Comme z n'est pas un majorant de $\mathbb{R}$, il existe $y \in I$ tel que $z < y$. De même, z n'est pas un minorant de $\mathbb{R}$, il existe $x \in I$, tel que $x < z$. Alors, $x \leqslant z \leqslant y$ et $z \in [\,x\,;y\,]$ avec $(x,y) \in I^2$, donc $z \in [\,x\,;y\,] \subset I$ donc $z \in I$. Donc $\mathbb{R} \subset I$.
  Par double inclusion, $I = \mathbb{R}$.

  cas 2 : I non majorée et minorée et $a = \inf(I) \in I$ (cette borne inférieure existe car I est non vide et minorée). Dans ce cas, montrons que $I = [\,a\,;+\infty\,[$.
  Soit $z \in I$. Comme $a = \inf(I)$ est un minorant de I, on a $a \leqslant z$, donc $z \in [\,a\,;+\infty\,[$. Ceci montre que $I \subset [\,a\,;+\infty\,[$.
  Réciproquement, soit $z \in [\,a\,;+\infty\,[$, comme z n'est pas un majorant de I, il existe $y \in I$ tel que $z < y$. De plus, $z \geqslant a$, on a alors $a \leqslant z \leqslant y$ comme $(a,y) \in I^2$, on a alors $z \in [\,a\,;y\,] \subset I$, donc $z \in I$. Ceci montre que $[\,a\,;+\infty\,[\subset I$.
  Par double inclusion, $I = [\,a\,;+\infty\,[$.

  cas 3 : I non majorée et minorée et $a = \inf(I) \notin I$ (cette borne inférieure existe car I est non ide et minorée). Dans ce cas, montrons que $I =]\,a\,;+\infty\,[$.
  Soit $z \in I$. Comme $a = \inf(I)$ est un minorant de I, on a $a \leqslant z$. De plus, remarquons que $z \in I$ et $a \notin I$, donc $a \neq z$, ainsi $z > a$, donc $z \in]\,a\,;+\infty\,[$. Ceci montre que $I \subset]\,a\,;+\infty\,[$.
  Réciproquement, soit $z \in]\,a\,;+\infty\,[$, comme z n'est pas un majorant de I, il existe $y \in I$ tel que $z < y$. De plus, $z > a = \inf(I)$, donc z n'est pas un minorant de I, donc il existe $x \in I$ tel que $x < z$. Alors $x \leqslant z \leqslant y$ avec $(x,y) \in I^2$, ainsi, $z \in [\,x\,;y\,] \subset I$, donc $z \in I$. Ceci montre que $]\,a\,;+\infty\,[\subset I$.
  Par double inclusion, $I =]\,a\,;+\infty\,[$.

  cas 4 : I majorée et non minorée et $b = \sup(I) \in I$. Dans ce cas, $I =]\,-\infty\,;b\,]$ (similaire au cas 2)

  cas 5 : I majorée et non minorée et $b = \sup(I) \notin I$. Dans ce cas, $I =]\,-\infty\,;b\,[$ (similaire au cas 3)

  cas 6 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \in I$, $a = \inf(I) \in I$. Dans ce cas, montrons que $I = [\,a\,;b\,]$.
  Soit $z \in I$, alors $z \geqslant a$ et $z \leqslant b$, donc $a \leqslant z \leqslant b$, donc $z \in [\,a\,;b\,]$. Ainsi, $I \subset [\,a\,;b\,]$.
  Soit $z \in [\,a\,;b\,]$, alors comme a et b appartiennent à I, $z \in I$.
  Par double inclusion, $I = [\,a\,;b\,]$.

  cas 7 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \in I$, $a = \inf(I) \notin I$. Dans ce cas, montrons que $I =]\,a\,;b\,]$.
  Soit $z \in I$, alors $z \geqslant a$ et $z \leqslant b$. Comme $z \in I$ et $a \notin I$, on a $z \neq a$, doc $z > a$. Ainsi $a < z \leqslant b$, donc $z \in]\,a\,;b\,]$. Ainsi, $I \subset]\,a\,;b\,]$.
  Soit $z \in]\,a\,;b\,]$, alors $a < z \leqslant b$, comme $a = \inf(I)$, z n'est pas un minorant de I, donc il existe $x \in I$ tel que $x < z$, ainsi $x \leqslant z \leqslant b$ avec $(x,b) \in I^2$, donc $z \in [\,x\,;b\,] \subset I$, donc $z \in I$. Ainsi, $I \subset]\,a\,;b\,]$.
  Par double inclusion, $I =]\,a\,;b\,]$.

  cas 8 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \notin I$, $a = \inf(I) \in I$. Dans ce cas, $I = [\,a\,;b\,[$ (similaire au cas 7)

  cas 9 : I majoré et minoré avec $b = \sup(I) \notin I$, $a = \inf(I) \notin I$. Dans ce cas, $I =]\,a\,;b\,[$ (similaire au cas 7 et 8). ■

Remarques 3.

- Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont donc les parties en un seul morceau.
- L'intersection d'intervalles est un intervalle et l'union de deux intervalles non disjoints est un intervalle.
- $[\,0\,;1\,] \cup [\,2\,;3\,[$ n'est pas un intervalle.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.