Exercice 1 *Étude au bord du domaine de convergence, développement en série de π*

On pose, sous réserve de,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

1. Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$.

2. a) Justifier que f est définie en -1 et en 1.

b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Justifier que R_n est bornée sur $[0\,;\,1]$ et que

$$||\mathrm{R}_n||_{\infty,[0\,;\,1]} \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

c) En déduire que f est continue sur $[-1\,;\,1]$.

3. Justifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette formule a été établie indépendamment vers 1670 par James Gregory et Gottfried Wilhelm Leibniz, mais on la trouve déjà dans des écrits du milieu du XVème siècle provenant du sud de l'Inde.

Exercice 2 *Application au calcul numérique de π*

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1\,;\,1]$,

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

1. Écrire une fonction `SATAN_1(x,n)` calculant la somme partielle $\mathrm{S}_n(x)$.

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n(1)$ est une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ avec une erreur inférieur à $\frac{1}{2n+3}$.

b) En déduire une fonction `PI(e)` écrite en `Python` retournant une valeur approchée de π avec une erreur inférieure à `e`.

c) À l'aide de cette fonction, donner les 8 premières décimales de π en précisant le nombre de termes sommés pour obtenir ce résultat. *Cela peut prendre du temps, avec mon ordinateur personnel environ 3 minutes.*

3. *Optimisons le temps de calcul*

Vous avez vraisemblablement eu besoin à deux reprises de l'opérateur puissance « `**` ».

a) Compléter la fonction suivante afin de calculer $\mathrm{S}_n(x)$ à l'aide uniquement des opérations « `+` » et « `*` ».

```
def SATAN_2(x,N):
    somme = 0
    signe = 1
    puissance = x
    facteur = x*x
    diviseur = 1
    for n in range(N+1):
        somme += signe*puissance/diviseur
        signe = ..........
        puissance *= ..........
        diviseur += ..........
    return somme
```

b) À l'aide de la fonction `time()` du module `time`, indiquer le temps pris par l'exécution de `PI(1e-6)` en utilisant `ATAN_1` puis `ATAN_2`.

4. *Une amélioration notable par une stratégie due à John Machin(1680-1752).*

a) Justifier que, pour tout $x \in [-1\,;\ 1]$, $\mathrm{S}_n(x)$ est une valeur approchée de $\mathrm{Arctan}\,(x)$ avec une erreur inférieure à $\dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

b) Justifier que

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right).$$

c) En déduire une expression de π comme somme de deux séries alternées.

d) Justifier que l'erreur commise en calculant les n premiers termes de la première (respectivement les n de la seconde) est inférieure à $2 \times \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ (resp. $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$).

L'erreur commise est ainsi au moins divisée par 4 à chaque nouveau terme calculé.

e) Justifier qu'il faut calculer environ $\dfrac{n}{0,6}$ termes pour avoir n décimales exactes.

f) Écrire un script calculant les 8 premières décimales de π en exploitant cette décomposition. S'assurer de l'exactitude du résultat et chronométrer ce script.

5. a) Montrer que pour deux réels p et q strictement positifs, on a

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{p}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{p+q}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{q}{p^2+pq+1}\right) \quad (\heartsuit).$$

b) Retrouver la formule donnée en 3.b), puis toujours à l'aide de $(\heartsuit)$ prouver que

$$\frac{\pi}{4} = 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right).$$

c) Justifier qu'alors il suffit d'environ $\dfrac{n}{0,95}$ termes pour calculer n décimales exactes.

6. a) Justifier successivement que

$$\tan\left(2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{5}{12}, \text{ puis que } \tan\left(4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{120}{119}.$$

b) En déduire la formule de John Machin (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

c) On note

$$\mathrm{T}_{m,n} = 16\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - 4\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}.$$

Justifier que $\mathrm{T}_{5,1}$ fournit une valeur approchée de π avec 8 décimales exactes.
Combien de termes faut-il sommer pour obtenir cette valeur ?

d) Vérifier cela par un script en `Python`.

Machin calcula en 1706 les 100 premières décimales de π à l'aide de cette technique... évidemment à la main, ce qui est une joli prouesse !!!

7. *En 1844, le calculateur prodige John Dahse calcula de tête 205 décimales de π avec la formule*

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$$

Montrer cette formule à l'aide de la relation $(\heartsuit)$.