Recueil d'exercices
Adapté au programme PC

Nicolas Maillard

19 février 2021

Table des matières

Liste des exercices

Chapitre 1

Algèbre linéaire (1ère année et compléments)

Exercice 1 *Étude d'un endomorphisme via sa matrice*
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En observant les colonnes de A, déterminer le rang, le noyau et l'image de f.
2. Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?
3. Quelle est la matrice de f relativement à une base $\mathcal{C}$ adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?

Solution (**Ex.1** – *Étude d'un endomorphisme via sa matrice*)

1. $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0$ dont les colonnes sont liées : le rang est au plus 2. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, le rang est au moins 2. Donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$. $\dim \mathrm{Im}f = 2$ et par le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}f = 1$.
   $\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3 = 0$ signifie $f(i)+f(j)+f(k) \overset{\text{lin.}}{=} f(i+j+k) = 0$ donc $i+j+k \in \mathrm{Ker}f$, et en raison de la dimension, $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}(i + j + k)$.
   $\big(f(i), f(j)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}f$ donc une base en raison de la dimension. Donc $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\big(f(i), f(j)\big) = \mathrm{Vect}(2i + j + k, -i - k) = \mathrm{Vect}(i + j, i + k)$ si on veut simplifier un peu.
2. $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et f est un projecteur, donc son noyau et son image sont supplémentaires.

3. Comme $x \in \text{Im}f \Rightarrow f(x) = x$ et $x \in \text{Ker}f \Rightarrow f(x) = 0$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *Endomorphisme vérifiant une équation*

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) En observant les colonnes de A, déterminer le rang, le noyau et l'image de f en donnant une base de chacun d'eux.
b) Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour f ?
c) Montrer que $\text{Im}f$ et $\text{Ker}f$ sont supplémentaires.
d) Quelle est la matrice de f relativement à une base $\mathcal{C}$ adaptée à la supplémentarité de $\text{Im}f$ et $\text{Ker}f$?

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 = 3f$.
a) Montrer que $\text{Im}f$ et $\text{Ker}f$ sont supplémentaires.
b) Montrer que dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 3\text{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{où } r = \text{rg}(f).$$

Solution (**Ex.2** – *Endomorphisme vérifiant une équation*)

1. a) $\text{C}_1 + \text{C}_2 + \text{C}_3 = 0$ dont les colonnes sont liées : le rang est au plus 2. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, le rang est au moins 2. Donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{A}) = 2$. $\dim \text{Im}f = 2$ et par le théorème du rang $\dim \text{Ker}f = 1$.

$\text{C}_1+\text{C}_2+\text{C}_3 = 0$ signifie $f(i)+f(j)+f(k) \overset{\text{lin.}}{=} f(i+j+k) = 0$ donc $i+j+k \in \text{Ker}f$, et en raison de la dimension, $\text{Ker}f = \text{Vect}(i + j + k)$.
$\big(f(i), f(j)\big)$ est une famille libre de $\text{Im}f$ donc une base en raison de la dimension. Donc $\text{Im}f = \text{Vect}\big(f(i), f(j)\big) = \text{Vect}(2i - j - k, -i + 2j - k)$ si on veut simplifier un peu.

b) $\text{A}^2 = 3\text{A}$ donc $f^2 = 3f$.

c) On vérifie que $\mathcal{M}(f(i), f(j), i+j+k) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3, donc la famille $(f(i), f(j), i+j+k)$ est une base de E. Donc $\mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f = \mathrm{E}$.

d) Avec $\mathcal{C} = (f(i), f(j), i+j+k)$, on a $f(f(i)) = f^2(i) = 3f(i)$, $f(f(j)) = f^2(j) = 3f(j)$ et $f(i+j+k) = 0$ (noyau !) donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Par la formule du rang : $\dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Ker}f = \dim \mathrm{E}$.
Soit $x \in \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f$. $\exists y \in \mathrm{E}, x = f(y)$. Alors $f(x) = f^2(y) = 3f(y) = 3x$, or $f(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}f$. Donc $3x = 0$, donc $x = 0$. Ainsi : $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\}$.
Bilan : $\mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f = \mathrm{E}$.

b) Soit $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_k$ des bases de $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ respectivement.
On a : $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_i) = r$ et $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_k) = n - r$ et $\mathcal{C} = (\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_k)$ est une base de E par supplémentarité.
De plus : $\forall x \in \mathcal{B}_i, x \in \mathrm{Im}f$, donc $\exists y \in \mathrm{E}, x = f(y)$, et alors $f(x) = f^2(y) = 3f(y) = 3x$.
Et : $\forall x \in \mathcal{B}_k, x \in \mathrm{Ker}f$, donc $f(x) = 0$.
Donc : $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 3\mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{array}\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ *Puissance d'un endomorphisme de* $\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$ et f l'application définie sur E par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad f(\mathrm{P}) = \mathrm{XP} + \mathrm{P}'(0)\mathrm{X} - \frac{1}{2}\mathrm{P}''(0)\mathrm{X}^3.$$

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer la matrice M représentant f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

c) Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.

2. Calculer M^n pour tout $n \geqslant 2$.

3. On définit l'application g sur E par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad g(\mathrm{P}) = (\mathrm{P} + \mathrm{P}')(0) \times (\mathrm{X} + \mathrm{X}^2).$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f^n = g.$$

Solution (**Ex.3** – *Puissance d'un endomorphisme de* $\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$)

1. a) • On montre sans problème la linéarité :
$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}, f(\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$.
• On a bien, pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. A-t-on $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$?
On remarque que :
$f(1) = \mathrm{X} \in \mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$,
$f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 0.\mathrm{X}^2 = \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 \in \mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$,
$f(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^3 + 0.\mathrm{X} - \mathrm{X}^3 = 0 \in \mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$,
donc par linéarité, pour tout P de $\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$, $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$.
On peut aussi raisonner en utilisant :
$f(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c) = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + b\mathrm{X} - \dfrac{1}{2} \times 2a\mathrm{X}^3 = (b + c)\mathrm{X} + b\mathrm{X}^2$.
• Donc f est bien un endomorphisme de E.

b) Les calculs précédents donnent $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.
$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 2$, donc $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(\mathrm{X}), f(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, \mathrm{X} + \mathrm{X}^2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^2)$ puisque $f(\mathrm{X}^2) = 0$.

2. On a : $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}^3 = \mathrm{M}^2$, donc par récurrence : $\forall n \geqslant 2, \mathrm{M}^n = \mathrm{M}^2$.

3. • On vérifie sans problème que g est un endomorphisme de E.
• $g(1) = \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$, $g(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$ et $g(\mathrm{X}^2) = 0$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{M}^2$.
Comme $\forall n \geqslant 2, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^n) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$, on a : $\forall g \geqslant 2, f^n = g$.
Ou de façon équivalente, deux endomorphismes sont égaux si et seulement si ils coïncident sur une base (par linéarité...).

Exercice 4 *Matrice d'un endomorphisme nilpotent*

1. Soit

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.

a) Calculer N^2 et N^3. Que peut-on en déduire pour f ?
On dit que f est *nilpotente d'indice (ou d'ordre) 3*.

b) On pose $e_1 = (1, 0, 0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geqslant$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Solution (**Ex.4** – *Matrice d'un endomorphisme nilpotent*)

1. a) $\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ -2 & -6 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N}^3 = 0_3$. Donc $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

b) En notant $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$\mathrm{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) De $f^3(e_1) = 0$ car $f^3 = 0$, on tire immédiatement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geqslant$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $e \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.
Soit $\mathcal{B} = (f^{n-1}(e), f^{n-2}(e), \dots, f(e), e)$. $\mathcal{B}$ est une famille de $n = \dim(\mathrm{E})$ vecteurs. Il suffit qu'elle soit libre pour être une base. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.
Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$a_{n-1}f^{n-1}(e) + \cdots + a_1 f(e) + a_0 e = 0 \quad (\heartsuit).$$

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-1}, il vient immédiatement $a_0 f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_0 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.
$(\heartsuit)$ devient alors $a_{n-1}f^{n-1}(e) + \cdots + a_1 f(e) = 0$.
En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-2}, il vient immédiatement $a_1 f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_1 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

En itérant, on a : $\forall k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, $\quad a_k = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est une libre et par conséquent $\mathcal{B}$ est une base.

De $f^n(e) = 0$ car $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ vient alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 *Rang et trace d'un projecteur*

Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n tel que :

$$p \circ p = p.$$

1. a) Démontrer que $\mathrm{Im}(p) = \{u \in \mathrm{E}, p(u) = u\}$.

b) Démontrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires.

2. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

Solution (**Ex.5** – *Rang et trace d'un projecteur*)

1. a) • $\forall u \in \mathrm{E}, \quad \big(u = p(u)\big) \Rightarrow \big(u \in \mathrm{Im}(p)\big)$.

• Soit $u \in \mathrm{Im}(p)$. Alors : $\exists v \in \mathrm{E}, p(v) = u$.
Donc $p(u) = p^2(v) = p(v) = u$.

b) • Soit $u \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Comme $u \in \mathrm{Im}(p), p(u) = u$. Comme $u \in \mathrm{Ker}(p), p(u) = 0$. Donc $u = 0$. Bilan : $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$, l'inclusion réciproque étant évidente (pour mémoire, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels E...). Ainsi, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe.

• Par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{K}er(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{E})$.
Conclusion : $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}$

2. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{E}$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\dim(\mathrm{Im}(p))} & 0 \\ \hline 0 & 0_{\dim(\mathrm{Ker}(p))} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\mathrm{rg}(p)} & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-\mathrm{rg}(p)} \end{array}\right)$$

Par conséquent, $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

Exercice 6 *Trace et crochets*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n \;?$$

Solution (**Ex.6** – *Trace et crochets*)
$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AB}) - \mathrm{tr}(\mathrm{BA}) = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$. Comme $n \neq 0$, il est impossible que $\mathrm{AB}-\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$...

Exercice 7 *Une matrice à paramètre*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A, son noyau et son image.
2. Lorsque A est inversible, déterminer son inverse.

Solution (**Ex.7** – *Une matrice à paramètre*)

1. $\det(\mathrm{A}) = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$.
   - Si $\alpha = 1 : \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1, \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)), \mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$;
   - Si $\alpha = -2 : \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2, \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}((1,1,1)), \mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}((-2,1,1),(1,-2,1))$;
   - Si $\alpha \notin \{-2,1\}$: $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 3$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathbb{R}^3$.
2. Si $\alpha \notin \{-2,1\}$, alors $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2}\begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 *Matrices semblables*
Montrer que

$$\mathrm{M} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{T} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Solution (**Ex.8** – *Matrices semblables*)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Il s'agit de montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (u,v,w)$ telle que $\mathrm{T} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$.

Or : $\mathrm{T} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2u \\ f(v) = v \\ f(w) = v + w \end{cases}$

Ceci conduit à des systèmes linéaires dont une solution est $\begin{cases} u = (0,1,0) \\ v = (2,0,-1) \\ w = (1,1,-1) \end{cases}$

On vérifie que cette famille est de rang 3, car $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, donc forme une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve que M et T sont semblables, puisqu'elles représentent un même un endomorphisme dans deux bases distinctes.

** **Exercice 9** *Réunion de sous-espaces*
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que :

$$\big(\mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{E}\big) \Leftrightarrow \big(\mathrm{F} = \mathrm{E} \text{ ou } \mathrm{G} = \mathrm{E}\big).$$

Solution (**Ex.9** – *Réunion de sous-espaces*)
- L'implication $\big(\mathrm{F} = \mathrm{E} \text{ ou } \mathrm{G} = \mathrm{E}\big) \Rightarrow \big(\mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{E}\big)$ est claire.
- Réciproquement, supposons $\mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$ et $\mathrm{G} \neq \mathrm{E}$.
Alors : $\exists x \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$ (donc $x \in \mathrm{G}$), et $\exists y \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{G}$ (donc $y \in \mathrm{F}$).
Comme $x + y \in \mathrm{E}$, on a soit $x + y \in \mathrm{F}$, soit $x + y \in \mathrm{G}$.
Si $x + y \in \mathrm{G}$, alors comme G est un sous-espace vectoriel,
$y = (x + y) - x \in \mathrm{G}$... ce qui est absurde.
Si $x + y \in \mathrm{F}$, alors comme F est un sous-espace vectoriel,
$x = (x + y) - y \in \mathrm{F}$... ce qui est absurde.
Ainsi, $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ ou $\mathrm{G} = \mathrm{E}$...

Exercice 10 *Matrices particulières*
Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Dans $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$\mathcal{S}_n = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E}, \mathrm{M}^\mathrm{T} = \mathrm{M}\},\ \mathcal{A}_n = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E}, \mathrm{M}^\mathrm{T} = -\mathrm{M}\},$$
$$\mathcal{I}_n = \{(m_{i,j}) \in \mathrm{E}, (i \leqslant j) \Rightarrow m_{i,j} = 0\} \text{ et}$$
$$\mathcal{D}_n = \{(m_{i,j}) \in \mathrm{E}, (i \neq j) \Rightarrow m_{i,j} = 0\}.$$

1. Les sous-espaces suivant sont-ils supplémentaires dans E :
   (i) $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$? (ii) $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}_n$? (iii) $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{I}_n$?
2. Montrer que : $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{I}_n$ et $\mathcal{D}_n$ sont supplémentaires dans E.

Solution (**Ex.10** – *Matrices particulières*)
1. (i) Analyse – Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Supposons qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$. Alors $\mathrm{M}^\mathrm{T} = \mathrm{S} - \mathrm{A}$, et du coup
$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^\mathrm{T}) \text{ et } \mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{M}^\mathrm{T}).$$

Synthèse – Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, soit $\mathrm{S} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^{\mathrm{T}})$ et $\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{M}^{\mathrm{T}})$. On vérifie sans problème que S et A sont respectivement symétrique et antisymétrique. Et l'analyse assure l'unicité de la décomposition.

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathrm{E}.$$

(ii) Analyse – Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Supposons qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{I}_n$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{B}$. Alors :

$$\forall i \leqslant j, s_{i,j} = m_{i,j}, b_{i,j} = 0, \ \forall i < j, s_{i,j} = m_{j,i}, b_{i,j} = m_{i,j} - m_{j,i}.$$

Synthèse – Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, soit S et B définie par les relations précédentes. On vérifie sans problème que S et A sont respectivement symétrique et strictement inférieure. Et l'analyse assure l'unicité de la décomposition.

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{I}_n = \mathrm{E}.$$

(iii) $\mathrm{I}_n \notin \mathcal{A}_n$ et $\mathrm{I}_n \notin \mathcal{I}_n$ donc ... $\mathcal{A}_n + \mathcal{I}_n \neq \mathrm{E}$.

$\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}_n$ ne sont pas supplémentaires.

2. On montrer successivement que :
$\mathcal{I}_n \cap \mathcal{D}_n = \{0\}$ (strictement inférieure et diagonale ... donc nulle)
$\mathcal{A}_n \cap (\mathcal{I}_n + \mathcal{D}_n) = \{0\}$ (antisymétrique et inférieure ... donc nulle)
Donc la somme est directe.
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. On pose :
$\mathrm{D} = diag(m_{1,1}, \dots, m_{n,n}) \in \mathcal{D}_n$,
$\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ telle que : $\forall i < j, a_{i,j} = m_{i,j}$ et $a_{j,i} = -m_{i,j}$ et $\forall i, a_{i,i} = 0$, de sorte que $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n$,
$\mathrm{B} \in \mathrm{E}$ telle que : $\forall i \leqslant j, b_{i,j} = 0$ et $\forall i > j, b_{i,j} = m_{i,j} - m_{j,i}$, de sorte que $\mathrm{B} \in \mathcal{I}_n$.
Alors $\mathrm{M} = \mathrm{D} + \mathrm{A} + \mathrm{B}$.
Donc $\mathrm{E} = \mathcal{A}_n + \mathcal{I}_n + \mathcal{D}_n$.
Ainsi ces trois sous-espaces sont supplémentaires dans E.

Exercice 11 *L'endomorphisme « transposition »*

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{M} \mapsto {}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}$.
Déterminer f^2, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Solution (**Ex.11** – *L'endomorphisme « transposition »*)
$f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, donc f est un automorphisme involutif ($f^{-1} = f$), donc $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.
Dans une base obtenue en concaténant une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathrm{K})$ des matrices symétriques, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, et une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathrm{K})$ des matrices antisymétriques, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, qui sont supplémentaires, la matrice de f est $diag(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ et :
$\mathrm{tr}(f) = \frac{n(n+1)}{2} \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times (-1) = n$,

$\det(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 12 *Matrices par blocs et supplémentaires stables*
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par

$$f(1) = f(X) = X + 1 \quad \text{et} \quad f(X^2) = f(X^3) = X^3 + X^2.$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

2. a) Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E.

b) En déduire deux sous-espaces non triviaux supplémentaires et stables par f.

3. a) Montrer que $p \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2}f$ est un projecteur.

b) En déduire deux sous-espaces (non triviaux et distincts des précédents) supplémentaires et stables par f.

Solution (**Ex.12** – *Matrices par blocs et supplémentaires stables*)

1. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(X+1, X^3+X^2)$ est de dimension 2.
Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.
Par linéarité, $f(1-X) = f(1) - f(X) = 0$ et $f(X^3 - X^2) = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1 - X, X^3 - X^2)$.

2. a) $M \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On déduite de cette écriture par blocs que $\mathrm{Vect}(1, X)$ et $\mathrm{Vect}(X^2, X^3)$ sont stables par f. Ils sont supplémentaires puisqu'en concaténant leurs bases $(1, X)$ et (X^2, X^3), on obtient la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. a) $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}M$ et $M^2 = 2M$, donc $(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p))^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$ et $p^2 = p$: p est un projecteur.

b) p étant un projecteur, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par p et supplémentaires. Or $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(f)$, et comme $f = 2p$, tout sous-espace stable par p est stable par f.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1-X, X^3-X^2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X+1, X^3+X^2)$ sont deux sous-espaces supplémentaires et stables par f, distincts des précédents.

* **Exercice 13** *Deux démonstrations de la formule de Taylor*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $a \in \mathbb{C}$.

1. $1^{ère}$ *méthode* - On considère l'application

$$f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1},\ \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{P}(a), \mathrm{P}'(a), \ldots, \mathrm{P}^{(n)}(a)).$$

a) Montrer que f est un isomorphisme.
b) Déterminer l'antécédent des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ par f.
c) En déduire que, pour tout P de E,

$$\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X} - a)^k.$$

2. $2^{ème}$ *méthode* - Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose :

$$\mathrm{P}_k = \frac{(\mathrm{X} - a)^k}{k!}.$$

a) Montrer que la famille $(\mathrm{P}_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.
b) Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$ et $j \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathrm{P}_k^{(j)}$?
c) Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ $n+1$ complexes tels que : $\quad \mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}_k.$

Établir que, pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, $a_k = \mathrm{P}^{(k)}(a)$.

Solution (**Ex.13** – *Deux démonstrations de la formule de Taylor*)

1. $1^{ère}$ *méthode* -

a) f est linéaire.
$\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \cdots = \mathrm{P}^{(n)}(a) = 0$ donc a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P. Comme $\deg \mathrm{P} \leqslant n$, ceci entraîne $\mathrm{P} = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, f est injectif.
$\dim(\mathrm{E}) = \dim \mathbb{C}^{n+1} = n+1$, donc f est un isomorphisme.

b) En notant $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$, où chaque coordonnée de e_k est nulle sauf la $(k+1)^{\text{ème}}$ qui vaut 1, on a, pour tout k de $[\![1\,;n]\!]$,
$f(\mathrm{P}) = e_k \Rightarrow \mathrm{P}(a) = \cdots = \mathrm{P}^{(k-1)}(a) = 0$ et $\mathrm{P}^{(k)}(a) = 1$: a est une racine d'ordre k de P. On vérifie alors que $\mathrm{P}_k \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{k!}(\mathrm{X} - a)^k$ convient, et par unicité c'est l'antécédent de e_k.
On remarque que $\mathrm{P}_0 = 1$ est aussi l'antécédent de e_0.

c) Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$.

$f(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(a), \mathrm{P}'(a), \ldots, \mathrm{P}^{(n)}(a)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(a) e_k$, donc

$\mathrm{P} = f^{-1}(f(\mathrm{P})) \overset{\text{lin.}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(a) f^{-1}(e_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X} - a)^k.$

2. $2^{ème}$ *méthode* - Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose : $\mathrm{P}_k = \dfrac{(\mathrm{X}-a)^k}{k!}$.

a) $(\mathrm{P}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de $n+1$ polynômes échelonnée en degré, donc est une base de E.

b) Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$ et $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_k^{(j)} = \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{X}-a)^{k-j}}{(k-j)!} & \text{si } j < k, \\ 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

c) En dérivant j fois $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}_k$ et en évaluant en a, $\mathrm{P}^{(j)}(a) = a_j$...

Exercice 14 *Exemple de diagonalisation par blocs*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x,y,z) = (x-y, x-2y+z, x-4y+2z).$$

1. a) On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
Montrer que F et G sont supplémentaires et stables par f.

b) Donner une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice représentant f dans $\mathcal{C}$ s'écrive

$$mat_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

2. a) Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.
On suppose que $f(u) = \lambda u$. Montrer que $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$.

b) En déduire qu'il n'existe pas de base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.

Solution (**Ex.14** – *Exemple de diagonalisation par blocs*)

1. a) $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,1))$.
$u \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \Rightarrow (f(u) = u$ et $f^2(u) = -u) \Rightarrow u = -u \Rightarrow u = 0$: F et G sont en somme directe.
$\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim \mathbb{R}^3$.
Donc $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^3$.
$u \in \mathrm{F} \Rightarrow f(u) = u \Rightarrow f(u) \in \mathrm{F}$,
$u \in \mathrm{G} \Rightarrow f^2(u) = -u \Rightarrow f^3(u) = -f(u) \Rightarrow (f^2 + id)(f(u)) = 0 \Rightarrow f(u) \in \mathrm{G}$, F et G sont stables.

b) Prenons $u = (1,0,-1) \in \mathrm{F}$, alors $f(u) = u$.
Prenons $v = (1,-1,0) \in \mathrm{G}$ et $w = f(v) = (2,3,5)$. Alors $f(w) = f^2(v) = -v$.
On vérifie sans peine que $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et on a :

$$mat_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

2. a) $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, donc $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$ et $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injectif, donc pas bijectif : $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$.

b) Supposons qu'une telle base $\mathcal{D} = (a, b, c)$ existe et que $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(f) = diag(\lambda, \mu, \nu)$.
Alors λ, μ et ν sont des racines de $\mathrm{P}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \det(f - x\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
Or $\det(f - x\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = (1-x)(x^2+1)$.
Donc $\lambda = \mu = \nu = 1$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(f) = \mathrm{I}_3$, donc $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est manifestement faux.
Ainsi il n'existe pas de base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.

* **Exercice 15** *Une matrice « pascalienne »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\,n+1]\!], \qquad p_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathcal{C} \overset{\text{déf.}}{=} \big(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, \ldots, (\mathrm{X}+1)^n\big)$.

a) Justifier que $\mathcal{P}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

b) Pour (j, k) dans $\mathbb{N}^2$, calculer $(\mathrm{X}^k)^{(j)}$, et en déduire $\mathcal{P}^{-1}$ grâce à la formule de Taylor.

2. On considère l'endomorphisme :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{P}(\mathrm{X}) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1).$$

a) Montrer que φ est un automorphisme et donner son automorphisme réciproque.

b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et retrouver alors $\mathcal{P}^{-1}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathcal{P}^k$.

Solution (**Ex.15** – *Une matrice « pascalienne »*)

1. a) Exprimons les vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$: $(\mathrm{X}+1)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \mathrm{X}^i = \sum_{i=0}^{n} p_{i+1,j+1} \mathrm{X}^i$
du fait du décalage entre indices et exposants (la $1^{\text{ère}}$ ligne concerne $1 = \mathrm{X}^0$, la $2^{\text{ème}}$ X^1, etc., tandis que la $1^{\text{ère}}$ colonne concerne $(\mathrm{X}+1)^0$, la $c^{\text{ème}}$ olonne concerne $(\mathrm{X}+1)^1$, etc.) D'où $p_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

b) Pour (j, k) dans $\mathbb{N}^2$, $(\mathrm{X}^k)^{(j)} = \dfrac{k!}{(k-j)!}\mathrm{X}^{k-j}$ si $j \leqslant k$, vaut 0 sinon.

Exprimons les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ grâce à la formule de Taylor en -1 :
$\mathrm{X}^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{(\mathrm{X}^k)^{(j)}(-1)}{j!}(\mathrm{X}-(-1))^j = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\mathrm{X}+1)^j = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\mathrm{X}+1)^j$, et comme $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, $(\mathcal{P}^{-1})_{i,j} = (-1)^{i-j}\dbinom{j-1}{i-1}$.

2. a) φ est linéaire puisque $(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(\mathrm{X} + 1) = \lambda\mathrm{P}(\mathrm{X} + 1) + \mathrm{Q}(\mathrm{X} + 1)$, c'est un endomorphisme.
De plus, $\varphi(\mathrm{P}) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(x + 1) = 0$ donc P a une infinité de racines : $\mathrm{P} = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, φ est injectif, et comme $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension finie, cela suffit pour affirmer que φ est un automorphisme.
On remarque qu'en définissant $\psi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ par $\psi : \mathrm{Q}(\mathrm{X}) \mapsto \mathrm{Q}(\mathrm{X} - 1)$, on a pour tout P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\psi \circ \varphi(\mathrm{P}) = \psi(\mathrm{P}(\mathrm{X} + 1)) = \mathrm{P}((\mathrm{X} - 1) + 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.
Donc $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$ et $\psi = \varphi^{-1}$.

b) Les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ expriment les vecteurs $\varphi(\mathrm{X}^j) = (\mathrm{X} + 1)^j$ dans la base $\mathcal{B}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est donc la matrice $\mathcal{P}$.
De plus, $\mathcal{P}^{-1} = \big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\big)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$: les colonnes de $\mathcal{P}^{-1}$ expriment $\psi(\mathrm{X}^j) = (\mathrm{X} - 1)^j$ dans la base $\mathcal{B}$.
Par la formule du binôme : $(\mathrm{X} - 1)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\mathrm{X}^i(-1)^{j-i}$ et on retrouve $(\mathcal{P}^{-1})_{i,j} = (-1)^{i-j}\dbinom{j-1}{i-1}$.

3. $\mathcal{P}^k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^k)$ or par une récurrence immédiate $\varphi^k : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X} + k)$. Pour tout j de $[\![0\,;\,n]\!]$, $\varphi^k(\mathrm{X}^j) = (\mathrm{X} + k)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}k^{j-i}\mathrm{X}^i$, d'où

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n+1]\!]\,, \quad \left(\mathcal{P}^k\right)_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}k^{j-i}.$$

* $\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ *Polynôme minimal et crochets de Lie*

1. *Polynôme minimal*
Soit $n \geqslant 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Justifier que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{n^2})$ est liée.

b) En déduire l'existence d'un polynôme P non nul tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

Un tel polynôme est qualifié de « polynôme annulateur de A ».

c) Soit $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} / \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ et $\deg(\mathrm{P}) = n\}$. Justifier qu'il existe $d \overset{\text{déf.}}{=} \min(\mathcal{D})$, et qu'il existe un polynôme μ_{A} unitaire de degré d tel que $\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0$.

d) Montrer que, si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de A, alors il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_A$.

e) Montrer que μ_A, défini en 1.c), est unique.

f) En déduire que l'ensemble $\mathcal{Z}(A)$ des polynômes annulateurs de A est :

$$\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Ce polynôme est qualifié de « polynôme minimal de A ».

2. *Un polynôme divisible par son dérivé*

Soit P un polynôme unitaire (donc non nul) de $\mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$XP' = \alpha P.$$

a) Montrer que $\alpha = \deg P$.

b) On suppose que P' possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ.

i – Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de XP' ?

ii – Justifier que β est racine de P. Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de P ?

iii – En déduire que $P = X^\alpha$.

3. *Application à une équation matricielle*

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

a) Que peut-on dire de $\mathrm{tr}(A)$?

b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$A^kB - BA^k = kA^k.$$

c) Justifier que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A)B - BP(A) = AP'(A).$$

d) En déduire que $\mu_A = X^d$. Que peut-on dire de A ?

e) Donner un exemple de deux matrices non nulles A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = A$.

Solution (**Ex.16** – *Polynôme minimal et crochets de Lie*)

1. *Polynôme minimal*

a) La famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée car elle compte n^2+1 vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n^2.

b) Par conséquent, il existe n^2+1 coefficients $(a_k)_{0 \leqslant a_k \leqslant n^2}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$. Avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$, on a $P(A) = 0$.

c) $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{K}[X]/P(A) \text{ et } \deg(P) = n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément $d \overset{\text{déf.}}{=} \min(\mathcal{D})$.

Il existe donc (au moins) un polynôme Π de degré d tel que $\Pi(\mathrm{A}) = 0$. Soit a_d le coefficient dominant de Π. Alors $\mu_{\mathrm{A}} \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{a_d}\Pi$ convient.

d) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ annulateur de A. Effectuons la division euclidienne de P par μ_{A} : $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\mu_{\mathrm{A}} + \mathrm{R}$ avec $\deg(\mathrm{R}) < d$.
Alors $\mathrm{R}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{Q}(\mathrm{A})\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0$. Donc R est un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à d. Par définition de d, $\mathrm{R} = 0$. Donc il existe bien Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\mu_{\mathrm{A}}$.

e) Réciproquement, si $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\mu_{\mathrm{A}}$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.
On en déduit bien que : $\mathcal{Z}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{Q}\mu_{\mathrm{A}}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$.

2. *Un polynôme divisible par son dérivé*

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\mathrm{XP}' = \alpha\mathrm{P}.$$

a) Soit d le degré de P. Le coefficient dominant de XP' est d et celui de $\alpha\mathrm{P}$ est α donc $\alpha = d = \deg(\mathrm{P})$.

b) On suppose que P' possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ.

i – L'ordre de multiplicité de la racine β de XP' est encore μ (β n'étant pas racine de X).

ii – $\mathrm{P}(\beta) = \beta\mathrm{P}'(\beta) = 0$: β est racine de P. L'ordre de multiplicité de la racine β de P est :

- $\mu + 1$ par la propriété liant multiplicité et dérivation,
- μ par l'égalité $\mathrm{P} = \mathrm{XP}'$ ...

d'où PROBLÈME!!!
Donc P' ne possède par de racine non nulle.

iii – L'unique racine de P' est 0, et de multiplicité $d - 1 = \alpha - 1$. Donc $\mathrm{P}' = \alpha\mathrm{X}^{\alpha-1}$. Donc $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{\alpha} + c$. Or $\mathrm{P}(0) = 0\mathrm{P}'(0) = 0$. Donc $c = 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{\alpha}$.

3. *Application à une équation matricielle*

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}.$$

a) $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AB}) - \mathrm{tr}(\mathrm{BA}) = 0$.

b) La propriété est vraie au rang $k = 0$ (et $k = 1$).
Supposons-la vraie à un rang k quelconque. Alors :
$\mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - \mathrm{BA}^{k+1} = \mathrm{AA}^k\mathrm{B} - \mathrm{ABA}^k + \mathrm{ABA}^k - \mathrm{BAA}^k = \mathrm{A}(\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k) + (\mathrm{AB} - \mathrm{BA})\mathrm{A}^k = \mathrm{A}k\mathrm{A}^k + \mathrm{AA}^k = (k+1)\mathrm{A}^{k+1}$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout k de $\mathbb{N}$.

c) Soit $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} a_k\mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

$$\mathrm{P(A)B-BP(A)} = \sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\sum_{k\geqslant 0} a_k\mathrm{A}^k = \sum_{k\geqslant 0} a_k(\mathrm{A}^k\mathrm{B}-\mathrm{BA}^k) = \sum_{k\geqslant 0} k a_k \mathrm{A}^k = \mathrm{A}\sum_{k\geqslant 1} k a_k \mathrm{A}^{k-1} = \mathrm{AP}'(\mathrm{A}).$$

d) Appliquons c) à μ_A : $0 = \mathrm{A}\mu'_\mathrm{A}(\mathrm{A})$. Donc $\mathrm{X}\mu'_\mathrm{A} \in \mathcal{Z}(\mathrm{A})$. Donc : $\exists \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{X}\mu'_\mathrm{A} = \mathrm{Q}\mu_\mathrm{A}$. En raison des degrés, Q est un polynôme constant, disons $\mathrm{Q} = \alpha$.
Alors $\mathrm{X}\mu'_\mathrm{A} = \alpha\mu_\mathrm{A}$ avec μ_A non nul et unitaire. Par 2., $\mu_\mathrm{A} = \mathrm{X}^d$.
Ainsi A est nilpotente (d'ordre de nilpotence d).

e) Partons de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente et de trace nulle et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d-a = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 17 *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathcal{B} = (\mathrm{X}^3, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}, 1)$ la base canonique de E, f l'application définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P} + \mathrm{P}' + \mathrm{P}^{(2)} + \mathrm{P}^{(3)}$$

1. Déterminer $\mathrm{M} \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$.

2. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$. Que peut-on dire de f ?

3. a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{V}$ des réels α tels que $f - \alpha id_\mathrm{E}$ ne soit pas bijectif.

b) Pour chaque $\alpha \in \mathcal{V}$, déterminer $\mathrm{E}_\alpha \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Ker}(f - \alpha id_\mathrm{E})$.

c) En déduire qu'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme réciproque de f.

5. Quel est l'antécédent de X^3 par f ?

Solution (**Ex.17** – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$)

1. $\mathrm{M} \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 4$. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{E}$ car $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{E}$ et $\dim \mathrm{Im}f = \dim \mathrm{E}$. $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ car $\dim \mathrm{Ker}f = 4 - 4 = 0$.
f est un automorphisme de E.

3. a) $f - \alpha id_{\mathrm{E}}$ non bijectif ssi $\mathrm{rg}(f - \alpha id_{\mathrm{E}}) \neq 4$ ssi $\mathrm{rg}(\mathrm{M} - \alpha \mathrm{I}_4 \neq 4$ ssi $\alpha = 1$. Ainsi $\mathcal{V} = \{1\}$.

b) $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

c) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une base $=(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S})$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = diag(a, b, c, d)$.
Alors $f(\mathrm{P}) = a\mathrm{P}$ donc $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(f - a id_{\mathrm{E}})$, donc $\mathrm{Ker}(f - a id_{\mathrm{E}}) \neq \{0\}$ et $f - a id_{\mathrm{E}}$ n'est pas bijectif. Par 3.a), $a = 1$. Il en est de même pour b, c et d.
Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{I}_4 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(id_{\mathrm{E}})$, donc $f = id_{\mathrm{E}}$. Ce qui est absurde.
Donc 'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $f(\mathrm{P}) = \mathrm{X}^3 \Leftrightarrow \mathrm{P} = f^{-1}(\mathrm{X}^3) = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2$ d'après $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

$\boxed{\textbf{Exercice 18}}$ *Exemple de changement de base*

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ et $\mathcal{C} = (1, 1 - \mathrm{X}, (1 + \mathrm{X})^2)$.

1. Écrire les matrices de passage $\mathrm{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, puis $\mathrm{Q} = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

2. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$. Donner les coordonnées de A dans $\mathcal{B}$ puis dans $\mathcal{C}$.

3. a) Soit $f : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}''$. Vérifier que f est un endomorphisme de E, puis donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer, à l'aide de P et Q, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

c) Calculer directement $f(1)$, $f(1 - \mathrm{X})$ et $f((\mathrm{X} + 1)^2)$ et retrouver la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{D} = (1, 1 + \mathrm{X}, (1 + \mathrm{X})^2)$. Commentaire ?

5. a) Montrer que $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ sont stables par f.

b) Montrer que $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$ est le seul sous-espace de dimension 1 de E stable par f.

Solution (**Ex.18** – *Exemple de changement de base*)

1. $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\mathrm{A} = ((1 + \mathrm{X})^2 + (1 - \mathrm{X}) - 1$ ou $\mathrm{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. a) $\mathrm{M} = mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{N} = mat_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{QMP} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $f(1) = 1$, $f(1-\mathrm{X}) = -\mathrm{X} = (1-\mathrm{X}) - 1$, $f(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 1) = \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 5 = (\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 1) - 2(1-\mathrm{X}) + 6$.

4. $f(1) = 1$, $f(1+\mathrm{X}) = \mathrm{X} + 2 = 1 + (1+\mathrm{X})$, $f((1+\mathrm{X})^2) = \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 5 = (1+\mathrm{X})^2 + 2(1+\mathrm{X}) + 2$, d'où $mat_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $mat_{\mathcal{D}}(f) = mat_{\mathcal{B}}(f)$.

5. a)
- $\forall \mathrm{T} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}], f(\mathrm{T}) = \mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' = \mathrm{T} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.
- $\forall \mathrm{T} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}], f(\mathrm{T}) = \mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' = \mathrm{T} + \mathrm{T}' \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

b) Soit F un sous-espace de E de dimension 1 et stable par f. Soit T tel que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{T})$. Comme F est stable, $f(\mathrm{T}) \in \mathrm{F}$ donc il existe α tel que $f(\mathrm{T}) = \alpha\mathrm{T}$.
En écrivant $\mathrm{T} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, on obtient
$$a\mathrm{X}^2 + (b + 2a)\mathrm{X} + (c + b + 2a) = \alpha(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c).$$
Identifions les coefficients de même degré.
Si $a \neq 0$, alors $\alpha = 1$, mais alors $b + 2a = b$ donc $a = 0$: absurde. Donc $a = 0$.
Si $b \neq 0$, alors $\alpha = 1$, mais alors $c + b = c$ donc $b = 0$: absurde. Donc $b = 0$.
Donc T est constant et $\mathrm{F} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.
Réciproquement, on sait que $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$ est stable par f.

Exercice 19 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\qquad \varphi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} - \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$.

1. a) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$.

c) φ est-il un automorphisme ?

2. a) Déterminer l'ensemble E_1 des matrices M telles que
$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}.$$
Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E, préciser sa dimension.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des matrices M telles que
$$\varphi(\mathrm{M}) = (1-n)\mathrm{M}.$$
Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace de E, préciser sa dimension.

3. a) Justifier que E_1 et E_2 sont stables par φ, et supplémentaires.

b) Donner la matrice représentant φ dans une base obtenue en concaténant une base de E_1 et une base E_2.

Solution (**Ex.19** – *Un endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. a) Par la linéarité de tr, on vérifie sans peine que φ est linéaire.

b) $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \mathrm{M} = \mathrm{tr(M)I}_n \Rightarrow \mathrm{tr(M)} = \mathrm{tr(tr(M)I}_n) \Rightarrow \mathrm{tr(M)} = \mathrm{tr(M)tr(I}_n) \Rightarrow$ $\mathrm{tr(M)} = n\mathrm{tr(M)}$, et comme $n \neq 1$,$\mathrm{tr(M)} = 0$.
Or $\mathrm{M} = \mathrm{tr(M)I}_n$ donc $\mathrm{M} = 0$. $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.

c) φ est un endomorphisme de E, de dimension finie n^2. Comme φ est injectif (puisque $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$), φ est un automorphisme.

2. a) $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{M} - \mathrm{tr(M)I}_n = \mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{tr(M)} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Ker(tr)}$.
$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Ker(tr)}$, comme tout noyau, c'est un sous-e.v. de E. Comme tr est une forme linéaire non nulle ($\mathrm{tr} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$), $\mathrm{Im(tr)} = \mathbb{R}$, $\mathrm{rg(tr)} = 1$, et par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker(tr)}) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg(tr)}$, donc $\dim(\mathrm{E}_1) = n^2 - 1$.

b) $\varphi(\mathrm{M}) = (1-n)\mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{M} - \mathrm{tr(M)I}_n = (1-n)\mathrm{M} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{tr(M)}}{n}\mathrm{I}_n = \mathrm{M}$.
Donc : $\mathrm{M} \in \mathbb{E}2 \Rightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.
Réciproquement, si $\mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$, en écrivant $\mathrm{M} = \alpha\mathrm{I}_n$, $\dfrac{\mathrm{tr(M)}}{n}\mathrm{I}_n = \dfrac{\alpha n}{n}\mathrm{I}_n =$ $\alpha\mathrm{I}_n = \mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_2$.
Donc $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$, sous-espace vectoriel de dimension 1 de E.

3. a) On a déjà $\dim(\mathrm{E}_1) + \dim(\mathrm{E}_2) = n^2 = \dim(\mathrm{E})$.
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Alors $\mathrm{tr(M)} = 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{M} = \alpha\mathrm{I}_n$.
Alors $0 = \mathrm{tr(M)} = \mathrm{tr}(\alpha\mathrm{I}_n) = \alpha\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = \alpha n$, donc $\alpha = 0$ puisque $n \neq 0$.
Donc $\mathrm{M} = 0$.

b) Soit $\mathcal{B} = (\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{n^2-1}, \mathrm{B})$ une base de E avec $\mathrm{A}_i \in \mathrm{E}_1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n^2 - 1$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{E}_2$. Alors
$\forall i \in [\![1\,;\,n^2-1]\!]\,, \varphi(\mathrm{A}_i) = 1 \times \mathrm{A}_i$ et $\varphi(\mathrm{B}) = (1-n)\mathrm{B}$.
Du coup, la matrice de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ représentant φ est la matrice diagonale :

$$mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = diag(1, \ldots, 1, 1-n)$$

Exercice 20 *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. Soit f définie sur E par

$$\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}, \qquad f(x,y,z) = (2x - 3y + z, -x + 2y - z, -9x + 15y - 6z).$$

1. a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$. f est-il un automorphisme ?

2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Déterminer la matrice M représentant f dans $\mathcal{B}$.

3. Soit $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,3)$ et $w = (0,1,3)$ et $\mathcal{C} = (u,v,w)$.
Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E.

4. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

5. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
6. Déterminer la matrice N représentant f dans $\mathcal{C}$.
7. Montrer que $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(v, w)$ sont deux sous-espaces de E stables par f.
8. Calculer N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (**Ex.20** – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)

1. a) La linéarité est banale, f est un endomorphisme.

b) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ donc f est n'est pas injective, donc f n'est pas un automorphisme.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-1,1,6),(-2,1,9))$.
On peut aussi dresser la matrice M de f dans la base canonique et vérifier que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 2$ (ci-après).

2. $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -9 & 15 & -6 \end{pmatrix}$

3. Soit $\mathrm{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\mathrm{P}) = 3 = \dim \mathrm{E}$ (à calculer) donc $\mathcal{C}$ est une base de E.

4. C'est la matrice P précédente.

5. $\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

6. • On peut utiliser la formule de changement de base :
$\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

• En calculant MP, on calcule les images de vecteurs représentés par les coloonnes de P, i.e. de u, v et w :
$\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, donc $f(u) = 0$, $f(v) = -v + 2w$ et $f(w) = -w$ ce qui permet d'écrire N.

7. • Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u)$. $f(u) = 0 \in \mathrm{F}$ donc par linéarité de f, F est stable par f.
• Soit $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v, w)$. $f(v) = -v + w \in \mathrm{G}$ et $f(w) = -w \in \mathrm{G}$, donc par linéarité de f, G est stable par f.

8. • Ecrivons $\mathrm{N} = \mathrm{D} + \mathrm{A}$ avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et du coup : $\forall k \geqslant 2, \mathrm{A}^k = 0$.
Puisque D et A commutent, par la formule du binome,

$$\mathrm{N}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{D}^{n-k} = \mathrm{D}^n + n\mathrm{A}\mathrm{D}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 2n(-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

• On peut aussi calculer N^2, N^3 puis conjecturer son expression générale et démontrer le résultat par récurrence sur n.

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. Soit f définie sur E par

$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}, \qquad f(x, y, z) = (-2y + z, x - 3y + z, x - 2y).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E. Est-ce un automorphisme ?

2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Déterminer la matrice M représentant f dans $\mathcal{B}$.

3. Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (0, 1, 3)$ et $\mathcal{C} = (u, v, w)$.
Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E.

4. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, puis la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

5. Déterminer la matrice N représentant f dans $\mathcal{C}$.

6. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, w)$ et $\mathrm{Vect}(v)$ sont deux sous-espaces de E stables par f.

7. Calculer N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (**Ex.21** – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)

1. La linéarité est banale, f est un endomorphisme.
$\mathrm{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective, et comme E est de dimension finie, f est un automorphisme. On peut aussi dresser la matrice M de f dans la base canonique et vérifier que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 3$ (ci-après).

2. $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. Soit $\mathrm{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\mathrm{P}) = 3 = \dim \mathrm{E}$ (à calculer) donc $\mathcal{C}$ est une base de E.

4. • C'est la matrice P précédente.

- Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. $\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5. • On peut utiliser la formule de changement de base :
$\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

• En calculant MP, on calcule les images de vecteurs représentés par les coloonnes de P, i.e. de u, v et w :
$\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, donc $f(u) = -u$, $f(v) = -v$ et $f(w) = u - w$ ce qui permet d'écrire N.

6. • Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u, w)$. $f(u) = -u \in \mathrm{F}$ et $f(w) = u - w \in \mathrm{F}$, donc par linéarité de f, F est stable par f.

• Soit $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v)$. $f(v) = -v \in \mathrm{G}$ donc par linéarité de f, G est stable par f.

7. • Ecrivons $\mathrm{N} = -\mathrm{I}_3 + \mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et du coup : $\forall k \geqslant 2, \mathrm{A}^k = 0$.

Puisque $-\mathrm{I}_3$ et A commutent, par la formule du binome,
$\mathrm{N}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k(-\mathrm{I}_3)^{n-k} = (-\mathrm{I}_3)^n + n\mathrm{A}(-\mathrm{I}_3)^{n-1} = (-1)^n\mathrm{I}_3 + (-1)^{n-1}n\mathrm{A}$.

• On peut aussi calculer N^2, N^3 puis conjecturer son expression générale et démontrer le résultat par récurrence sur n.

Exercice 22 *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. Soit f définie sur E par

$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}, \qquad f(x, y, z) = (x, 3x - 2y + z, 9x - 9y + 4z).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E. Est-ce un automorphisme ?

2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E.
Déterminer la matrice M représentant f dans $\mathcal{B}$.

3. Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (0, 1, 3)$ et $\mathcal{C} = (u, v, w)$.
Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E.

4. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

5. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

6. Déterminer la matrice N représentant f dans $\mathcal{C}$.

7. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, w)$ et $\mathrm{Vect}(v)$ sont deux sous-espaces de E stables par f.

8. Calculer N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (**Ex.22** – *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)

1. La linéarité est banale, f est un endomorphisme.
Ker$f = \{0\}$ donc f est injective, et comme E est de dimension finie, f est un automorphisme. On peut aussi dresser la matrice M de f dans la base canonique et vérifier que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 3$ (ci-après).

2. $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

3. Soit $\mathrm{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\mathrm{P}) = 3 = \dim \mathrm{E}$ (à calculer) donc $\mathcal{C}$ est une base de E.

4. C'est la matrice P précédente.

5. $\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

6. • On peut utiliser la formule de changement de base :
$\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• En calculant MP, on calcule les images de vecteurs représentés par les coloonnes de P, i.e. de u, v et w :
$\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, donc $f(u) = u + w$, $f(v) = v$ et $f(w) = w$ ce qui permet d'écrire N.

7. • Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u, w)$. $f(u) = u + w \in \mathrm{F}$ et $f(w) = w \in \mathrm{F}$, donc par linéarité de f, F est stable par f.

• Soit $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v)$. $f(v) = v \in \mathrm{G}$ donc par linéarité de f, G est stable par f.

8. • Ecrivons $\mathrm{N} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et du coup : $\forall k \geqslant 2, \mathrm{A}^k = 0$.

Puisque $-\mathrm{I}_3$ et A commutent, par la formule du binome,

$$\mathrm{N}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{I}_3^{n-k} = \mathrm{I}_3^n + n\mathrm{A}\mathrm{I}_3^{n-1} = \mathrm{I}_3 + n\mathrm{A}.$$

• On peut aussi calculer N^2, N^3 puis conjecturer son expression générale et démontrer le résultat par récurrence sur n.

Exercice 23 *Diagonalisation par blocs*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

b) f est-il un automorphisme ?

c) $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

2. a) Déterminer $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - 2id)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f^2)$.

b) Montrer que F et G sont stables par f.

c) Montrer que F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{N}^2 = 0$.

3. a) On pose $\mathrm{D} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$. Calculer D^n pour tout $n \geqslant 2$ en fonction de n et D^2.

b) En déduire M^n pour tout $n \geqslant 2$.

Solution (**Ex.23** – *Diagonalisation par blocs*)

1. a) $\mathrm{rg}(f) = 3$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_2 + e_4)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$.

b) f n'est pas un automorphisme car $\mathrm{rg}(f) < \dim(\mathbb{R}^4)$.

c) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3) \neq \{0\}$ donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ne sont pas supplémentaires.

2. a) $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$.

b) • $u \in \mathrm{F} \Rightarrow f(u) = 2u \in \mathrm{F}$: F est stable par f.

• $u \in \mathrm{G} \Rightarrow f^2\big(f(u)\big) = f\big(f^2(u)\big) = f(0) = 0 \Rightarrow f(u) \in \mathrm{Ker}(f^2) \Rightarrow f(u) \in \mathrm{G}$.

c) On a déjà $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathbb{R}^4$.

$$u \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \Rightarrow \begin{cases} f(u) = 2u \\ f^2(u) = 0 \end{cases} \Rightarrow f^2(u) = 4u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.

• Bilan : F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

d) Prenons $\mathcal{C}$ concaténée de bases $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{G}}$ de F et G (par exemple celles données dans 2.a)).
Comme F et G sont stables par f, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale par blocs : $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{F}}}(f_{|\mathrm{F}})$ et $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{F}}}(f_{|\mathrm{G}})$
Comme $\forall u \in \mathrm{F}, f(u) = 2u$, $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2$.
Comme $\forall u \in \mathrm{G}, f^2(u) = 0$, $\mathrm{N}^2 = 0$.

3. a) $\forall n \geqslant 2, \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} (2\mathrm{I}_2)^n & 0 \\ 0 & \mathrm{N}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^{n-2}\mathrm{D}^2$.

b) Il existe une matrice de passage P telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Alors pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = 2^{n-2}\mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1} = 2^{n-2}\mathrm{M}^2 = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 24}}$ *Diagonalisation par blocs*

Soit $f\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
b) f est-il un automorphisme ?
c) $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

2. a) Déterminer $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - 2id)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f^2 + 4id)$.
b) Montrer que F et G sont stables par f.
c) Montrer que F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{N}^2 = -4\mathrm{I}_2$.

3. a) On pose $\mathrm{D} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$. Calculer D^n pour tout $n \geqslant 2$.
b) En déduire M^n pour tout $n \geqslant 2$.

Solution (**Ex.24** – *Diagonalisation par blocs*)

1. a) $\mathrm{rg}(f) = 3$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_2 + e_4)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$.
b) f n'est pas un automorphisme car $\mathrm{rg}(f) < \dim(\mathbb{R}^4)$.

c) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3) \neq \{0\}$ donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ne sont pas supplémentaires.

2. a) $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$.

b)
- $u \in \mathrm{F} \Rightarrow f(u) = 2u \in \mathrm{F}$: F est stable par f.
- $u \in \mathrm{G} \Rightarrow (f^2 + 4id)\big(f(u)\big) = f\big(f^2(u) + 4u\big) = f(0) = 0 \Rightarrow f(u) \in \mathrm{Ker}(f^2) \Rightarrow f(u) \in \mathrm{G}$.

c) On a déjà $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathbb{R}^4$.

$$u \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \Rightarrow \begin{cases} f(u) = 2u \\ f^2(u) = -4u \end{cases} \Rightarrow f^2(u) = 4u = -4u \Rightarrow u = 0.$$

Donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.

- Bilan : F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

d) Prenons $\mathcal{C}$ concaténée de bases $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{G}$ de F et G (par exemple celles données dans 2.a)).

Comme F et G sont stables par f, $\mathcal{M}_\mathcal{C}(f)$ est diagonale par blocs : $\mathcal{M}_\mathcal{C}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{F}}(f_{|\mathrm{F}})$ et $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{F}}(f_{|\mathrm{G}})$

Comme $\forall u \in \mathrm{F}, f(u) = 2u$, $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2$.

Comme $\forall u \in \mathrm{G}, f^2(u) = -4u$, $\mathrm{N}^2 = -4\mathrm{I}_2$.

3. a) $\forall n \geqslant 2, \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} (2\mathrm{I}_2)^n & 0 \\ 0 & \mathrm{N}^n \end{pmatrix}$.

De $\mathrm{N}^4 = 16\mathrm{I}_2$ on tire :

$\mathrm{N}^{4k} = 16^k\mathrm{I}_2$ et $\mathrm{D}^{4k} = 16^k\mathrm{I}_4$,

$\mathrm{N}^{4k+1} = 16^k\mathrm{N}$ et $\mathrm{D}^{4k+1} = 16^k \begin{pmatrix} 2\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix} = 16^k\mathrm{D}$,

$\mathrm{N}^{4k+2} = -4(16^k)\mathrm{I}_2$ et $\mathrm{D}^{4k+2} = 4(16^k) \begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_2 \end{pmatrix} = 16^k\mathrm{D}^2$,

$\mathrm{N}^{4k+3} = -4(16^k)\mathrm{N}$ et $\mathrm{D}^{4k+3} = 16^k\mathrm{D}^3$,

ce qui couvre tous les cas possibles.

Plus simplement : $\mathrm{D}^{4k+r} = 16^k\mathrm{D}^r$.

b) Il existe une matrice de passage P telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in [\![0\,;\,3]\!]$, $\mathrm{M}^{4k+r} = \mathrm{PD}^{4k+r}\mathrm{P}^{-1} = 16^k\mathrm{M}^r$.

Exercice 25 *Diagonalisation par blocs*

Soit $f\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
b) f est-il un automorphisme ?
c) $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

2. a) Déterminer $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - 2id)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f^2 - 4f)$.
b) Montrer que F et G sont stables par f.
c) Montrer que F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{N}^2 = 4\mathrm{N}$.

3. On pose $\mathrm{D} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$. Calculer D^n pour tout $n \geqslant 2$ en fonction de n et N.
a) Donner un exemple explicite de base $\mathcal{C}$ et d'une matrice N convenable.

Solution (**Ex.25** – *Diagonalisation par blocs*)

1. a) $\mathrm{rg}(f) = 3$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_4, e_2 + e_4, e_3 + e_4)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$.
b) f n'est pas un automorphisme car $\mathrm{rg}(f) < \dim(\mathbb{R}^4)$.
c) Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, la concaténée des deux bases précédentes de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ est une base de $\mathbb{R}^4$: $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

2. a) $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$.
b)
- $u \in \mathrm{F} \Rightarrow f(u) = 4u \in \mathrm{F}$: F est stable par f.
- $u \in \mathrm{G} \Rightarrow (f^2 - 4f) \circ f(u) = f\big(f^2(u) - 4f(u)\big) = f(0) = 0 \Rightarrow f(u) \in \mathrm{Ker}(f^2 - 4f) \Rightarrow f(u) \in \mathrm{G}$.

c) On a déjà $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathbb{R}^4$.

$$u \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \Rightarrow \begin{cases} f(u) = 2u \\ f^2(u) = 4f(u) \end{cases} \Rightarrow f^2(u) = 4u = 8u \Rightarrow u = 0.$$

Donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
- Bilan : F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

d) Prenons $\mathcal{C}$ concaténée de bases $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{G}$ de F et G (par exemple celles données dans 2.a)).

Comme F et G sont stables par f, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale par blocs : $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{F}}}(f_{|\mathrm{F}})$ et $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{F}}}(f_{|\mathrm{G}})$
Comme $\forall u \in \mathrm{F}, f(u) = 2u$, $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2$.
Comme $\forall u \in \mathrm{G}, f^2(u) = 4f(u)$, $\mathrm{N}^2 = 4\mathrm{N}$.

3. a) $\forall n \geqslant 2, \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} (2\mathrm{I}_2)^n & 0 \\ 0 & \mathrm{N}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & 4^{n-1}\mathrm{N} \end{pmatrix}$.

b) En prenant les bases de F et G trouvée en 2.a), $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{G}}}(f_{|\mathrm{G}}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
car $f(e_1 - e_3) = f(e_2 - e_4) = 2(e_1 - e_3) + 2(e_2 - e_4)$.

Chapitre 2

Déterminants

$\boxed{\textbf{Exercice 26}}$ *Déterminants élémentaires*

Calculer sous forme factoriser

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$ (on pourra commencer par retrancher la première colonne aux autres) ;

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

Solution (**Ex.26** – *Déterminants élémentaires*)

1. $2abc$.

2. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$.

3. $-4\sin\dfrac{b-a}{2}\sin\dfrac{c-a}{2}\sin\dfrac{b-c}{2}$.

4. $abc(a-b)(a-c)(b-c)$.

Exercice 27 *Par récurrence*

Calculer par récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$

Solution (**Ex.27** – *Par récurrence*)
$D_n = D_{n-2}$ et
$D_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

Exercice 28 *Par récurrence*

Calculer par récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$

Solution (**Ex.28** – *Par récurrence*)
$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$ et
$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Exercice 29 *Tridiagonal*

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & & (0) \\ z & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & z \\ (0) & & z & 1+z^2 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution (**Ex.29** – *Tridiagonal*)
En développant suivant la première colonne puis la première ligne (stratégie tridiagonale) :
$D_n = (1+z^2)D_{n-1} - z^2 D_{n-2}$.
Notons que cette relation est encore vérifiée pour $n = 0$ en prenant $D_0 = 1$, car $D_1 = 1 + z^2$ et $D_2 = (1+z^2)^2 - z^2$.
Suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$x^2 - (1+z^2)x + z^2 = 0$, de racines 1 et z^2.
• Premier cas : $z^2 \neq 1$.
Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{D}_n = a + bz^{2n}$.
Avec D_0 et D_1, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{D}_n = \dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$.
• Second cas : $z^2 = 1$.
Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{D}_n = a + bn$.
Avec $\mathrm{D}_0 = 1$ et $\mathrm{D}_1 = 2$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{D}_n = 1 + n$.

Exercice 30 *Déterminant de sommes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ $\mathrm{S}_k = \sum_{i=1}^{k} i$.

Calculer $\begin{vmatrix} \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_1 & \dots & \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_2 & \dots & \mathrm{S}_2 \\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_3 & \dots & \mathrm{S}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_3 & \dots & \mathrm{S}_n \end{vmatrix}_{[n]}$.

Solution (**Ex.30** – *Déterminant de sommes*)
En effectuant successivement $\mathrm{L}_n \leftarrow \mathrm{L}_n - \mathrm{L}_{n-1}$, $\mathrm{L}_{n-1} \leftarrow \mathrm{L}_{n-1} - \mathrm{L}_{n-2}$,..., $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$, ce déterminant vaut $n!$.

Exercice 31 *Déterminant et racines n-ièmes de l'unité*

Soit $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Calculer $\det(\mathrm{M})$.

2. Déterminer le rang de M en fonction de a.

Solution (**Ex.31** – *Déterminant et racines n-ièmes de l'unité*)

1. En décomposant la première colonne :

$$\det(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ a & & & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}a^n.$$

2. $\det(\mathrm{M}) = 0 \Leftrightarrow (-a)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\,, a = -\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$.

Dans ce cas, M_a possède une matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[n-1]}$ de rang $n-1$ donc est au moins de rang $n-1$.

Finalement :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}_a) = \begin{cases} n-1 & \text{si } \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\,, a = -\mathrm{e}^{2ik\pi/n}, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 32 *Matrices antisymétriques*

Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2n+1$. Montrer que $\det(\mathrm{A}) = 0$.
En est-il de même pour une matrice antisymétrique d'ordre pair ?

Solution (**Ex.32** – *Matrices antisymétriques*)

$\det(\mathrm{A}) = \det({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^{2n+1}\det(\mathrm{A}) = -\det(\mathrm{A})$ donc $\det(\mathrm{A}) = 0$.

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un contre-exemple si l'ordre est pair...

Exercice 33 *Inverse d'une matrice triangulaire par blocs*

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est inversible si, et seulement si, A et C le sont.

2. Dans ce cas, écrire M^{-1} par blocs.

Solution (**Ex.33** – *Inverse d'une matrice triangulaire par blocs*)

1. $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{C})$ donc

$$\big(\det(\mathrm{M}) \neq 0\big) \Leftrightarrow \big(\det(\mathrm{A}) \neq 0 \text{ et } \det(\mathrm{C}) \neq 0\big),$$

ce qui se traduit par M est inversible si, et seulement si, A et C le sont.

2. On pourra chercher $\mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} & \mathrm{T} \end{pmatrix}$, ou on méditera avec profit sur la propriété : l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire (penser à la résolution d'un système linéaire du type $\mathrm{TX} = 0$...)

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} & -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{C}^{-1} \\ 0 & \mathrm{C}^{-1} \end{pmatrix} = \mathrm{I}_{n+p}$$

Exercice 34 *Déterminant et blocs*

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^4$ tel que $\mathrm{D} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{CD} = \mathrm{DC}$.

Montrer que : $\det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})$.

Solution (**Ex.34** – *Déterminant et blocs*)

On cherche à trouver des relations entre matrices triangulaires par blocs, par exemple :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ? & -\mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ ? & \mathrm{AD} - \mathrm{BC} \end{pmatrix}.$$

En prenant le premier « ? » égal à I_n :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{AD} - \mathrm{BC} \end{pmatrix}.$$

Alors $\det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \times \det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})$.

Et puisque $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, $\det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})$.

Exercice 35 *Déterminant et Pascal*

Soit $n \geqslant 2$. Calculer :

$$\mathrm{D}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} & \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution (**Ex.35** – *Déterminant et Pascal*)

En retranchant, à partir de la seconde ligne sa précédente, et par la formule de Pascal, on obtient :

$$\mathrm{D}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-2} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Comme $\binom{k}{k} = 1$ $(\forall k)$, en développant par rapport à la première colonne, $\mathrm{D}_n = \mathrm{D}_{n-1}$.

Donc : $\forall n \geqslant 2, \mathrm{D}_n = \mathrm{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Exercice 36 *Déterminant à un paramètre*

Soit $n \geqslant 2$ et $a \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\mathrm{D}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & a+1 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution (**Ex.36** – *Déterminant à un paramètre*)

En conservant la dernière colonne et en retranchant à chacune des autres la suivante :

$$\mathrm{D}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -a & a+1 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

En remplaçant la dernière ligne par la somme de toutes les lignes :

$$\mathrm{D}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a+n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\mathrm{D}_n = a^{n-1}(a+n).$$

Exercice 37 *Déterminant tridiagonal*

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{D}_n(\theta)$ le déterminant d'ordre n :

$$\mathrm{D}_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{D}_n(\theta) = \dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}$.

Solution (**Ex.37** – *Déterminant tridiagonal*)

$\mathrm{D}_0(\theta) = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$ (produit vide, ou convention),

$\mathrm{D}_1(\theta) = 2\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$,

$\mathrm{D}_2(\theta) = 4\cos^2\theta - 1 = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$

car $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta\big(3 - 4\sin^2\theta\big) = \sin\theta\big(4\cos^2\theta - 1\big)$.

En développant par rapport à la 1$^{\text{ère}}$ colonne,

$$\mathrm{D}_{n+2}(\theta) = 2\cos\theta\mathrm{D}_{n+1}(\theta) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la 1$^{\text{ère}}$ ligne,

$$\mathrm{D}_{n+2}(\theta) = 2\cos\theta\mathrm{D}_{n+1}(\theta) - \mathrm{D}_n(\theta).$$

Avec les valeurs initiales, cette relation est vraie dès $n = 0$.

L'équation caractéristique associée par la relation linéaire de la suite $(\mathrm{D}_n(\theta))$ est $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$.
Ses solutions sont $\mathrm{e}^{\pm in\theta}$ et il existe α et β réels tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}_n(\theta) = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta).$$
Avec $n = 0$: $\alpha = 1$.
Avec $n = 1$: $\cos\theta + \beta\sin\theta = 2\cos\theta \Rightarrow \beta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}_n(\theta) = \cos(n\theta) + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$

Exercice 38 *Matrices de Vandermonde et polynômes*
Dans cet exercice, on *retrouve* le déterminant de Vandermonde par une autre méthode que celle du cours, utilisant des polynômes. Soit n un entier naturel supérieur à 2 et $a_1, \dots, a_n$ n nombres complexes. Soit
$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. *Inversibilité*

a) Soit $\mathrm{B} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En considérant le polynôme $\mathrm{P} \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathrm{X}^i$, montrer que le système linéaire :
$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n)\mathrm{B} = 0$$
d'inconnue B est de Cramer si, et seulement si,
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_i \neq a_j)$$
.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n)$ soit inversible.

2. *Déterminant*
Jusqu'à la fin de cette question, on suppose désormais les a_i deux à deux distincts.

a) Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \det\big(\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n, x)\big)$ est une expression polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\det(\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n))$.

b) Quelles sont les racines de f ? En déduire par récurrence l'expression du déterminant de Vandermonde d'ordre n.

Solution (**Ex.38** – *Matrices de Vandermonde et polynômes*)

1. *Inversibilité*

a) Soit $\mathrm{B} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En considérant le polynôme $\mathrm{P} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathrm{X}^i$, montrer que le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \mathrm{VB} = 0$$

d'inconnue B est de Cramer si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_i \neq a_j)$$

.

- Si : $\exists i \neq j, a_i = a_j$, alors
$\mathrm{rg}\big(\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n)\big) < n$ et $(\mathcal{S})$ n'est pas de Cramer.
- Si : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_i \neq a_j)$, alors

$$(\mathcal{S}) \Rightarrow \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mathrm{P}(a_i) = 0 \Rightarrow \mathrm{P} = 0 \Rightarrow \mathrm{B} = 0$$

car P admet au moins n racines distinctes et $\deg(\mathrm{P}) < n$. Donc $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer.

b) $\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible si, et seulement si, les (a_i) sont deux à deux distincts.

2. *Déterminant*

Jusqu'à la fin de cette question, on suppose désormais les a_i deux à deux distincts.

a) En développant $\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n, x)$ par rapport à sa dernière ligne, on observe que $f(x)$ est une expression polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\det(\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n))$.

b) $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], f(a_i) = 0$ donc les racines de f sont exactement les n nombres $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (racines simples deux à deux distinctes).

On a alors, en factorisant f :

$\det(\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n, x)) = \det(\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n))(x - a_1) \ldots (x - a_n)$.

On pourra remarquer que cette relation reste vraie si deux (au moins) des a_i sont égaux.

Une récurrence sans difficulté montre qu'alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \det(\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n)) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

Exercice 39 *Équivalence des normes usuelles*
Démontrer les encadrements suivants sur les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$.

1. $||.||_\infty \leqslant ||.||_1 \leqslant n\,||.||_\infty$
2. $||.||_2 \leqslant ||.||_1 \leqslant \sqrt{n}\,||.||_2$
3. $||.||_\infty \leqslant ||.||_2 \leqslant \sqrt{n}\,||.||_\infty$

Solution (**Ex.39** – *Équivalence des normes usuelles*)
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. $\exists i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, ||x||_\infty = |x_i|$ donc $||x||_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| = ||x||_1$.

$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, |x_i| \leqslant ||x||_\infty$, donc $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n\,||x||_\infty$

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$||(|x_1|, \ldots, |x_n|)||_2^2\,||(1, \ldots, 1)||_2 \geqslant \langle(|x_1|, \ldots, |x_n|), (1, \ldots, 1)\rangle^2$
i.e. $||x||_2^2 \times n \geqslant ||x||_1^2$ donc $||x||_1 \leqslant \sqrt{n}\,||x||_2$.
$||x||_1^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} |x_i|\,|x_j| \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ||x||_2^2$ donc $||x||_1 \geqslant ||x||_2$.

3. $\exists i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, ||x||_\infty = |x_i|$ donc $||x||_\infty = \sqrt{x_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = ||x||_2$.

$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, |x_i| \leqslant ||x||_\infty$, donc $x_i^2 \leqslant ||x||_\infty^2$ donc $||x||_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant n\,||x||_\infty^2$

donc $||x||_2 \leqslant \sqrt{n}\,||x||_\infty$.

Exercice 40 *Ouverts ou fermés*

Étudier si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < |y+1| < 1\}$, $\quad \mathrm{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}$,

$\mathrm{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x^2 + y^4 < 0\}$, $\quad \mathrm{D} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

Solution (**Ex.40** – *Ouverts ou fermés*)

- $f : (x,y) \mapsto |y+1|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et A est l'intersection des ouverts $\mathrm{A}_0 \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) > 0\}$ et $\mathrm{A}_1 \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) < 10\}$ donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $\forall n \geqslant 2, \mathrm{MN} \overset{\text{déf.}}{=} (1/n, 1/n) \in \mathrm{B}$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{M}_n = (0,0) \notin \mathrm{B}$ donc B n'est pas fermé. $f : (x,y) \mapsto |y+1|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et A est l'intersection des ouverts $\mathrm{A}_0 \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) > 0\}$ et $\mathrm{A}_1 \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) < 10\}$ donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
$\mathrm{M} = (1,0) \in \mathrm{B}$ mais $\forall r > 0, \mathcal{B}(\mathrm{M}, r) \notin \mathrm{B}$ car $(1 + r/2, 0) \notin \mathrm{B}$ donc B n'est pas ouvert.
- C est vide donc C est ouvert ET fermé.
- $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (polynôme des coefficients de la matrice) donc $\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(\mathrm{M}) = 0\}$ est fermé et son complémentaire D est ouvert.

Exercice 41 *Sous-multiplicativité de la norme canonique matricielle*

1. Rappeler la définition de $||.||_2$, norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que, pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $||\mathrm{AB}||_2 \leqslant ||\mathrm{A}||_2\, ||\mathrm{B}||_2$. *Indication : on fera apparaître* $(\mathrm{AB})_{i,j}$ *comme produit scalaire canonique de deux vecteurs bien choisis de* $\mathbb{R}^n$.

Solution (**Ex.41** – *Sous-multiplicativité de la norme canonique matricielle*)

1. $||\mathrm{M}||_2 = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}.\mathrm{M})} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}^2}$

2. Soit $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. $\forall (i,j), \quad c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \langle (a_{i,\bullet}), (b_{\bullet,j}) \rangle$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (i,j), c_{i,j}^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$.

Ainsi :

$$||\mathrm{AB}||_2^2 = \sum_{i,j} c_{i,j}^2 \leqslant \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)\right]\right]$$

$$||\mathrm{AB}||_2^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)\right]\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)||\mathrm{B}||_2^2\right]$$

D'où $||\mathrm{AB}||_2^2 \leqslant ||\mathrm{A}||_2^2\,||\mathrm{B}||_2^2$...

$\boxed{\textbf{Exercice 42}}$ *Intérieur, adhérence et opérations ensemblistes*

Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé.

1. Montrer que : $\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$ et $\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}$

2. En déduire des propriétés analogues pour l'intérieur de $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ et de $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$.

Solution (**Ex.42** – *Intérieur, adhérence et opérations ensemblistes*)

1. • Soit $x \in \overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ convergente, de limite x.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathrm{A}$, donc $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \overline{\mathrm{A}}$.

Et : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathrm{B}$, donc $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \overline{\mathrm{B}}$.

Donc $x \in \overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$. Bilan : $\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$.

• Soit $x \in \overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ convergente, de limite x. De deux choses l'une : soit une infinité de x_n est dans A, soit une infinité de x_n est dans B.

Pour fixer les idées, supposons qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ contenue dans A. Alors $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in \overline{\mathrm{A}}$.

Dans l'autre cas, on montre que $x \in \overline{\mathrm{B}}$.

Donc $x \in \overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}$, et $\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}$.

Réciproquement, si $x \in \overline{\mathrm{A}}$, alors il existe une suite $(x_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Mais (x_n) est une suite de $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, donc $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$. De même si $x \in \overline{\mathrm{B}}$.

D'où l'implication réciproque.

2. Rappelons que $\complement_{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{A}} = \overset{\circ}{\widehat{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}}}$, donc $\overset{\circ}{\mathrm{A}} = \complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}}\right)$, et que :

$\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}\cap\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ et $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}\cup\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

Montrons que $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}} = \overset{\circ}{\mathrm{A}}\cap\overset{\circ}{\mathrm{B}}$:

$$\overset{\circ}{\mathrm{A}}\cap\overset{\circ}{\mathrm{B}} = \complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}}\right)\cap\complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B}}\right) = \complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}}\cup\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B}}\right) = \complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}\cup\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B}}\right)$$

$$\overset{\circ}{\mathrm{A}}\cap\overset{\circ}{\mathrm{B}} = \complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}\right) = \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}}$$

On montre de même que : $\overset{\circ}{\mathrm{A}}\cup\overset{\circ}{\mathrm{B}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}}$ (en se souvenant que : $\mathrm{A}\subset\mathrm{B} \Rightarrow \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B} \subset \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$).

$\overset{\circ}{\mathrm{A}}\cup\overset{\circ}{\mathrm{B}} = \complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}}\right)\cup\complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}}\right) = \complement_{\mathrm{E}}\left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}}\cap\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B}}\right)$ donc

$$\overset{\circ}{\mathrm{A}} \cup \overset{\circ}{\mathrm{B}} \subset \complement_{\mathrm{E}} \left(\overline{\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A} \cap \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B}} \right) = \overbrace{\complement_{\mathrm{E}} \left(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A} \cap \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B} \right)}^{\circ} = \widehat{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}^{\circ}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 43}}$ *Limite et inverses*

1. a) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose, pour tout x de $\mathbb{K}$, $\mathrm{P}(x) = \det(\mathrm{A} + x\mathrm{I}_n)$.
Justifier que f n'a qu'un nombre fini de racines non nulles.

b) En déduire que A est limite d'une suite de matrices inversibles.

2. Soit $(\mathrm{A}_k)_k \in \mathbb{N}$ une suite de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_k^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}.$$

Montrer que A et B sont inversibles, en précisant A^{-1}.

Solution (**Ex.43** – *Limite et inverses*)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) P est un polynôme en x de degré n ($\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{A}}(-\mathrm{X})$), il n'admet qu'un nombre fini de racines, donc un nombre fini de racines non nulles.

b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{A} + \dfrac{1}{n}\mathrm{I}_n$.

Soit $r \overset{\text{déf.}}{=} \min\{|x| \,/ \mathrm{P}(x) = 0 \text{ et } x \neq 0\}$ si P admet des racines non nuls et $r \overset{\text{déf.}}{=} 1$ sinon.

Dès que $\dfrac{1}{n} < r$ (i.e $n > \dfrac{1}{r}$), A_n est inversible. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$. Donc A est limite d'une suite de matrices inversibles.

2. Par continuité du produit :
$\mathrm{AB} = \lim\limits_{k\to+\infty} (\mathrm{A}_k) \lim\limits_{k\to+\infty} (\mathrm{A}_k^{-1}) = \lim\limits_{k\to+\infty} (\mathrm{A}_k\mathrm{A}_k^{-1}) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$, donc A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

$\boxed{\textbf{Exercice 44}}$ *Exponentielle de matrices particulières*

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathrm{S}_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\mathrm{M}^j$.

On appelle *exponentielle de M*, si elle existe, la limite de la suite $(\mathrm{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, notée e^{M}.

1. Dans les cas suivants, montrer que e^{M} existe et la calculer :

a) $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, **b)** $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On suppose M diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}.$$

Montrer que e^{D} et e^{M} existent, et donner une relation entre elles.

3. Calculer e^{M} pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.44** – *Exponentielle de matrices particulières*)

1. Dans les cas suivants, montrer que e^{M} existe et la calculer :

a) $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b+abc+bc^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$,

et par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k = \begin{pmatrix} a^k & b\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}c^i \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^k & b\dfrac{a^k-c^k}{a-c} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a \neq c, \\ \begin{pmatrix} a^k & bka^{k-1} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a = c. \end{cases}$$

$\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{a^j}{j!} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \mathrm{e}^a$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{b^j}{j!} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \mathrm{e}^b$, donc :

- pour $a \neq c$, $\mathrm{S}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & \dfrac{b(\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^c)}{a-c} \\ 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$.
- pour $a = c$, $\mathrm{S}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & b\mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$.

b) $\mathrm{M}^2 = a^2\mathrm{I}_2$ donc, en posant $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}^{2k} = a^{2k}\mathrm{I}_2$ et $\mathrm{M}^{2k+1} = a^{2k+1}\mathrm{N}$.

$$\mathrm{S}_{2j} = \left(\sum_{i=0}^{j} \frac{a^{2i}}{(2i)!}\right)\mathrm{I}_2 + \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)\mathrm{N}$$

Or : $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{a^{2i}}{(2i)!} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{2}$, et : $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}{2}$

donc $\mathrm{S}_{2j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a} \\ \mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a} \end{pmatrix}$

Comme $\mathrm{S}_{2j+1} = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{a^{2i}}{(2i)!}\right)\mathrm{I}_2 + \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)\mathrm{N}$,

donc $\mathrm{S}_{2j+1} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a} \\ \mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a} \end{pmatrix}$

Finalement : $\mathrm{S}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a} \\ \mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a} \end{pmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$.

c) $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geqslant 3, \mathrm{M}^k = 0$.

La série n'a que trois termes non nuls, donc converge : $\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & a & b + \dfrac{ac}{2} \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On suppose M diagonalisable.
Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que
$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}.$$
En notant $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}^j = diag(\lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j)$.
Notons pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathrm{T}_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\mathrm{D}^j$.
Donc $\mathrm{T}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} diag(\exp(\lambda_1), \ldots, \exp(\lambda_n)) \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{D}}$.
Comme : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^j = \mathrm{PD}^j\mathrm{P}^{-1}$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{S}_k = \mathrm{PT}_k\mathrm{P}^{-1}$.
Donc : $\mathrm{S}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{Pe}^{\mathrm{D}}\mathrm{P}^{-1} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$.
Ainsi e^{D} et e^{M} existent, et $\mathrm{Pe}^{\mathrm{D}}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$.

3. On a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{M}^n = 2^{n-1}\mathrm{M}$.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{M}^k = \mathrm{I}_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}2^{k-1}\right)\mathrm{M} = \mathrm{I}_2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}2^k\right)\mathrm{M}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{M}^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{I}_2 + \frac{1}{2}(e^2 - 1)\mathrm{M} \text{ d'où } \exp(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^2 & 1 - \mathrm{e}^2 \\ 1 - \mathrm{e}^2 & 1 + \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 45 *Non-équivalence des normes en dimension infinie*
Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1\big([0\,;\,1], \mathbb{R}\big)$. Pour toute $f \in \mathrm{E}$, on pose :
$$||f||_1 \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t,\ ||f||_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{t \in [0\,;\,1]} |f(t)| \text{ et } \mathrm{N}(f) \overset{\text{déf.}}{=} |f(0)| + \sup_{t \in [0\,;\,1]} |f'(t)|.$$

1. Montrer que $||.||_1$, $||.||_\infty$ et N sont des normes sur E.

2. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$f_n : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n.$$
a) Montrer que $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge vers la fonction nulle pour la norme $||.||_1$.
b) En est-il de même pour $||.||_\infty$? Et pour N ?
c) Étudier, pour chacune de ces normes, si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Solution (**Ex.45** – *Non-équivalence des normes en dimension infinie*)
Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^2\big([0\,;\,1], \mathbb{R}\big)$. Pour toute $f \in \mathrm{E}$, on pose :

$$||f||_1 \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t,\ ||f||_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{t\in[\,0\,;\,1\,]} |f(t)| \text{ et } \mathrm{N}(f) \overset{\text{déf.}}{=} |f(0)| + \sup_{t\in[\,0\,;\,1\,]} |f'(t)|.$$

1. La vérification des axiomes des normes ne pose pas de problème pour ces 3 normes.

2. a) $||f_n - 0||_1 = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $||.||_1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n - 0||_\infty = 1$ donc f_n ne tend pas vers la fonction nulle pour $||.||_\infty$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{N}(f_n) = 0 + n = n$ donc f_n ne tend pas vers la fonction nulle pour N.

c) Pour $||.||_1$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n||_1 \leqslant 1$.
Pour $||.||_\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n||_\infty \leqslant 1$.
Pour N, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est bornée car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{N}(f_n) = +\infty$.

Exercice 46 *Exemple d'application lipschitzienne*

Soit $(a,b) \in [\,0\,;\,+\infty\,[^2$ 2 et

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (ax, by).$$

1. Montrer que f est lipschitzienne lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $||.||_1$.

2. En est-il de même pour $||.||_2$? Et pour $||.||_\infty$?

Solution (**Ex.46** – *Exemple d'application lipschitzienne*)

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.
$||f(x,y) - f(x',y')||_1 = \big|\big|\big(a(x-x'), b(y-y')\big)\big|\big|_1 = a\,|x-x'| + b\,|y-y'|$
Soit $k = \max(a,b)$.
$||f(x,y) - f(x',y')||_1 \leqslant k(|x-x'| + |y-y'|) \leqslant k\,||(x,y)-(x',y')||_1$
f est k-lipschitzienne lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $||.||_1$.

2. Oui, grâce à l'équivalence des normes de l'exercice *Comparaison des normes usuelles* :
$||f(x,y) - f(x',y')||_2 \leqslant ||f(x,y) - f(x',y')||_1 \leqslant k\,||(x,y)-(x',y')||_1 \leqslant k\sqrt{n}\,||(x,y) - (x$
$||f(x,y) - f(x',y')||_\infty \leqslant ||f(x,y) - f(x',y')||_1 \leqslant k\,||(x,y)-(x',y')||_1 \leqslant kn\,||(x,y) - (x',$

Exercice 47 « *Ceinture* » *d'un convexe*

Soit $\big(\mathrm{E}, ||.||\big)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie non vide de E.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose : $\quad d(x,\mathrm{A}) \overset{\text{déf.}}{=} \inf\limits_{a\in\mathrm{A}} ||x-a||$.

Soit $\mathrm{R} \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$ et : $\quad \mathcal{C}(\mathrm{A},\mathrm{R}) \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathrm{E}, d(x,\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}\}$.

1. a) Montrer que $d_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x,\mathrm{A})$ est 1-lipschitzienne.

b) En déduire que $\mathcal{C}(\mathrm{A},\mathrm{R})$ est une partie fermée de E.

2. On suppose de plus A convexe. Montrer que A est une partie convexe de E.

Solution (**Ex.47** – « *Ceinture* » *d'un convexe*)

1. a) Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et $z \in \mathrm{A}$.
$d(x, \mathrm{A}) \leqslant ||x - z|| = ||(x - y) + (y - z)|| \leqslant ||x - y|| + ||y - z||$
donc $d(x, \mathrm{A}) - ||x - y|| \leqslant ||y - z||$, ceci $\forall z \in \mathrm{A}$,
donc $d(x, \mathrm{A}) - ||x - y|| \leqslant d(y, \mathrm{A})$ d'où $d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A}) \leqslant ||x - y||$.
En permutant le rôle de x et y, $d(y, \mathrm{A}) - d(x, \mathrm{A}) \leqslant ||x - y||$.
Donc $|d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A})| \leqslant ||x - y||$, i.e. $|d_\mathrm{A}(x) - d_\mathrm{A}(y)| \leqslant ||x - y||$: d_A est 1-lipschitzienne.

b) $\mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) = \{x \in \mathrm{E}, d_\mathrm{A}(x) - \mathrm{R} \leqslant 0\}$, or d_A est 1-lipschitzienne donc continue. Donc $\mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$ est un fermé de E.

2. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{R})^2$ et $\lambda \in [\,0\,;\,1\,]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition de la borne inférieure :
$\exists x_n \in \mathrm{A}, d(x, x_n) \leqslant d(x, \mathrm{A}) + \dfrac{1}{n}$, $\exists y_n \in \mathrm{A}, d(x, y_n) \leqslant d(y, \mathrm{A}) + \dfrac{1}{n}$.
Par convexité de A : $z_n \overset{\text{déf.}}{=} \lambda x_n + (1 - \lambda) y_n \in \mathrm{A}$.
$d(\lambda x + (1 - \lambda) y, \mathrm{A}) \leqslant ||\lambda x + (1 - \lambda) y - z_n|| \leqslant ||\lambda(x - x_n) + (1 - \lambda)(y - y_n)|| \leqslant$
$\lambda\,||x - x_n|| + (1 - \lambda)\,||y - y_n|| \leqslant \lambda d(x, \mathrm{A}) + (1 - \lambda) d(y, \mathrm{A}) + \dfrac{2}{n} \leqslant \mathrm{R} + \dfrac{2}{n}$.
En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$: $d(\lambda x + (1 - \lambda) y, \mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}$.
Donc $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$.
Ainsi : $\forall (x, y) \in \mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{R})^2, \forall \lambda \in [\,0\,;\,1\,], \lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$.
$\mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$ est convexe.

Exercice 48 *Trois exemples de parties de* $\mathbb{R}^2$

Représenter les ensembles suivants en préciser s'ils sont ouverts ou fermés, bornés ou non bornés.

1. $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \geqslant 1\}$.

2. $\mathrm{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0 \text{ et } x + \sqrt{y} < 1\}$.

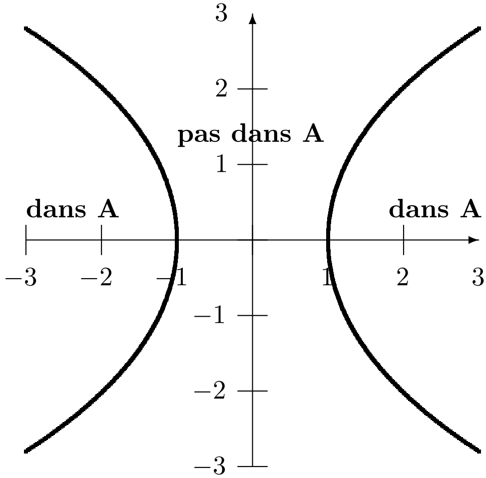
3. $\mathrm{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0 \text{ et } x + \exp y < 1\}$.

Solution (**Ex.48** – *Trois exemples de parties de* $\mathbb{R}^2$)

1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale donc continue. Par conséquent, A est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

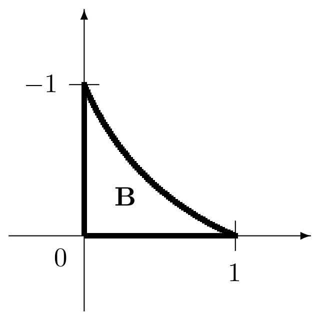
$$f(x, y) = 1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 1} \\ |x| \geqslant 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -\sqrt{x^2 - 1} \\ |x| \geqslant 1 \end{cases}.$$

Soit $g : \,]-\infty\,;\,-1\,] \cup [\,1\,;\,+\infty\,[\,, x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$. La frontière est constituée de la réunion des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_{-g}$. g est paire, l'étude sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ suffit.
g est dérivable sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ avec $g' : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ strictement positive. On pourra noter une tangente verticale en 1 à $\mathcal{C}_g$.



Comme $f(0,0) < 1$ et $f(\pm 2, 0) > 1$, A est l'ensemble des points situés entre (ou sur) $\mathcal{C}_{-g}$ et $\mathcal{C}_g$.
A n'est pas borné : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n,0) \in$ A, et $||(n,0)||_\infty = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

2. $\mathrm{B} = \big(\,]\,0\,;\,+\infty\,[\,\times\,]\,0\,;\,+\infty\,[\,\big) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + \sqrt{y} < 1\}$.
La fonction $f :]\,0\,;\,+\infty\,[\,\times\,]\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + \sqrt{y}$ est continue comme somme de $(x,y) \mapsto x$ (polynomiale, ou projection) et de la composée de $(x,y) \mapsto y$ (continue) par $\sqrt{.}$ (continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$). Par conséquent, B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in\,]\,0\,;\,1\,[\\ y = (1-x)^2 \end{cases}$.
Pour obtenir la frontière, on trace les segments $\big[(0,0);(0,1)\big]$ et $\big[(0,0);(1,0)\big]$ et la portion de parabole $y = (1-x)^2$ sur $]\,0\,;\,1\,[$:



Comme $f(1,1) > 1$, B est l'ensemble des points situés à l'intérieur de ce « triangle ».
B est borné : $(x,y) \in \mathrm{B} \Rightarrow \big(0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1\big) \Rightarrow ||(x,y)||_\infty < 1$ (ou

$||(x,y)||_1 < 2$, ou encore $||(x,y)||_2 < \sqrt{2}$.

3. Si $y > 0$ alors $\exp(y) > 1$ donc $\mathrm{C} = \emptyset$. Du coup C est ouvert, et fermé, et borné...

Exercice 49 $||.||_{1/2}$ *n'est pas une norme...*

Nous avons vu en cours que $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$, et plus généralement :

$$\text{pour tout } p \geqslant 1,\ ||.||_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$$

sont des normes.

On pose :

$$\mathrm{N} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2.$$

1. Montrer que N vérifie les axiomes de positivité, de séparation et d'homogénéité d'une norme.

2. Soit $\mathrm{F} \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mathrm{N}(x,y) \leqslant 1\}$.

a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (-x,y) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (x,-y) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (-x,-y) \in \mathrm{F}$$

Quelles symétries de F peut-on en déduire ?

b) Représenter F.

3. a) *Vrai ou faux ?* Toute boule fermée est convexe ?

b) En déduire que N n'est pas une norme.

4. a) Quel axiome d'une norme n'est pas vérifié par N ?

b) Donner deux points A et B de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) > \mathrm{N}(\mathrm{A}) + \mathrm{N}(\mathrm{B})$.

5. Soit $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\mathrm{N}_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$.

Montrer que N_p n'est pas une norme.

Solution (**Ex.49** – $||.||_{1/2}$ *n'est pas une norme...*)

1. Les axiomes de positivité, de séparation et d'homogénéité d'une norme se vérifie sans peine pour N.

2. Soit $\mathrm{F} \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mathrm{N}(x,y) \leqslant 1\}$.

a) $(x,y) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (-x,y) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (x,-y) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (-x,-y) \in \mathrm{F}$, car $|x| = |-x|$ et $|y| = |-y|$.

F est symétrique par rapport à l'axe des abscisses (symétrie $(x,y) \mapsto (x,-y)$, par rapport à l'axe des ordonnées (symétrie $(x,y) \mapsto (-x,y)$ et par rapport à l'origine $(0,0)$ (symétrie $(x,y) \mapsto (-x,-y)$.

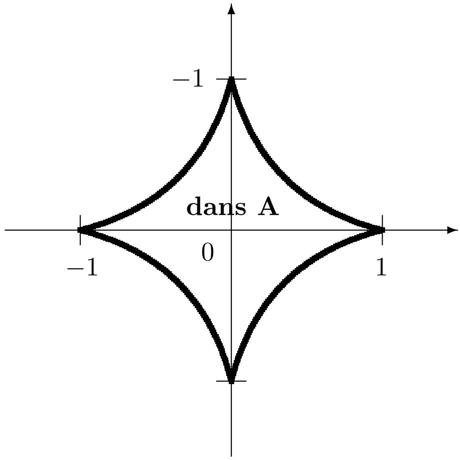
b) On représente $\mathrm{F} \cap \,]\,0\,;+\infty\,[^2$, puis on déduit les parties des autres quarts de plan par symétries.

Pour $(x,y) \in [\,0\,;+\infty\,[^2$,

$$\mathrm{N}(x,y) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2\sqrt{x} + 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

On représente la frontière en traçant la courbe de $f : x \mapsto x - 2\sqrt{x} + 1$ sur $[\,0\,;\,1\,]$. f est continue sur $[\,0\,;\,1\,]$, dérivable sur $]\,0\,;\,1\,]$ avec $f' : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

f est donc décroissante, avec une demi-tangente verticale en $(0,1)$ et horizontale en $(1,0)$.



3. a) Toute boule fermée est convexe, prouvé dans le cours.

b) Manifestement, F n'est pas convexe : $A = (1,0) \in F$, $B = (0,1) \in F$ et $N\Big(\dfrac{1}{2}(A+B)\Big) = N\Big(\dfrac{1}{2}(1,1)\Big) = 2 > 1$: le milieu du segment [AB] n'est pas dans F bien que A et B soient dans F.
Si N était une norme, F serait la boule unité fermée associée pour N, donc serait convexe : N n'est pas une norme.

4. a) N ne vérifie pas l'inégalité triangulaire, puisque qu'elle vérifie tous les autres axiomes sans être une norme.

b) Avec $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$, $N(A+B) = N((1,1)) = 4$ et $N(A) + N(B) = 1 + 1 = 2$...

5. Avec $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$, $N_p(A+B) = 2^{1/p}$ et $N_p(A) + N_p(B) = 2$, et comme $1/p > 1$, $N_p(A+B) > N_p(A) + N_p(B)$: N_p ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.

$\boxed{\textbf{Exercice 50}}$ *Maillage et quadrillage du plan*

Soit $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z} \text{ ou } y \in \mathbb{Z}\}$.

1. Représenter M. Justifier sa nature topologique (ouvert ou fermé).

2. Représenter Q. Justifier sa nature topologique (ouvert ou fermé).

3. Quelle est la nature topologique de $U = \displaystyle\bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \,]\,m\,;\,m+1\,[\, \times \,]\,n\,;\,n+1\,[$?

4. Quel lien existe entre Q et U ?

Solution (**Ex.50** – *Maillage et quadrillage du plan*)

1. M est le maillage constitué de tous les points à coordonnées entières : $\mathrm{M} = \mathbb{Z}^2$.
Tout revient à déterminer la nature de $\mathbb{Z}$... qui est fermé.
Attention ! On peut écrire $\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$ mais rien n'assure qu'une réunion infinie de fermés soit fermée.
Plein de méthodes ...
- *Racines d'une fonction continue* –
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi x)$. f est continue et $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$ est fermé, donc $\mathbb{Z}^2$ aussi.
- *Caractérisation séquentielle* –
Soit (u_n) une suite convergente de $\mathbb{Z}$, de limite ℓ. Alors, avec $\varepsilon = 1/4$ dans la définition de la limite,
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \ell - 1/4 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1/4.$$
Or $[\,\ell - 1/4\,;\,\ell + 1/4\,]$ ne contient qu'un entier : appelons-le m.
Alors : $\forall n \geqslant n_0, u_n \in [\,\ell - 1/4\,;\,\ell + 1/4\,] \cap \mathbb{Z} = \{m\}$, donc $\forall n \geqslant n_0, u_n = m$.
Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = m$, et par unicité de la limite, $\ell = m$, donc $\ell \in \mathbb{Z}$.
Ce qui prouve que $\mathbb{Z}$ est fermé.
- *Réunion et intersection* –
En revanche, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]\,n\,;\,n+1\,[$ est une réunion d'ouverts donc est ouverte.
Par complémentarité, $\mathbb{Z}$ est fermé

2. Q est le quadrillage constitué des droites horizontales et verticales du plan.
$\mathrm{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y \in \mathbb{Z}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\sin(\pi x) = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\sin(\pi y) = 0\}$.
Comme $(x,y) \mapsto \sin(\pi x)$ et $(x,y) \mapsto \sin(\pi y)$ sont continue sur $\mathbb{R}^2$, Q est la réunion de deux fermés donc est fermé.

3. $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,]\,m\,;\,m+1\,[\times]\,n\,;\,n+1\,[$ est ouvert. U est une réunion d'ouverts donc est ouvert.

4. Q et U sont complémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Dès lors, rien d'étonnant que U soit ouvert puisque Q est fermé, et réciproquement.

Exercice 51 *Une fonction lipschitzienne*

Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in \mathrm{E}$. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par
$$f(x) = ||x||\, a.$$

1. Montrer que f est lipschitzienne.

2. f est-elle continue ?

Solution (**Ex.51** – *Une fonction lipschitzienne*)

1. $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, ||f(x)-f(y)|| = ||\,||x||\,a - ||y||\,a|| = ||(||x||-||y||)a|| = \big|\,||x|| - ||y||\,\big| \times ||a||$
Or *pour toute norme* $\big|\,||x||-||y||\,\big| \leqslant ||x-y||$, donc
$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, ||f(x)-f(y)|| \leqslant ||a||\,||x-y||$ et f est $||a||$ −lipschitzienne.

2. Question de cours : toute fonction lipschitzienne est continue...

Exercice 52 *Deux normes équivalentes sur un espace de dimension infinie*

Dans $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1([\,0\,;\,1\,],\mathbb{R})$, on considère :

$$\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \nu : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que N et ν sont des normes sur E.

2. a) Pour $f \in \mathrm{E}$, quelle relation y a-t-il entre $f(0)$, $f(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$?

b) Montre que : $\forall f \in \mathrm{E}, \nu(f) \leqslant 2\mathrm{N}(f)$.

c) Établir une inégalité majorant $\mathrm{N}(f)$ à l'aide de $\nu(f)$.

Solution (**Ex.52** – *Deux normes équivalentes sur un espace de dimension infinie*)

1. • N et ν sont positives et homogènes par positivité et homogénéité de la valeur absolue, et positivité de l'intégrale.

• $\mathrm{N}(f) = 0$ (resp. $\nu(f) = 0$) entraîne $\begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ (resp. } f(1) = 0) \\ \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$ Or $|f'|$ est continue et positive, d'intégrale nulle sur $[\,0\,;\,1\,]$, donc f' est nulle sur $[\,0\,;\,1\,]$, donc f est constante sur $[\,0\,;\,1\,]$. Comme $f(0) = 0$ (resp. $f(1) = 0$), f est la fonction nulle de E. N et ν vérifient la séparation.

2. a) $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = \big[f(t)\big]_0^1 = f(1) - f(0)$

b) Soit $f \in \mathrm{E}$. De 2.a) je tire : $f(1) = f(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$ puis $|f(1)| \leqslant |f(1)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{N}(f)$

$\nu(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{N}(f) + \mathrm{N}(f) \leqslant 2\mathrm{N}(f)$

c) On raisonne de même avec : $|f(0)| \leqslant |f(1)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \nu(f)$ issue de 2.a).

On obtient : $\mathrm{N}(f) \leqslant 2\nu(f)$.

Commentaire : $\forall f \in \mathrm{E}, \dfrac{1}{2}\mathrm{N}(f) \leqslant \nu(f) \leqslant 2\mathrm{N}(f)$, on dit que N et ν sont équivalentes.

Exercice 53 *Deux normes non équivalentes sur un espace de dimension infinie*
Soit $\mathrm{E} = \mathcal{B}([1\,;\,+\infty[\,,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles bornées sur $[1\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que :
$$\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x\in[1\,;\,+\infty[} \frac{|f(x)|}{x}$$
est une norme sur E.

2. Justifier l'existence d'une constante C telle que :
$$\forall f \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{N}(f) \leqslant \mathrm{C}\,||f||_\infty.$$

3. a) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [1\,;\,+\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$.
Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n \in \mathrm{E}$, puis calculer $||f_n||_\infty$ et $\mathrm{N}(f_n)$.

b) Montrer qu'il n'existe aucune constante $\mathrm{D} > 0$ telle que :
$$\forall f \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{N}(f) \geqslant \mathrm{D}\,||f||_\infty.$$

Solution (**Ex.53** – *Deux normes non équivalentes sur un espace de dimension infinie*)

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{B}([1\,;\,+\infty[\,,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles bornées sur $[1\,;\,+\infty[$.

1. Soit $f, g \in \mathrm{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- N est positive.
- $\mathrm{N}(f) = 0 \Rightarrow \forall x \geqslant 1, |f(x)| = 0 \Rightarrow f = 0_\mathrm{E}$.
- $\forall x \geqslant 1, \dfrac{|\lambda f(x)|}{x} = |\lambda| \dfrac{|f(x)|}{x}$ avec $|\lambda| \geqslant 0$, donc $\mathrm{N}(\lambda f) = |\lambda|\,\mathrm{N}(f)$.
- $\forall x \geqslant 1, |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ donc $\dfrac{|f(x)+g(x)|}{x} \leqslant \dfrac{|f(x)|}{x} + \dfrac{|g(x)|}{x}$,

donc $\mathrm{N}(f+g) \leqslant \mathrm{N}(f) + \mathrm{N}(g)$.

2. Soit $f \in \mathrm{E}$. $\forall x \geqslant 1, \dfrac{|f(x)|}{x} \leqslant |f(x)|$ donc $\sup\limits_{x\geqslant 1} \dfrac{|f(x)|}{x} \leqslant \sup\limits_{x\geqslant 1} |f(x)|$ donc $\mathrm{N}(f) \leqslant ||f||_\infty$.

3. a) f_n est dérivable avec $f_n' : x \mapsto x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}$, donc f est strictement croissante sur $[1\,;\,n]$ puis strictement décroissante sur $[n\,;\,+\infty[$ avec $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$, $f(n) = n^n\mathrm{e}^{-n}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc $||f||_\infty = n^n \mathrm{e}^{-n}$.

Observons que, pour $n \geqslant 1 : \forall x \geqslant 1, \dfrac{|f(x)|}{x} = f_{n-1}(x)$, donc $\mathrm{N}(f_n) = ||f_{n-1}||_\infty = (n-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-n+1}$. De plus, $\mathrm{N}(f_0) = \mathrm{e}^{-1}$

b) Supposons qu'il existe une constante $\mathrm{D} > 0$ telle que :
$$\forall f \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{N}(f) \geqslant \mathrm{D}\,||f||_\infty.$$
$\dfrac{\mathrm{N}(f_n)}{||f_n||_\infty} = \dfrac{(n-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-n+1}}{n^n\mathrm{e}^{-n}} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{n}\mathrm{e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car le premier facteur est borné (entre 0 et 1... en fait il tend vers e^{-1} mais ça n'apporte rien).

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{\mathrm{N}(f_n)}{||f_n||_\infty} \geqslant \mathrm{D}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{N}(f_n)}{||f_n||_\infty} \geqslant \mathrm{D}$, donc $0 \geqslant \mathrm{D}$.

Exercice 54 *Caractérisation des limites de puissances d'une matrice*

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$. Montrer que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$.

2. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$.

3. Qu'a-t-on démontré ?

Solution (**Ex.54** – *Caractérisation des limites de puissances d'une matrice*)

1. $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$ entraîne (suite extraite) $\mathrm{A}^{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$. Mais $\mathrm{A}^{2k} = (\mathrm{A}^k)^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}^2$ par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite : $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$.

2. Avec $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, on a par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{A}^k = \mathrm{B}$, donc $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$.

3. Une matrice B est limite de la suite des puissances d'une matrice si, et seulement si, $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$.

Exercice 55 *Une caractérisation de l'adhérence*

Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide E. On rappelle que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, la distance de x à A, est définie par $d(x, \mathrm{A}) = \inf\limits_{y\in\mathrm{A}} ||x - y||$.

Montrer que :

$$d(x, \mathrm{A}) = 0 \iff x \in \overline{\mathrm{A}}.$$

Solution (**Ex.55** – *Une caractérisation de l'adhérence*)

• Supposons : $d(x, \mathrm{A}) = 0$. Alors : $\inf\limits_{y\in\mathrm{A}} ||x - y|| = 0$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in \mathrm{A}, ||x - y_n|| \leqslant \dfrac{1}{n}$ (sinon, j'aurais $\inf\limits_{y\in\mathrm{A}} ||x - y|| \geqslant \dfrac{1}{n}$!)

J'ai alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n \in \mathrm{A}$ et $||x - y_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (y_n) est une suite convergente d'éléments de A, de limite x, donc $x \in \overline{\mathrm{A}}$.

• Supposons : $x \in \overline{\mathrm{A}}$. Alors par la caractérisation séquentielle, il existe une suite (y_n) d'éléments de A convergeant vers x.

Puisque que : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in \mathrm{A}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, ||x - y_n|| \geqslant \inf\limits_{y\in\mathrm{A}} ||x - y||$.

Or $||x - y_n|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par prolongement des inégalités larges, $0 \geqslant \inf\limits_{y\in\mathrm{A}} ||x - y||$.

Et puisque $\inf\limits_{y\in\mathrm{A}} ||x - y|| \geqslant 0$, on a : $\inf\limits_{y\in\mathrm{A}} ||x - y|| = 0$, donc $d(x, \mathrm{A}) = 0$.

Exercice 56 *Un exemple de fonction non continue*

Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} ||x-a|| & \text{si } ||x|| \leqslant ||a|| \\ 0 & \text{si } ||x|| > ||a|| \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en a.

2. Montrer que f n'est pas continue en $-a$.

Solution (**Ex.56** – *Un exemple de fonction non continue*)

1. Notons que $f(a) = 0$. Soit $x \in \mathrm{E}$.

$$|f(x) - f(a)| = \left|f(x)\right| = \left.\begin{cases} ||x-a|| & \text{si } ||x|| \leqslant ||a|| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right\} \leqslant ||x-a||$$

Par encadrement : $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, f est continue en a.

2. *Petite analyse... en vue d'une idée...*

On peut faire un petit dessin : pour les points x dans $\overline{\mathrm{B}}(0, ||a||)$, $f(x)$ est la distance de x à a. Dès qu'un point sort de cette boule, $f(x) = 0$... au voisinage de $-a$, $f(x) \simeq 2\,||a||$ pour les points dans la boule, et$f(x) = 0$ pour les points extérieurs. Enfin, $f(-a) = 2\,||a||$.

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = -\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a$... extérieurs à la boule, tendant vers $-a$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||x_n|| = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) ||a|| > ||a||$ donc $f(x_n) = 0$, donc $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||x_n - (-a)|| = \dfrac{1}{n}\,||a|| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -a$.

Finalement : $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -a$ et $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \neq f(-a) = 2\,||a||$. f n'est pas continue en $-a$.

Exercice 57 *Un ouvert dans un espace de fonctions*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$. On se propose de démontrer que

$$\mathrm{U} = \left\{f \in \mathrm{E} / \forall x \in [\,0\,;\,1\,]\,, f(x) > 0\right\}$$

est un ouvert de E.

1. *Première méthode –*

a) Soit $f \in \mathrm{E}$. Justifier : $\exists a \in [\,0\,;\,1\,]\,, \forall x \in [\,0\,;\,1\,]\,, f(x) \geqslant f(a)$.

b) Soit $f \in \mathrm{U}$ et a défini comme précédemment. On pose $m = f(a)$. Montrer que $\mathrm{B}(f, m)$ n'est pas vide et que $\mathrm{B}(f, m) \subset \mathrm{U}$.

c) Qu'a-t-on démontré ?

2. *Seconde méthode –*

On définit la fonction φ par :

$$\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto \min_{x\in[\,0\,;\,1\,]} \{f(x)\}.$$

a) Justifier que φ est correctement définie.
b) Montrer que φ est continue sur E.
c) Justifier que U est un ouvert de E.

Solution (**Ex.57** – *Un ouvert dans un espace de fonctions*)

1. *Première méthode* –

a) f est continue sur le segment $[\,0\,;\,1\,]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure : $\exists a \in [\,0\,;\,1\,], \forall x \in [\,0\,;\,1\,], f(x) \geqslant f(a)$.

b) Comme $f > 0$, $m > 0$. Donc $\mathrm{B}(f, m)$ n'est pas vide.
Soit $g \in \mathrm{B}(f, m)$. $||g - f||_\infty < m$ donc :
$\forall x \in [\,0\,;\,1\,], |g(x) - f(x)| < m$, donc $g(x) > f(x) - m$, donc $g(x) > 0$ par définition de m.
Ainsi, $g \in \mathrm{U}$. Donc $\mathrm{B}(f, m) \subset \mathrm{U}$.

c) On a démontré : $\forall f \in \mathrm{U}, \exists m > 0, \mathrm{B}(f, m) \subset \mathrm{U}$. C'est-à-dire : U est un ouvert.

2. *Seconde méthode* –

a) Pour tout $f \in \mathrm{E}$, f est continue sur le segment $[\,0\,;\,1\,]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure, donc $\min\limits_{x\in[\,0\,;\,1\,]} \{f(x)\}$ existe : φ est correctement définie.

b) Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrons que φ est continue en f.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in \mathrm{E}$ tel que $||f - g||_\infty \leqslant \varepsilon$.
Alors : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,], \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$.
Donc : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,], \quad f(x) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$.
On en tire :
$\forall x \in [\,0\,;\,1\,], g(x) \geqslant \min f - \varepsilon$, donc $\min g \geqslant \min f - \varepsilon$, i.e. $\varphi(f) - \varphi(g) \leqslant \varepsilon$,
et aussi :
$\forall x \in [\,0\,;\,1\,], f(x) + \varepsilon \geqslant \min g$, donc $\min f + \varepsilon \geqslant \min g$, i.e. $\varphi(g) - \varphi(f) \leqslant \varepsilon$.
Ainsi : $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leqslant \varepsilon$.
Donc φ est continue en f. Et comme f est quelconque dans E, φ est continue sur E.

c) $\mathrm{U} = \big\{f \in \mathrm{E} / \forall x \in [\,0\,;\,1\,], f(x) > 0\big\} = \big\{f \in \mathrm{E} / \varphi(f) > 0\big\}$ avec φ continue sur E, donc U est un ouvert de E.

$\boxed{\textbf{Exercice 58}}$ *Un fermé dans un espace de fonctions*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$. On se propose de démontrer que

$$\mathrm{F} = \big\{f \in \mathrm{E} / \forall x \in [\,0\,;\,1\,], f(x) \geqslant 0\big\}$$

est un fermé de E.

1. *Première méthode* –

a) Soit (f_n) une suite de fonctions de F convergente, de limite f. Montrer que $f \in \mathrm{F}$.

b) Conclure.

2. *Seconde méthode –*
On définit la fonction φ par :

$$\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto \min_{x\in[\,0\,;\,1\,]} \{f(x)\}.$$

a) Justifier que φ est correctement définie.
b) Montrer que φ est continue sur E.
c) Justifier que F est un fermé de E.

Solution (**Ex.58 –** *Un fermé dans un espace de fonctions*)

1. *Première méthode –*

a) Soit (f_n) une suite de fonctions de F convergente, de limite f. Montrer que $f \in \mathrm{F}$. On a : $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la suite f_n converge uniformément donc simplement vers f.
Soit $x \in [\,0\,;\,1\,]$. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Or : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geqslant 0$ car $f_n \in \mathrm{F}$. Par prolongement des inégalités larges à la limite : $f(x) \geqslant 0$.
Ainsi : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,], f(x) \geqslant 0$, donc $f \in \mathrm{F}$.

b) Toute suite convergente de F a sa limite dans F : F est fermé d'après la caractérisation séquentielle des fermés.

2. *Seconde méthode –*

a) Pour tout $f \in \mathrm{E}$, f est continue sur le segment $[\,0\,;\,1\,]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure, donc $\min\limits_{x\in[\,0\,;\,1\,]} \{f(x)\}$ existe : φ est correctement définie.

b) Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrons que φ est continue en f.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in \mathrm{E}$ tel que $||f - g||_\infty \leqslant \varepsilon$.
Alors : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,], \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$.
Donc : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,], \quad f(x) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$.
On en tire :
$\forall x \in [\,0\,;\,1\,], g(x) \geqslant \min f - \varepsilon$, donc $\min g \geqslant \min f - \varepsilon$, i.e. $\varphi(f) - \varphi(g) \leqslant \varepsilon$,
et aussi :
$\forall x \in [\,0\,;\,1\,], f(x) + \varepsilon \geqslant \min g$, donc $\min f + \varepsilon \geqslant \min g$, i.e. $\varphi(g) - \varphi(f) \leqslant \varepsilon$.
Ainsi : $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leqslant \varepsilon$.
Donc φ est continue en f. Et comme f est quelconque dans E, φ est continue sur E.

c) $\mathrm{F} = \big\{f \in \mathrm{E}/\forall x \in [\,0\,;\,1\,], f(x) \geqslant 0\big\} = \big\{f \in \mathrm{E}/\varphi(f) \geqslant 0\big\}$ avec φ continue sur E, donc F est un fermé de E.

Chapitre 4

Réduction et diagonalisation

Exercice 59 *Exemple de projecteurs*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 3 à coefficients réels.

1. Montrer que

$$\varphi : E \longrightarrow E,\ P \longmapsto \frac{P(X) + P(-X)}{2}$$

est un projecteur de E.

2. En déduire que $\mathcal{I} = \{P \in E, P(-X) = -P(X)\}$ et $\mathcal{P} = \{P \in E, P(-X) = P(X)\}$ sont deux sous-espaces supplémentaires.

3. Déterminer $M = mat_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi)$ et calculer M^2. Observer.

4. Montrer que $\psi = id_E - \varphi$ est un projecteur.

Solution (**Ex.59** – *Exemple de projecteurs*)

1. • On vérifie sans peine que φ est un endomorphisme de E.

• Pour tout P, $\varphi \circ \varphi(P) = \varphi\left(\dfrac{P(X) + P(-X)}{2}\right) =$

$$\frac{\left(\dfrac{P(X) + P(-X)}{2} + \dfrac{P(-X) + P(-(-X))}{2}\right)}{2} = \frac{P(X) + P(-X)}{2} = \varphi(P)$$

$\varphi \circ \varphi = \varphi$ donc φ est un projecteur.

2. $\mathcal{I} = \mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathcal{P} = \{P \in E, \varphi(P) = P\} = \mathrm{Im}\varphi$ donc $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

3. $M = mat_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^2 = M$... normal : $\varphi^2 = \varphi$.

4. • Première option : on explicite ψ.
$\psi(P) = P - \varphi(P) = \dfrac{P(X) - P(-X)}{2}$ et on raisonne comme en 1.
• Seconde option : id_E et φ sont des endomorphismes donc ψ aussi. De plus, $\psi \circ \psi = (id_E - \varphi) \circ (id_E - \varphi) = id_E - \varphi - \varphi + \varphi^2 = id_E - \varphi = \psi$ puisque $\varphi^2 = \varphi$.

Exercice 60 *Exemple de réduction d'endomorphismes*
Soit $E = \mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.60** – *Exemple de réduction d'endomorphismes*)

1. $\chi_A = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-2)(X-1)(X+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 1, 2\}$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}((-2,1,2))$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.

2. $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.

3. $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f non-diagonalisable.
Remarque : même polynôme caractéristique pour 2. & 3.

4. $\chi_A = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$, f non-diagonalisable.

$\boxed{\textbf{Exercice 61}}$ *Dans un espace de polynômes*

$E = \mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus 2.

Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme défini par :

$$Q(X) = P(X+1) + XP'(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

4. a) Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?

b) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E formée de vecteurs propres de f.

c) Quelles sont les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{C}$.

5. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$P(X+1) + XP'(X) = X^2 + X + 1.$$

Solution (**Ex.61** – *Dans un espace de polynômes*)

1. Pas de problème pour la linéarité.

2. $M = mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

3. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

4. a) $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(M) = \{1;2;3\}$ puisque M est triangulaire. $f \in \mathcal{L}(E)$ et $card(\mathrm{Sp}(f)) = 3 = \dim(E)$ donc f est diagonalisable.

b) La résolution de $f(P) = \lambda P$ donne : $E_1 = \mathrm{Vect}(1)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(X+1)$ et $E_3 = \mathrm{Vect}(2X^2 + 4X + 3)$. $\mathcal{C} = (1, X+1, 2X^2+4X+3)$ convient.

c) En raisonnant sur les coefficients par degrés décroissants :

$X^2 + X + 1 = \dfrac{1}{2}(2X^2 + 4X + 3) - (X+1) + \dfrac{1}{2} \times 1$, les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans $\mathcal{C}$ sont $(1/2, -1, 1/2)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 62}}$ *Trouvez le bon argument !*

Soit

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme.

2. f est-il diagonalisable ?

Solution (**Ex.62** – *Trouvez le bon argument !*)

1. $\forall(a,b,c,d,e,f,g,h,\lambda) \in \mathbb{R}^9$,
$f\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a+e & \lambda b+f \\ \lambda c+g & \lambda d+h \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} \lambda d+h & -\lambda c-g \\ -\lambda b-f & \lambda a+e \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$
f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. $\forall(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $f \circ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donc $f^2 = f$.
f est un projecteur, donc f est diagonalisable...

$\boxed{\textbf{Exercice 63}}$ *Trigonalisation et suites imbriquées*

Soit

- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont semblables, et expliciter une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 0 » et des « 1 » telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

2. Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$

Solution (**Ex.63** – *Trigonalisation et suites imbriquées*)

1. $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^3 - 5\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X} - 4 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable.
$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la résolution de $\mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne, avec $(x,y,z) \in \{0,1\}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

2. Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$

Posons pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Le système imposé équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.

Or : $X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow X_{n+1} = PBP^{-1}X_n \Leftrightarrow P^{-1}X_{n+1} = BP^{-1}X_n$.

Posons $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = BY_n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = 2b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2c_n \end{cases}$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0, c_n = 2^n c_0$ et $b_{n+1} = 2b_n + 2^n c_0$

On remarque que $b_1 = 2b_0 + c_0$,

$b_2 = 2(2b_0 + c_0) + 2c_0 = 4b_0 + 6c_0 = 2(2b_0 + 2c_0)$,

$b_3 = 2(4b_0 + 6c_0) + 4c_0 = 4(2b_0 + 3c_0)$...

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2^{n-1}(2b_0 + nc_0)$.

- Cette propriété est vraie au rang 0 : $b_0 = b_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $b_n = 2^{n-1}(2b_0 + nc_0)$. Alors :

$b_{n+1} = 2b_n + 2^n c_0 = 2^n(2b_0 + nc_0) + 2^n c_0 = 2^n\big(2b_0 + (n+1)c_0\big)$. La propriété est héréditaire.

- Par récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2^{n-1}(2b_0 + nc_0)$.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = X_n = PY_n = \begin{pmatrix} b_n + c_n \\ a_n + b_n + c_n \\ a_0 + c_n \end{pmatrix}$.

Si l'on souhaite expliciter a_0, b_0 et c_0, il suffit de résoudre :

$$Y_0 = P^{-1}X_0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -x_0 + y_0 \\ b_0 = y_0 - z_0 \\ c_0 = x_0 - y_0 + z_0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 64}}$ *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{M} \mapsto -\mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme.

2. Déterminer les éléments propres de f. f est-il diagonalisable ?

Solution (**Ex.64** – *Un endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

1. $\forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \forall \lambda \in \mathrm{C}$, $f(\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N}) = -(\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N}) + \mathrm{tr}(\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N})\mathrm{I}_n = -\lambda\mathrm{M} - \mathrm{N} + \big(\lambda\mathrm{tr}(\mathrm{M}) + \mathrm{tr}(\mathrm{N})\big)\mathrm{I}_n = \lambda f(\mathrm{M}) + f(\mathrm{N})$.
Donc $f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)$.

2. • Analyse.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $f(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M}$.
$f(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \Rightarrow -\mathrm{M}\mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n = \lambda\mathrm{M} \Rightarrow (\lambda + 1)\mathrm{M} = \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$.
1^{er} cas : $\lambda = -1$.
Alors : $f(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$.
$2^{\text{ème}}$ cas : $\lambda \neq -1$.
Alors : $f(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{tr}(\mathrm{M})}{\lambda + 1}\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.
Supposons donc que $\mathrm{M} = k\mathrm{I}_n$ avec $k \in \mathbb{C}$. Alors :
$f(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \Leftrightarrow k\mathrm{I}_n = \dfrac{kn}{\lambda + 1}\mathrm{I}_n \Leftrightarrow \lambda + 1 = n \Leftrightarrow \lambda = n - 1$.
• Synthèse.
L'analyse précedente montre que -1 et $n - 1$ sont les deux seules valeurs propres possibles de f, et même plus précisément :
(i) $f(\mathrm{M}) = -\mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \neq \{0\}$, -1 est bien valeur propre de f et $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
(ii) $f(\mathrm{M}) = (n-1)\mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Comme $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n) \neq \{0\}$, -1 est bien valeur propre de f et $\mathrm{E}_{n-1} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.
f est-il diagonalisable ?
Nous avons :
• $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, n - 1\}$;
• $\dim(\mathrm{E}_{-1}) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = n^2 - \mathrm{rg}(\mathrm{tr})$ par la formule du rang appliquée à la forme linéaire $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Or tr n'est pas la forme linéaire nulle donc $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) \geqslant 1$. Mais $\dim \mathrm{C} = 1$ donc $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) \leqslant 1$. D'où $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = 1$.
Donc $\dim(\mathrm{E}_{-1}) = n^2 - 1$.
• $\dim(\mathrm{E}_{n-1}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)) = 1$.
• Enfin $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2 = \dim \mathrm{E}_{-1} + \dim \mathrm{E}_{n-1}$...
... donc f est diagonalisable.
Reliquat : $\chi_f = (\mathrm{X} + 1)^{n^2-1}(\mathrm{X} - n + 1)$.

Exercice 65 *Caractérisation de certains projecteurs*

Soit E un espace vectoriel de dimension de $n \geqslant 2$.

1. À quelle condition *sine qua non* un endomorphisme de E est-il un projecteur ?

2. Rappeler pourquoi tout projecteur est diagonalisable.

3. Soit f un endomorphisme de E tel que
$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{rg}(f) = 1.$$
Montrer que f est un projecteur.

Solution (**Ex.65** – *Caractérisation de certains projecteurs*)

1. $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur si, et seulement si, $f^2 = f$.

2. Soit f un projecteur non nul et distinct de id_{E}.
Alors $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}$, $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Ker}f$, $\mathrm{E}_1 = \{u \in \mathrm{E}, f(u) = u\} = \mathrm{Im}f$. Et comme pour tout projecteur f de E Ker$f$ et Imf sont supplémentaires, f est diagonalisable.

3. Soit f un endomorphisme de E tel que
$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{rg}(f) = 1.$$
Montrer que f est un projecteur.
Comme $\mathrm{rg}(f) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1 \geqslant 1$ par la formule du rang. Donc 0 est valeur propre de f et $\dim \mathrm{E}_0 = n-1$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en complétant une base de Ker$f$ par un vecteur n'appartenant pas à Ker$f$.
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}.$$
Comme $\mathrm{tr}(f) = 1 = \mathrm{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$, $\alpha = 1$. Alors comme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc 1 est valeur propre de f, et il n'y a pas d'autre valeurs propres que 0 et 1.
Enfin, $\dim \mathrm{E}_0 + \dim \mathrm{E}_1 \geqslant (n-1) + 1 \geqslant n$, mais comme E_0 et E_1 sont en somme directe, $\dim \mathrm{E}_0 + \dim \mathrm{E}_1 \leqslant \dim \mathrm{E} \leqslant n$. Ainsi, $\dim \mathrm{E}_0 + \dim \mathrm{E}_1 = n = \dim \mathrm{E}$, f est diagonalisable, et il existe une base $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = diag(0, \dots, 0, 1)$.
Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f^2) = diag(0, \dots, 0, 1)^2 = diag(0, \dots, 0, 1) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$. Donc $f^2 = f$ et f est un projecteur ... de E sur la droite Imf ... paralèllement à l'hyperplan Ker$f$.

Exercice 66 *Similitude et transposition*

1. Montrer que toute matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à ${}^t\mathrm{A}$.

3. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

Solution (**Ex.66** – *Similitude et transposition*)

1. Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme le déterminant est invariant par transposition, $\chi_{{}^t\mathrm{A}} = \det({}^t\mathrm{A} - \mathrm{XI}_n) = \det({}^t(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_n)) = \det(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_n) = \chi_\mathrm{A}$.
Donc A et ${}^t\mathrm{A}$ on exactement les mêmes valeurs propres : $\mathrm{Sp}({}^t\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.
$\dim(\mathrm{SEP}({}^t\mathrm{A}, \lambda) = n - \mathrm{rg}({}^t\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n) = n - \mathrm{rg}({}^t(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n)) = n - \mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n)$ (le rang est invariant par transposition aussi),
$\dim(\mathrm{SEP}({}^t\mathrm{A}, \lambda) = \dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{A}, \lambda)$.
Puisque A est diagonalisable, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de ${}^t\mathrm{A}$ vaut n, donc ${}^t\mathrm{A}$ est diagonalisable, et semblable à une même matrice diagonale D que A puisqu'elle a les mêmes valeurs propres avec les mêmes dimensions des sous-espaces propres associés. Il existe P et Q inversibles telles que : $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{Q}^{-1}\,{}^t\mathrm{AQ}$, donc
${}^t\mathrm{A} = \left(\mathrm{QP}^{-1}\right)\mathrm{A}\left(\mathrm{QP}^{-1}\right)^{-1}$... ${}^t\mathrm{A}$ et A sont semblables.

2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à ${}^t\mathrm{A}$.

Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$\mathrm{PA} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{P} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$

Avec $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, P est inversible et $\mathrm{PA} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{P}$ donc $\mathrm{A}^\mathrm{T} = \mathrm{PAP}^{-1}$.

Remarques :

- observons l'effet des multiplications par P :

$\mathrm{P} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$: permutation des deux lignes,

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \mathrm{P} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$: permutation des deux colonnes.

- En particulier, $\mathrm{P}^2 = \mathrm{I}_2$ donc $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^\mathrm{T}$...
- $\mathrm{A} \xrightarrow[\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{C}_1 \leftrightarrow \mathrm{C}_2]{} \mathrm{A}^\mathrm{T}$...

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- 1^{er} cas : A est diagonalisable.

Alors A est semblable à A^T par 1.

- $2^{\text{ème}}$ cas : A n'est pas diagonalisable.

Alors A ne possède qu'une seule valeur propre λ et est trigonalisable :

$\exists Q \in GL_2(\mathbb{C}), \quad A = Q\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}Q^{-1}$. Notons $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Avec la matrice P de 2., j'ai : $PTP^{-1} = P^T T (P^{-1})^T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} = T^T$.

Ainsi :
$A^T = \left(QTQ^{-1}\right)^T = \left(Q^{-1}\right)^T T^T Q^T = \left(Q^{-1}\right)^T (P^{-1})^T T P^T Q^T$
$A^T = \left(Q^{-1}\right)^T (P^{-1})^T Q^{-1} A Q P^T Q^T = \left(Q^T\right)^{-1} (P^T)^{-1} Q^{-1} A Q P^T Q^T$
$A^T = \left(QP^T Q^T\right)^{-1} A Q P^T Q^T$
Donc A et A^T sont semblables.

Exercice 67 *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice A_n définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \text{ ou } j = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Étudier la diagonalisabilité de A_2 en précisant ses éléments propres.

2. Même question pour A_3.

3. Même question pour A_n avec $n \geqslant 4$.

Solution (**Ex.67** – *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

1. A_2 est diagonalisable avec $P^{-1}A_2P = D$ pour
$P = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & -\sqrt{5}-1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(-\sqrt{5}+1)}{2} \end{pmatrix}$.

2. A_3 est diagonalisable avec $P^{-1}A_3P = D$ pour
$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. • $\operatorname{rg}(A_n) = 2$ donc 0 est valeur propre avec $\operatorname{SEP}(A_n, 0) = \operatorname{Ker}(A_n) = \operatorname{Vect}(E_1 - E_2, E_1 - E_3, \dots, E_1 - E_{n-1})$ où E_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Pour $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{A}_n\mathrm{U} = \lambda\mathrm{U} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1\,;\,n-1]\!]\,, x_i = \lambda x_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1\,;\,n-1]\!]\,, x_i = \lambda x_n \\ (\lambda^2 - \lambda - (n-1))x_n = 0 \end{cases}$$

Le système possède des solutions non nulles si, et seulement si, $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$.
$\Delta = 4n - 3 > 0$, $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$.
Donc A_n possède deux autres valeurs propres :
$\lambda_1 = \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$.
Comme $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, 0) = n-2$, on a nécessairement $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, \lambda_1) = \dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, \lambda_2$
1 et A_n est diagonalisable.

Pour aller jusqu'au bout, pour $i \in \{1, 2\}$, $\mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, \lambda_i) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\boxed{\textbf{Exercice 68}}$ *Commutants et racines carrées dans un cas particulier*

Dans cet exercice, n désigne un entier au moins égal à 2.
Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *commutant de M* noté $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathrm{M}) \overset{\text{déf.}}{=} \{\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{MN} = \mathrm{NM}\}.$$

On suppose que A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) possédant exactement n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n$.
On note D la matrice $diag(\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n)$ et P une matrice inversible telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R})$ et $\Delta = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$.

1. $1^{\text{ère}}$ *approche.*

a) On suppose que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B et justifier que Δ est diagonale.

b) On suppose que Δ est diagonale. Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

c) En déduire que : $\quad \mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}, \Delta \text{ diagonale}\}$.
Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(\mathrm{A})$? En donner une base (on pourra s'appuyer sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

2. $2^{ème}$ *approche.*
Montrer que : $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \Leftrightarrow \mathrm{D}\Delta = \Delta\mathrm{D} \Leftrightarrow$($\Delta$ est diagonale). Conclure.

3. *Une description plus directe de $\mathcal{C}(\mathrm{A})$.*
a) Montrer que $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^n, \mathrm{Q} \mapsto \big(\mathrm{Q}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{Q}(\lambda_n)\big)$ est un isomorphisme.
b) On suppose que A et B commutent et on note $a_1, \ldots, a_n$ les coefficients diagonaux de Δ. Justifier qu'il existe un polynôme Q tel que $\Delta = \mathrm{Q}(\mathrm{D})$.
c) Montrer que :

$$\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{Q}(\mathrm{A}), \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}).$$

On notera que cette seconde description de $\mathcal{C}(\mathrm{A})$ évite de recourir à une matrice de passage particulière.

4. *Racines carrées de A*
On qualifie de *racine carrée* d'une $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice N vérifiant $\mathrm{N}^2 = \mathrm{M}$.
a) À l'aide de 2., montrer que si R est une racine carrée de D, alors R est diagonale.
b) En déduire les racines carrées de D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis de celles de A.

5. *Application*
Rechercher le commutant, puis les racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution (**Ex.68** – *Commutants et racines carrées dans un cas particulier*)

1. $1^{ère}$ *approche.*
a) Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{SEP}(\mathrm{A}, \lambda)$ avec $\mathrm{X} \neq 0$. Comme $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A}, \lambda) = 1$, $\mathrm{SEP}(\mathrm{A}, \lambda) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X})$.
$\mathrm{ABX} = \mathrm{BAX} = \mathrm{B}\lambda\mathrm{X} = \lambda\mathrm{BX} \Rightarrow \mathrm{BX} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{X}) \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, \mathrm{BX} = \mu\mathrm{X}$.
P est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A, donc des vecteurs propres de B, donc $\Delta = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ est diagonale.
b) Δ diagonale $\Rightarrow \mathrm{D}\Delta = \Delta\mathrm{D} \Rightarrow \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} \Rightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.
c) $\mathrm{B} \in \mathcal{C}(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \Delta$*diagonale* et comme $\mathrm{B} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$, $\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}, \Delta \text{ diagonale}\}$
Comme (Δ diagonale)$\Leftrightarrow$ $(\Delta \in \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_{i,i}, 1 \leqslant i \leqslant n), \mathcal{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}((\mathrm{PE}_{i,i}\mathrm{P}^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n))$.
$(\mathrm{PE}_{i,i}\mathrm{P}^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n)$ étant libre, $\dim \mathcal{C}(\mathrm{A}) = n$.

2. $2^{ème}$ *approche.*
$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \Leftrightarrow \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{D}\Delta = \Delta\mathrm{D}$
En notant $\delta_{i,j}$ les coefficients de Δ : $\mathrm{D}\Delta = (\lambda_i\delta_{i,j})$ et $\Delta\mathrm{D} = (\lambda_j\delta i, j)$.

$D\Delta = \Delta D \Leftrightarrow \forall i, j, \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j \delta_{i,j} \Leftrightarrow \forall i, j, (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \forall i \neq j, \delta_{i,j} = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$. Donc $D\Delta = \Delta D \Leftrightarrow$($\Delta$ est diagonale).
Même conclusion qu'en 1.c)

3. *Une description plus directe de $\mathcal{C}(A)$.*

a) $\varphi(Q) = 0 \Rightarrow Q$ possède n racines distinctes$\Rightarrow Q = 0$: $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$. φ est injective. Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{R}^n$, φ est un isomorphisme.

b) Par surjectivité de φ, il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i, Q(\lambda_i) = a_i$. Alors $Q(D) = Q(diag(\lambda_i)) = diag(Q(\lambda_i)) = diag(a_i) = \Delta$.

c) Par 1.2, $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], Q(A) \in \mathcal{C}(A)$.
Par 2.3.b, $B \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P^{-1}BP = Q(P^{-1}AP)$, et comme $Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$, $B = Q(A)$.
Finalement, $\mathcal{C}(A) = \{Q(A), Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}) = \mathrm{Vect}(A^k, k \in [\![0\,;\,n-1]\!])$.

4. *Racines carrées de A*

a) $RD = RR^2 = R^3 = R^2R = DR$ donc R et D commutent, et par 2., R est alors diagonale.

b) En notant $R = diag(\rho_1, \ldots, \rho_n)$,

$$R^2 = D \Leftrightarrow diag(\rho_1^2, \ldots, \rho_n^2) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1^2 = \lambda_1 \\ \vdots \\ \rho_n^2 = \lambda_n \end{cases}$$

• Dans $\mathbb{C}$, tout nombre non nul λ_k a exactement deux racines carrées, et 0 admet uniquement 0 pour racine.
Donc D a exactement 2^n racines carrées si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et exactement 2^{n-1} racines carrées si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.
Soit $\mathcal{R}(D)$ l'ensemble des racines de D.
(i) si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, en notant ρ_k une racine carrée de λ_k pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, alors :
$\mathcal{R}(D) = \left\{diag(\varepsilon_1\rho_1, \ldots, \varepsilon_n\rho_n)/\forall k \in [\![1\,;\,n]\!], \varepsilon_k \in \{-1, 1\}\right\}$
(ii) si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, en supposant $\lambda_n = 0$ et en notant ρ_k une racine carrée de λ_k pour tout $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, alors :
$\mathcal{R}(D) = \left\{diag(\varepsilon_1\rho_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\rho_{n-1}, 0)/\forall k \in [\![1\,;\,n-1]\!], \varepsilon_k \in \{-1, 1\}\right\}$
• Dans $\mathbb{R}$,
(i) si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors la description de $\mathcal{R}(D)$ est la même que dans $\mathbb{C}$.
(ii) si A possède (au moins) une valeur propre strictement négative, alors D n'a aucune racine carrée : $\mathcal{R}(D) = \emptyset$
• Enfin, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $R = P^{-1}BP$.
$B^2 = A \Leftrightarrow PR^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow R^2 = D$,
donc $\mathcal{R}(A) = \left\{PRP^{-1}/R \in \mathcal{R}(D)\right\}$.
Comme $PRP^{-1} = PR'P^{-1} \Leftrightarrow R = R'$, A a autant de racines carrées que D

5. *Application*

Pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve $\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_3) = -\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$ donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-1, 0, 1\}$: A possède exactement trois valeurs propres distinctes. Donc

$$\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

Dans $\mathbb{R}$, comme A possède une valeur propre strictement négative, A n'a pas de racine carré dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Dans $\mathbb{C}$, on recherche les vecteurs propres.

Avec $\mathrm{D} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.

Les 4 racines carrées R de D sont les $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & i\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$.

Les 4 racines carrées de A sont les
$\begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 \\ 0 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 2 * \varepsilon_1 \end{pmatrix}$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$.

Exercice 69 *Matrices d'isométries en dimension 2*

On munit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de la norme $||.||_2$ définie par $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall \mathrm{U} \in \mathrm{E}, ||\mathrm{AU}||_2 = ||\mathrm{U}||_2$.
Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda = \pm 1$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\forall \mathrm{U} \in \mathrm{E}, ||\mathrm{AU}||_2 = ||\mathrm{U}||_2$.
b) A est-elle diagonalisable ?

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\forall \mathrm{U} \in \mathrm{E}, ||\mathrm{AU}||_2 = ||\mathrm{U}||_2$.
b) Justifier A est-elle diagonalisable et préciser son spectre.

Solution (**Ex.69** – *Matrices d'isométries en dimension 2*)

1. Soit $\mathrm{U} \neq 0$ tel que $\mathrm{AU} = \lambda\mathrm{U}$.
$||\mathrm{U}||_2 = ||\mathrm{AU}||_2 = ||\lambda\mathrm{U}||_2 = |\lambda|\,||\mathrm{U}||_2$, et comme $||\mathrm{U}||_2 \neq 0$ car $\mathrm{U} \neq 0$, $|\lambda| = 1$, donc $\lambda = \pm 1$.

2. a) Soit $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
$||\mathrm{AU}||_2^2 = (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)x^2 + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)y^2 = x^2 + y^2 = ||\mathrm{U}||_2^2$ donc $||\mathrm{AU}||_2 = ||\mathrm{U}||_2$.

b) Les seules valeurs propres possibles de A sont ± 1 et $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - 1$.
$\chi_\mathrm{A}(1) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{I}_2$.
$\chi_\mathrm{A}(-1) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \mathrm{A} = -\mathrm{I}_2$.
Bilan : A est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonale, ou encore, si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = k\pi$.

3. a) Soit $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
$||\mathrm{AU}||_2^2 = (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)x^2 + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)y^2 = x^2 + y^2 = ||\mathrm{U}||_2^2$ donc $||\mathrm{AU}||_2 = ||\mathrm{U}||_2$.

b) A est symétrique réelle donc diagonalisable et $\mathrm{Sp(A)} \subset \{-1, 1\}$.
Comme $\mathrm{tr(A)} = 0$, on ne peut pas avoir $\mathrm{Sp(A)} = \{1\}$ ni $\mathrm{Sp(A)} = \{-1\}$, donc $\mathrm{Sp(A)} = \{-1, 1\}$.

Exercice 70 *Sous espace propre de dimension n-1*

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 soit diagonalisable.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une valeur propre λ telle que $\dim \mathrm{E}_\lambda = n - 1$ soit diagonalisable.

Solution (**Ex.70** – *Sous espace propre de dimension n-1*)

1. $0 \in \mathrm{Sp(A)}$ avec $\omega(0) \geqslant \dim \mathrm{Ker(A)} = n-1$, donc $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\lambda) = \mathrm{X}^n - \lambda\mathrm{X}^{n-1}$, donc $\lambda = \mathrm{tr(A)}$.
Premier cas : $\mathrm{tr(A)} = 0$, $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$ et $\dim \mathrm{E}_0 < \omega(0)$, A n'est pas diagonalisable.
Second cas : $\mathrm{tr(A)} \neq 0$, $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{tr(A)})$ et $\dim \mathrm{E}_0 = \omega(0)$, $1 \leqslant \dim \mathrm{E}_{\mathrm{tr(A)}} \leqslant \omega(1)$, donc $\dim \mathrm{E}_{\mathrm{tr(A)}} = 1$, et A est diagonalisable.

2. $\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X} - \lambda)^{n-1}(\mathrm{X} - \mu)$ avec éventuellement $\mu = \lambda$.
$\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X}^{n-1} - (n-1)\lambda\mathrm{X}^{n-1} + \dots)(\mathrm{X} - \mu) = \mathrm{X}^n - \big((n-1)\lambda + \mu\big)\mathrm{X}^{n-1} + \dots$
Premier cas : $\mathrm{tr(A)} = n\lambda$, donc $\mu = \lambda$, $\mathrm{Sp(A)} = \{\lambda\}$ avec $\dim \mathrm{E}_\lambda < \omega(\lambda)$, A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\mathrm{tr}(A) \neq n\lambda$, donc $\mu \leqslant \lambda$, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\dim E_\lambda = n-1$ et $\dim E_\mu = 1$, A est diagonalisable.
Notons que **1.** n'est qu'un cas particulier de ce cas.
Variante efficace – Quitte à plonger dans $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \mu = \mathrm{tr}(A) - (n-1)\lambda \in \mathbb{K}.$$

Premier cas : $\mu = \lambda$ (i.e. $\mathrm{tr}(A) = n\lambda$), $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et $\dim E_\lambda < n$ donc A n'est pas diagonalisable.
Second cas : $\mu \neq \lambda$ (i.e. $\mathrm{tr}(A) \neq n\lambda$), $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mathrm{tr}(A) - (n-1)\lambda\}$ et $\dim E_\lambda + \dim E_{\mathrm{tr}(A)-(n-1)\lambda} = n$ donc A est diagonalisable.

Exercice 71 *Matrice à deux paramètres*

Soit $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.71** – *Matrice à deux paramètres*)

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim E_0 = 2n - 2 = \omega(0)$ (car diagonalisable). On note λ et μ les deux autres valeurs propres de A (et il n'est pas exclu que $\lambda = \mu$). Comme A est diagonalisable, semblable à $diag(\lambda, \mu, 0, \dots, 0)$, $\lambda + \mu = \mathrm{tr}(A) = 2na$, donc $\mu = 2na - \lambda$.
Quelques idées pour trouver λ et μ :
- la somme des coefficients de chaque est constante, égale à $n(a+b)$ donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n(a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\lambda = n(a+b)$ est une valeur propre. Alors $\mu = n(a-b)$.

- En sommant les $2n$ lignes sur la première ligne, on obtient une factorisation : $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_{2n} - \mathrm{A}) = (\mathrm{X} - n(a+b)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \times & \times & & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & & \times \end{vmatrix}$ donc $\lambda = n(a+b)$ est une racine de χ_{A} donc une valeur propre. $\mu = n(a-b)$ est l'autre.
- $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) = 2n^2(a^2+b^2)$, et comme A^2 est semblable à $diag(\lambda^2, \mu^2, 0, \dots, 0)$, $\lambda^2 + \mu^2 = n^2(a^2+b^2)$.

On en tire : $\lambda\mu = \dfrac{1}{2}\big((\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2\big) = n^2(a^2 - b^2)$.
Donc λ et μ sont les racines du trinôme $\mathrm{X}^2 - 2na\mathrm{X} + n^2(a^2-b^2)$.
$\Delta = 4n^2b^2 = (2nb)^2 > 0$, $\lambda = n(a+b)$ et $\mu = n(a-b)$.
Bref, A est semblable à $diag\big(n(a+b), n(a-b), 0, \dots, 0\big)$.

Exercice 72 *Sommes constantes en ligne ou en colonne*

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice. On suppose que : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s$.

Montrer que $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

2. En est-il de même si : $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = s$?

3. Étudier si

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Si oui, proposer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.72** – *Sommes constantes en ligne ou en colonne*)

1. Avec $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{AU} = s\mathrm{U}$ donc $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{U} \in \mathrm{E}_s$.

Variante : $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})$: on effectue $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \dots + \mathrm{C}_n$ et on factorise la première colonne par $\mathrm{X} - s$, alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - s)\det(?)$, et s est racine de χ_{A}.

2. Cette fois, ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}$ vérifie la propriété de **1.**, donc $s \in \mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A})$. Or $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A})$ donc $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. Donc $\dim(\mathrm{E}_0) + \dim(\mathrm{E}_{10}) = 4$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: A est diagonalisable.

3. $\operatorname{rg}(A) = 1$ donc $0 \in \operatorname{Sp}(A)$ avec $\dim E_0 = 3$. Par **2.**, $10 \in \operatorname{Sp}(A)$. Comme $\dim E_{10} \geqslant 1$ et $\dim E_0 + \dim E_{10} \leqslant 4$, $\dim E_{10} = 1$.

Exercice 73 *Calculs explicites en dimension 3*

Pour les trois matrices suivantes, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres, en précisant si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, voire dans $\mathbb{C}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et} \ L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution (**Ex.73** – *Calculs explicites en dimension 3*)

- $\chi_M = (X-1)(X+1)^2$, $\operatorname{Sp}(M) = \{-1, 1\}$, $E_1(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, non diagonalisable, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

- $\chi_N = (X-2)^2 \cdot (X-1)$, $\operatorname{Sp}(M) = \{1, 2\}$, $E_1(N) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$, diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

- $\chi_L = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X-i)(X+i)$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(L) = \{-1\}$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(L) = \{-1, i, -i\}$, $E_{-1}(L) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_i(L) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 3-i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-i}(L) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 3+i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, non diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 74 *Matrice à un paramètre*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $n \geqslant 3$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

i.e. $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in \{1; n\}, \\ 1 & \text{si } i \in [\![2\,;\,n-2]\!]\,. \end{cases}$

Étudier, suivant la valeur de α, si A est diagonalisable, et préciser dans tous les cas ses éléments propres.

Solution (**Ex.74** – *Matrice à un paramètre*)
$\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n-1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\dim \mathrm{E}_0 = n-1$.
De plus, $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_n)$ où $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Du coup $\omega(0) \geqslant n-1$ et $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \lambda) = \mathrm{X}^n - \lambda \mathrm{X}^{n-1}$. Mais comme $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{X}^{n-1} + \dots$, nécessairement $\lambda = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 2\alpha + n - 2$.

- Premier cas : $\alpha = 1 - \dfrac{2}{n}$.

Alors $\lambda = 0$, $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$ et $\dim \mathrm{E}_0 < \omega(0)$: A n'est pas diagonalisable

- Second cas : $\alpha \neq 1 - \dfrac{n}{2}$, alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0, 2\alpha + n - 2\}$ avec $\dim \mathrm{E}_{2\alpha+n-2} = 1$. A

est diagonalisable avec $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - (2\alpha + n - 2))$.

Enfin : $\mathrm{A}\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = (2\alpha + n - 2)\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{E}_{2\alpha+n-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 75 *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i < n \\ 1 - n & \text{si } i = n \end{cases}$$

M est-elle diagonalisable ?

Solution (**Ex.75** – *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)
$\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - 0 \times \mathrm{I}_n) = n - 1 \geqslant 1$: 0 est valeur propre, avec $\dim(\mathrm{E}_0) = n - 1$.
Supposons M est diagonalisable : elle possède alors une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ et étant semblable à $diag(\lambda, 0, \dots, 0)$, on a : $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \lambda + (n-1) \times 0$, donc $\lambda = \mathrm{tr}(\mathrm{M})$.

Or $\mathrm{tr}(M) = 0$ donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde.
M n'est pas diagonalisable.

Exercice 76 *Petit spectre dans* $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et u et v les deux endomorphismes de E définis par

$$u : P \mapsto P' \quad \text{et} \quad v : P \mapsto P(X) + P(X+1).$$

1. u et v sont-ils diagonalisables ? Préciser leurs sous-espaces propres.

Solution (**Ex.76** – *Petit spectre dans* $\mathbb{R}_n[X]$)

1. • Comme pour $P \neq 0$, $\deg(P') < \deg(P)$, $u(P) = \lambda P$ n'est possible que pour $\deg(P) = 0$ et $\lambda = 0$. Donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ et $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\dim(E_0) = 1 < \dim(E)$, u n'est pas diagonalisable.
☞ on peut aussi raisonner que

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{C}anonique}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ (triangulaire supérieure !), donc M n'est diagonalisable que si $M = 0 \times I_n$, ce qui n'est pas le cas.

• $$M = \mathcal{M}_{\mathcal{C}anonique}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

en raison de la formule du binôme :

$$v(X^k) = X^k + (X+1)^k = 2X^k + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} X^i.$$

$\mathrm{Sp}(M) = \{2\}$ (triangulaire supérieure !), donc M n'est diagonalisable que si $M = 2 \times I_n$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 77 *Matrices antisymétriques d'ordre 3*

1. Étudier la diagonalisablité dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Soit a, b et c trois réels non tous nuls, $s = a^2+b^2+c^2$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer M^3 en fonction de M et de s.

b) M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

c) On dit qu'une matrice M est *antisymétrique* si ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$.
Une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Solution (**Ex.77** – *Matrices antisymétriques d'ordre 3*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^3+3)$. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}) = \{0\}$ et $\mathrm{M} \neq 0 \times \mathrm{I}_3$ donc M n'est pas diagonalisable. Elle le serait dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car $\mathrm{ch}_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-i\sqrt{3})(\mathrm{X}+i\sqrt{3}\}$ scindé à racines simples (et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{M}) = \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$).

2. a) $\mathrm{M}^2 = -\begin{pmatrix} a^2+b^2 & b\cdot c & -a\cdot c \\ b\cdot c & a^2+c^2 & a\cdot b \\ -a\cdot c & a\cdot b & b^2+c^2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}^3 = -s\mathrm{M}$.

b) Soit λ une valeur propre de M et U vecteur propre associé.
$\mathrm{M}^3\mathrm{U} = \lambda^3\mathrm{U}$ et $\mathrm{M}^3\mathrm{U} = -s\lambda\mathrm{U}$ donc $\lambda^3\mathrm{U} = -s\lambda\mathrm{U}$, et $\lambda^3 = -s\lambda$ car $\mathrm{U} \neq 0$.
Donc $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 = -s$. Comme $s > 0$, $\lambda^2 = -s$ est impossible.
Donc 0 est l'unique valeur propre possible de M. Comme $\mathrm{M} \neq 0\mathrm{I}_3$ car $s \neq 0$, M n'est pas diagonalisable.

c) Non, sauf si elle est nulle, car toute matrice antisymétrique non nulle s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Exercice 78 *Utilisation d'un polynôme annulateur*

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer M^2 en fonction de M et I_3.

b) En déduire un polynôme Q annulateur de M.

c) En déduire les valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable.

2. a) Déterminer une matrice P *dont tous les coefficients diagonaux valent 1* telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit diagonale.

b) Calculer M^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution (**Ex.78** – *Utilisation d'un polynôme annulateur*)

1. a) $M^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -6 \\ 0 & 16 & 0 \\ -6 & -6 & 10 \end{pmatrix} = -2M + 8I_3$

b) $Q(X) = X^2 + 2X - 8$ est un polynôme annulateur de M.

c) Si λ est valeur propre de M et U un vecteur propre associé,

$(M^2U + 2M - 8I_3)U = 0$ donne $(\lambda^2 + 2\lambda - 8)U = 0$ donc $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$.

Donc $\lambda = 2$ ou $\lambda = -4$: $\mathrm{Sp}(M) \subset \{2, -4\}$.

$\mathrm{rg}(M - 2I_2) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 2$ donc $2 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\dim E_2 = 3 - 2 = 1$.

$\mathrm{rg}(M + 4I_2) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1$ donc $-4 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\dim E_{-4} = 3 - 1 = 2$.

$\dim E_2 + \dim E_{-4} = 3$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc M est diagonalisable.

2. a) $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-4} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

b) On a alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, $M^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Avec $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + (-4)^n & 2^n - (-4)^n & 2^n - (-4)^n \\ 0 & 2 \cdot (-4)^n & 0 \\ 2^n - (-4)^n & 2^n - (-4)^n & 2^n + (-4)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 79 *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. a) Justifier sans calcul que A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer les éléments propres de A_2.

c) Déterminer les éléments propres de A_3.

2. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Montrer par récurrence sur n que $\det(\mathrm{A}_n) = -n + 2$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A_n en précisant le sous-espace propre associé.

c) En déduire que A_n possède deux autres valeurs propres, les déterminer ainsi que les sous-espaces propres associés.

Solution (**Ex.79** – *Une matrice générique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. a) A_n est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) $\chi_{\mathrm{A}_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_2) = \{0, 2\}$, $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

c) $\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 3\cdot\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)\cdot(\lambda^2 - 2\cdot\lambda - 1) = (\lambda - \sqrt{2} - 1)\cdot(\lambda - 1)\cdot(\lambda + \sqrt{2} - 1)$
$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$
$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{E}_{1+\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_{1-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2. a) Un développement par rapport à la dernière colonne donne :

$$\mathrm{D}_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]} + \mathrm{D}_{n-1} = (-1)^{n+1}(-1)^n \det(\mathrm{I}_{n-2}) +$$

D_{n-1}

$\mathrm{D}_n = -1 + \mathrm{D}_{n-1}$, avec $\mathrm{D}_2 = 0$, donc $\mathrm{D}_n = -n + 2$.

b) $\mathrm{A}_n - \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}_n - \mathrm{I}_n) = 2 < n$:

1 est valeur propre avec $\dim(\mathrm{E}_1) = n-2$, et
$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_n - \mathrm{I}n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3, \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_4, \dots, \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_n)$.

c) Puisque A_n est diagonalisable, appelons λ et μ les deux autres valeurs propres de A_n (éventuellement confondues).
Alors : $\mathrm{tr}(\mathrm{A}_n) = (n-2) \times 1 + \lambda + \mu$ donc $\lambda + \mu = 2$,
$\det(\mathrm{A}_n) = 1^{n-2}\lambda\mu$ donc $\lambda\mu = 2 - n$.
Donc λ et μ sont les racines de $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + (2-n)$.
$\Delta = 4 - 4(2-n) = 4n - 4$, et par exemple :

$$\lambda = 1 - \sqrt{n-1} \text{ et } \mu = 1 + \sqrt{n-1}$$

.
On en tire déjà : $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n) = \{1, 1-\sqrt{n-1}, 1+\sqrt{n-1}\}$.

$$\mathrm{A}_n - (1 \pm \sqrt{n-1})\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{n-1} & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \mp\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \mp\sqrt{n-1} \end{pmatrix}$$

En remarquant que $\pm\sqrt{n-1}\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \dots + \mathrm{C}_n = 0$, on a :

$\mathrm{E}_{1\pm\sqrt{n-1}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, ce qui corrobore l'étude de A_3, et même A_2 (pour laquelle cependant 1 n'est pas valeur propre).

Exercice 80 *Une matrice générique*

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A_n est-elle diagonalisable ?

Solution (**Ex.80** – *Une matrice générique*)

A_n est triangulaire supérieure donc $\mathrm{Sp}(A_n) = \{0,1\}$ et $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X-1)^2$.

$\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}(A_n) = n - \mathrm{rg}(A_n) = n-2 = \omega(0)$,

$$\dim E_1 = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or cette dernière matrice est de rang $n-1$ car :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 \ddots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & n-1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 \ddots & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n(n-1)\det(-I_{n-2}) =$$
$n-1 \neq 0$

Donc $\dim E_1 = 1 < \omega(1)$: A_n n'est pas diagonalisable.

$\boxed{\textbf{Exercice 81}}$ *Recherche d'une racine carrée*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Justifier que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Solution (**Ex.81** – *Recherche d'une racine carrée*)

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.

$\chi_A = (X+1)^2(X-2)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ avec $\dim E_{-1} = 2$ et $\dim E_2 = 1$.

$$E_{-1} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathrm{E}_2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Avec $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = diag(-1,-1,2) = \mathrm{D}$.

2. Soit $\Delta = diag(i, i, \sqrt{2})$ de sorte que $\Delta^2 = \mathrm{D}$.
Posons $\mathrm{B} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$. Alors $\mathrm{B}^2 = \mathrm{P}\Delta^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{A}$.
Pour les amateurs de calculs :
$\mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+2*i & \sqrt{2}-i & \sqrt{2}-i \\ \sqrt{2}-i & \sqrt{2}+2*i & \sqrt{2}-i \\ \sqrt{2}-i & \sqrt{2}-i & \sqrt{2}+2*i \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{Exercice 82}}$ *Commutant*

Soit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M est diagonalisable, en précisant une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$$

Pour tout matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$\mathcal{C}(\mathrm{A}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \mathrm{AB} = \mathrm{BA}\}$$

son *commutant.*

2. a) Montrer que, pour tout A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}(\mathrm{A})$ est un espace vectoriel.

b) Déterminer $\mathcal{C}(\mathrm{D})$ en précisant sa dimension et en donnant une base de ses bases.
On pourra commencer par raisonner par blocs.

c) En déduire la dimension ainsi qu'une base de $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.

3. Que vaut D^2 ? Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à M.

Solution (**Ex.82** – *Commutant*)

1. $\chi_M = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2 \cdot (X+1)$

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

on a $P^{-1}MP = D$.

2. a) Laissée au lecteur.

b) Soit $N = \begin{pmatrix} \alpha & A \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$ND = \begin{pmatrix} -\alpha & A \\ -B & C \end{pmatrix}$, $DN = \begin{pmatrix} -\alpha & -A \\ B & C \end{pmatrix}$

$ND = DN \Leftrightarrow \begin{cases} A = -A \\ B = -B \end{cases} \Leftrightarrow A = 0, B = 0.$

Donc $\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} / C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \right\} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3})$

c) $A \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}APD = DP^{-1}AP \Leftrightarrow P^{-1}AP \in \mathcal{C}(D) \Leftrightarrow A \in \left\{P\Delta P^{-1} / \Delta \in \mathcal{C}(D)\right\}$

Donc $\mathcal{C}(M) = \mathrm{Vect}\big((PEP^{-1})_{E \in \{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\}}\big)$

Et $\dim(\mathcal{C}(M)) = 5$.

3. $D^2 = I_3$ donc $M^2 = PD^2P^{-1} = I_3$ donc l'endomorphisme φ associé à M vérifie $\varphi^2 = id$, donc est une symétrie (d'axe E_1 et de direction E_{-1}).

Exercice 83 *Racines carrées*

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est diagonalisable, en précisant une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$$D = P^{-1}MP$$

2. a) Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On pose $\Delta = P^{-1}RP$.

Montrer que $R^2 = M \Rightarrow \left(\Delta^2 = D \text{ et } \Delta D = D\Delta\right)$.

b) Combien l'équation $R^2 = M$ d'inconnue R a-t-elle de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Solution (**Ex.83** – *Racines carrées*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^3 - 2\cdot\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}-2)\cdot(\mathrm{X}-1)\cdot(\mathrm{X}+1)$.

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) $\mathrm{R}^2 = \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}^2\mathrm{P} = \mathrm{D} \Rightarrow \Delta^2 = \mathrm{D}$, puis $\Delta^2 = \mathrm{D} \Rightarrow \Delta\mathrm{D} = \Delta^3 = \Delta^2\Delta = \mathrm{D}\Delta$.

b) $\mathrm{D}\Delta = \Delta\mathrm{D} \Rightarrow \Delta$ diagonale car D est diagonale à valeurs propres 2 à 2 distinctes. On pose $\Delta = diag(a,b,c)$. $\Delta^2 = \mathrm{D} \Leftrightarrow (a^2 = 1, b^2 = 2, c^2 = -1)$.

- Il n'y a pas de solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Dans $\mathbb{C}$, $\Delta^2 = \mathrm{D}$ admet les 8 solutions $\Delta = diag(\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm i)$. Donc $\mathrm{R}^2 =$ M a exactement 8 solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta^i nv\mathrm{P}$ où $\Delta^2 = \mathrm{D}$.

Exercice 84 *Puissance n-ème*

Soit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \\ -12 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer χ_{M} et étudier si M est diagonalisable.

2. a) M est-elle trigonalisable ?

b) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les de la première ligne valent 1 et telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle T cette matrice.

3. a) Justifier l'existence de trois matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^n = \mathrm{A} + (-1)^n\mathrm{B} + n\mathrm{C}.$$

b) Déterminer A, B et C en fonction I_3, M et M^2.

Solution (**Ex.84** – *Puissance n-ème*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1)^2\cdot(\mathrm{X}+1)$

mais $\dim \mathrm{E}_1 = 3 - \mathrm{rg}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -8 & -2 & -4 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix} = 1$

2. a) M est trigonalisable car χ_{M} est scindé.

b) $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Récurrence ou Newton : ${}^{q}qn \in \mathbb{N}, \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}' + (-1)^n\mathrm{B}' + \mathrm{C}'n$ avec $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ adéquates.
Alors $\mathrm{M}^n = \mathrm{P}\mathrm{D}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A} + (-1)^n\mathrm{B} + \mathrm{C}n$ où $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{P}^{-1}$ etc.

b) On peut calculer $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ à l'aide de P^{-1}.
On peut aussi remarquer :
$n = 0 \Rightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{I}_3$,
$n = 1 \Rightarrow \mathrm{A} - \mathrm{B} + \mathrm{C} = \mathrm{M}$,
$n = 2 \Rightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} + 2\mathrm{C} = \mathrm{M}^2$.
D'où : $\mathrm{C} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M}^2 - \mathrm{I}_3)$, etc...

$\boxed{\textbf{Exercice 85}}$ *Dans un espace de fonctions*

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère :

$$f_1 : x \mapsto \mathrm{ch}(x),\ f_2 : x \mapsto \mathrm{sh}(x),\ f_3 : x \mapsto x\mathrm{ch}(x) \text{ et } f_4 : x \mapsto x\mathrm{sh}(x),$$

ainsi que $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. a) Soit $(\alpha_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4$. Déterminer le développement limité de $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i f_i$.

b) En déduire que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.

2. Montrer que φ définie sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \varphi(f) = f'$$

est un endomorphisme de E.

3. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

4. φ est-il diagonalisable ?

5. φ est-il trigonalisable ?

Solution (**Ex.85** – *Dans un espace de fonctions*)

1. a) $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i f_i\right)(x) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)x + \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_4)x^2 + \frac{1}{6}(\alpha_2 + 3\alpha_3)x^3 + o(x^3).$

b) Si de plus $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i f_i = 0$, il vient par unicité du D.L. : $\forall i \in [\![1\,;\,4]\!]\,, \alpha_i = 0$.

Donc $\mathcal{B}$ est libre, et génératrice de E : c'en est une base.

2. Notons que $\forall(\alpha_i), \sum_{i=1}^{4} \alpha_i f_i$ est dérivable donc φ est bien définie sur E.
φ est linéaire par linéarité de la dérivation et :
$\varphi(f_1) = f_2 \in \mathrm{E}$, $\varphi(f_2) = f_1 \in \mathrm{E}$, $\varphi(f_3) = f_1 + f_4 \in \mathrm{E}$ et $\varphi(f_4) = f_2 + f_3 \in \mathrm{E}$.
Par linéarité, $\forall f \in \mathrm{E}, \varphi(f) \in \mathrm{E}$.

3. $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On a : $\chi\varphi = \chi_{\mathrm{M}} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)^2$ donc $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 1\}$
$\dim \mathrm{E}_1 = 4 - \mathrm{rg}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_4) = 4 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 < \omega(1)$ donc M n'est pas diagonalisable. Donc φ non plus.

5. χ_φ est scindé donc φ est trigonalisable.

Exercice 86 *Calcul d'une limite de puissance*
Soit

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est diagonalisable, et déterminer une matrice inversible P
- dont tous les coefficients diagonaux valent 1
- telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{D}^n$ existe et la calculer.

3. En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}^n$.

Solution (**Ex.86** – *Calcul d'une limite de puissance*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = -\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \frac{1}{4} \cdot \mathrm{X} + \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}(\mathrm{X}-1)(2\cdot\mathrm{X}-1)(2\cdot\mathrm{X}+1)$
$\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{1, 1/2, -1/2\}$: M a autant de valeurs propres que son ordre dans M est diagonalisable.

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient, et c'est la seule, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour info, ou pour la suite, $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}^n = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 87 *Trigonalisation et nilpotence*

1. Soit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Étudier la diagonalisabilité de M.

b) Justifier que M est trigonalisable et déterminer une matrice de passage P telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{T}.$$

c) Justifier que M est nilpotente d'indice 3.

d) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{M}) = \{0\}$, alors M est nilpotente.

2. a) Étudier la diagonalisabilité de

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) La propriété démontrée en 1.d) demeure-t-elle en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Solution (**Ex.87** – *Trigonalisation et nilpotence*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^3$, $\mathrm{Sp(M)} = \{0\}$ mais $\dim \mathrm{E}_0 = \dim \mathrm{K}er\mathrm{M} = 1$: non diagonalisable.
$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ convient.
$\mathrm{T}^2 \neq 0$, $\mathrm{T}^3 = 0$ donc $\mathrm{M}^2 \neq 0$ mais $\mathrm{M}^3 = 0$: M nilpotente d'indice 3.
Pour 1.d), dans $\mathbb{C}$, M est trigonalisable et il existe P telle que

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car $\mathrm{Sp(T)} = \mathrm{Sp(M)} = \{0\}$.
Alors $\mathrm{T}^3 = 0$, donc $\mathrm{M}^3 = 0$.

2. $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ mais est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais l'est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
1.d) est fausse dans $\mathbb{R}$. On a : $\mathrm{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{A}^{4n} = (\mathrm{A}^4)^n =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$... aucune puissance de A n'est nilpotente.

Exercice 88 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et proposer une matrice P inversible telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale.
Dans $\mathrm{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}.$$

2. a) Vérifier que φ est un endomorphisme.
b) Étudier si φ est diagonalisable, en précisant son spectre et ses sous-espaces propres.

Solution (**Ex.88** – *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*)

1. $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{3, -1\}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{2}}(\mathbb{R})$ donc A diagonalisable.

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

2. a) φ est un endomorphisme sans souci.

b) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\varphi(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{AM} - \mathrm{MA} = \lambda\mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APP}^{-1}\mathrm{MP} - \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MPP}^{-1}\mathrm{AP} = \lambda\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \Leftrightarrow \mathrm{ND} - \mathrm{DN} = \lambda\mathrm{N}$.

$\varphi(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a & -b \\ 3c & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda a & (\lambda+4)b \\ (\lambda-4)c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Premier cas : $\lambda = 0$.

$\varphi(\mathrm{M}) = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$.

0 est valeur propre et

$\mathrm{E}_0 = \left\{ \mathrm{P} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} / (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Second cas : $\lambda = 4$.

$\varphi(\mathrm{M}) = 4\mathrm{M} \Leftrightarrow a = b = d = 0$.

4 est valeur propre et

$\mathrm{E}_4 = \left\{ \mathrm{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} / c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$

Troisième cas : $\lambda = -4$.

$\varphi(\mathrm{M}) = -4\mathrm{M} \Leftrightarrow a = c = d = 0$.

-4 est valeur propre et

$\mathrm{E}_{-4} = \left\{ \mathrm{P} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} / b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$

Bilan :

φ est diagonalisable car $\dim \mathrm{E}_0 + \dim \mathrm{E}_4 + \dim \mathrm{E}_{-4} = 2+1+1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Variante :

On peut aussi passer par la matrice B représentant φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$
\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}
$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}+4)(\mathrm{X}-4)$.

Exercice 89 *Un endomorphisme sur les endomorphismes*
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on pose :

$$\varphi(u) = p \circ u.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, *i.e.* $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(\mathrm{E})\big)$.

2. Calculer $\varphi \circ \varphi$ et en déduire la diagonalisabilité et le spectre de φ.

3. Montrer que $\mathrm{E}_0(\varphi) = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) / \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(p)\}$ et déterminer une description analogue de $\mathrm{E}_1(\varphi)$.

Solution (**Ex.89** – *Un endomorphisme sur les endomorphismes*)

1. $p \circ u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\varphi(\lambda u + v) = p \circ (\lambda u + v) = \lambda p \circ u + p \circ v = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.

2. $\varphi^2(u) = p \circ p \circ u = p^2 \circ u = p \circ u = \varphi(u)$: φ est aussi un projecteur. Il est donc diagonalisable, de spectre $\{0; 1\}$.

3.
- $u \in \mathrm{E}_0(\varphi) \Leftrightarrow p \circ u = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(p)$.
- $u \in \mathrm{E}_1(\varphi) \Leftrightarrow p \circ u = u \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(p)$.

En effet, l'implication est évidente et si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(p)$, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, $p(u(x)) = u(x)$ car $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}_1(p)$ pour un projecteur.

Exercice 90 *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice A_n définie par

$$
\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Autrement dit, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \text{ ou } j = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Étudier la diagonalisabilité de A_2 en précisant ses éléments propres.

2. Même question pour A_3.

3. Même question pour A_n avec $n \geqslant 4$.

Solution (**Ex.90** – *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

1. A_2 est diagonalisable avec $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}_2\mathrm{P} = \mathrm{D}$ pour
$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & -\sqrt{5}-1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(-\sqrt{5}+1)}{2} \end{pmatrix}$.

2. A_3 est diagonalisable avec $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}_3\mathrm{P} = \mathrm{D}$ pour
$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. • $\mathrm{rg}(\mathrm{A}_n) = 2$ donc 0 est valeur propre avec $\mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, 0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3, \ldots, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_{n-1})$ où E_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• Pour $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{A}_n\mathrm{U} = \lambda\mathrm{U} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1\,;\,n-1]\!]\,, x_i = \lambda x_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1\,;\,n-1]\!]\,, x_i = \lambda x_n \\ (\lambda^2 - \lambda - (n-1))x_n = 0 \end{cases}$$

Le système possède des solutions non nulles si, et seulement si, $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$.
$\Delta = 4n - 3 > 0$, $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$.
Donc A_n possède deux autres valeurs propres :
$\lambda_1 = \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$.
Comme $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, 0) = n-2$, on a nécessairement $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, \lambda_1) = \dim \mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, \lambda_2$
1 et A_n est diagonalisable.

Pour aller jusqu'au bout, pour $i \in \{1, 2\}$, $\mathrm{SEP}(\mathrm{A}_n, \lambda_i) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Variante par le calcul du polynôme caractéristique par récurrence –
En développant par rapport à la première colonne :
$\chi_{\mathrm{A}_n} = \mathrm{X}\chi_{\mathrm{A}_{n-1}} + (-1)^n \mathrm{D}_{n-1}$ où le déterminant $\mathrm{D}_n n - 1$ se développe suivant sa première ligne en :
$\mathrm{D}_{n-1} = (-1)^{n+1}\mathrm{X}^{n-2}$, d'où

$$\chi_{\mathrm{A}_n} = \mathrm{X}\chi_{\mathrm{A}_{n-1}} - \mathrm{X}^{n-2}$$

Partant de $\chi_{A_2} = X^2 - X - 1$, on trouve par récurrence :
$\chi_{A_n} = X^n - X^{n-1} - (n-1)X^{n-2} = X^{n-2}(X^2 - X - (n-1))$ ce qui fournit bien $\mathrm{Sp}(A_n) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ obtenu par la première méthode.

Exercice 91 *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$f : M \mapsto AM - MA.$$

f est-il diagonalisable ?

Solution (**Ex.91** – *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*)

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$AM - MA = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ donc immédiatement :

$0 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$,

$1 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

$-1 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

Bilan : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0, 1\}$ avec $\dim E_{-1} + \dim E_0 + \dim E_1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc f est diagonalisable.

Variante : dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale !

Exercice 92 *Relation polynomiale*

1. Soit $n \geqslant 3$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$ et $\mathrm{A}^n \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

2. Cette propriété demeure-t-elle vraie en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Solution (**Ex.92** – *Relation polynomiale*)

1. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\dim(\mathrm{E}_0) = n - 2$.
Nous travaillons dans $\mathbb{C}$, donc χ_A est scindé.
Si 0 est l'unique valeur propre, alors, par trigonalisation, A est semblable à

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Or une telle matrice B est nilpotente, vérifiant $\mathrm{B}^n = 0$, donc $\mathrm{A}^n = \mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1} = 0$: impossible.
Donc A possède au moins une autre valeur propre que 0, et comme χ_A est scindé, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\omega(\lambda) \times \lambda)$ entraîne que A possède deux autres valeurs propres, non nulles et opposées : $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0, -\lambda, \lambda\}$, avec $\dim(\mathrm{E}_0) + \dim(\mathrm{E}_\lambda) + \dim(\mathrm{E}_{-\lambda}) = (n-2) + 1 + 1 = n$, donc A diagonalisable.

2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$, $\mathrm{A}^3 = -\mathrm{A} \neq 0$ et $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)$ non scindé, donc A non diagonalisable.

$\boxed{\textbf{Exercice 93}}$ *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice A_n définie par

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (j = 1 \text{ et } i \geqslant 2) \text{ ou } (j = n \text{ et } i \leqslant n-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Étudier la diagonalisabilité de A_2 en précisant ses éléments propres.

2. Même question pour A_3.

3. On suppose $n \geqslant 3$.

a) Calculer A^2.

b) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A_n. Montrer que

$$\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^n.$$

c) En déduire que A_n est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in GL_2(\mathbb{R}).$$

d) À l'aide de $\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(B^2)$, déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de B, puis celles de A_n.

e) Montrer que A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en précisant ses éléments propres.

Solution (**Ex.93** – *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

1. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2^2 = I_2$ donc A_2 est une matrice de symétrie, donc diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A_2) = \{-1, 1\}$, $E_{-1}(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_1(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2. $\chi_{A_3}(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$, scindé à racines simples donc A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A_3) = \{-1, 0, 1\}$.

$E_{-1}(A_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$E_0(A_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$E_1(A_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) En notant $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,
$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + \dots + e_n, e_1 + \dots + e_{n-1})$,
Comme $e_1 = \big(e_1 + \dots + e_{n-1}\big) - \big(e_2 + \dots + e_{n-1}\big)$, $e_1 \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$,
et $e_n = \big(e_2 + \dots + e_n\big) - \big(e_1 + \dots + e_{n-1}\big)$, $e_n \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$, on a :
$\mathcal{C} \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$, donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
De plus, par le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f)$,

$$\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^n.$$

c) $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f et supplémentaires donc dans une base adaptée, la matrice de f est :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & 0 & \\ (0) & & & \mathrm{B} \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

De plus, $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}_n) = 2$, donc $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

d) $\mathrm{tr}(\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}_n) = 0$, $\mathrm{tr}(\mathrm{B}^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}_n^2) = 2$ par similitude.
B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & ? \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
$\lambda + \mu = \mathrm{tr}(\mathrm{B}) = 0$ donc $\mu = -\lambda$.
$\lambda^2 + \mu^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{B}^2) = 2$ donc $\lambda^2 = 1$.
Finalement, les valeurs propres de B sont -1 et 1, et B est diagonalisable, semblable à $diag(-1, 1)$.
Ainsi, A_n est semblable à M, semblable à $diag(-1, 1, 0, \dots, 0)$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n) = \{-1, 0, \}$.

e) A_n est semblable à $diag(-1, 1, 0, \dots, 0)$ donc diagonalisable.
En notant $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$\mathrm{E}_0(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_{n-1})$,
$\mathrm{E}_1(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_n - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{E}_1 - 2(\mathrm{E}_2 + \dots + \mathrm{E}_{n-1}) + \mathrm{E}_n\big)$,
$\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_n + \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_n\big)$,

Exercice 94 *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice A_n définie par

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \pm 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Étudier la diagonalisabilité de A_2 en précisant ses éléments propres.

2. Même question pour A_3.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on note χ_n le polynôme caractéristique de A_n.

a) Exprimer χ_{n+2} en fonction de χ_{n+1} et χ_n.

b) Vérifier que la relation précédente est encore valable pour $n = 0$ en convenant que $\chi_0 = 1$.

c) Soit $x \in \left]-2\,;2\right[$. On pose $x = -2\cos\alpha$ avec $\alpha \in \left]0\,;\pi\right[$. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\chi_n(x) = (-1)^n \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)}.$$

d) En déduire que A_n est diagonalisable pour tout n de $\mathbb{N}^*$, en précisant son spectre.

Solution (**Ex.94** – *Une matrice générique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. $\chi_{\mathrm{A}_2} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_2) = \{-1, 1\}$, A_2 diagonalisable, $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$,

$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2. $\chi_{\mathrm{A}_3} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-\sqrt{2})(\mathrm{X}+\sqrt{2})$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_3) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$,

$\mathrm{E}_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{E}_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3. a) Il s'agit d'un déterminant tridiagonal classique :

$\chi_{n+2}(x) = x\chi_{n+1}(x) - \chi_n(x)$.

b) $\chi_(x) = x^2 - 1 = x\chi_1(x) - \chi_0$ avec $\chi_0 = 1$.

c) Notons que $\sin\alpha \neq 0$.

- Pour $n = 0$: $\chi_0(x) = 1 = (-1)^0 \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha}$.

- Pour $n = 1$: $\chi_1(x) = x = -2\cos\alpha = (-1)^1 \dfrac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha}$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons l'expression exacte pour $n-2$ et $n-1$. Alors :

$$\begin{aligned}\chi_n(x) &= x\chi_{n-1}(x) - \chi_{n-2}(x)\\ &= -2\cos(\alpha)(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha} - (-1)^n\frac{\sin((n-1)\alpha)}{\sin\alpha}\\ &= (-1)^n\frac{2\cos(\alpha)\sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha)}{\sin\alpha}\\ &= (-1)^n\frac{\sin((n+1)\alpha) - \sin(\alpha - n\alpha) - \sin((n-1)\alpha)}{\sin\alpha}\\ &= (-1)^n\frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}\end{aligned}$$

- Par le principe de récurrence, l'expression est valable pour tout n de $\mathbb{N}$.

d) Déterminons les racines de χ_n dans $]-2\,;2\,[$, en écrivant toujours $x = 2\cos\alpha$, $\alpha \in \,]\,0\,;\pi\,[$.

$\chi_n(x) = 0 \Leftrightarrow \sin[(n+1)\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \dfrac{k\pi}{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1\,;\,n]\!]\,, \alpha = \dfrac{k\pi}{n+1}$ car $0 < \alpha < \pi$.

Donc : $\chi_n(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1\,;\,n]\!]\,, x = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

Comme cos est strictement décroissante sur $]\,0\,;\pi\,[$, ces n racines de χ_n sont distinctes. Comme $\deg(\chi_n) = n$, χ_n n'a pas d'autres racines. Donc :

$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n) = \left\{2\cos\left(\dfrac{kp}{n+1}\right), k \in [\![1\,;\,n]\!]\right\}$ et A_n est diagonalisable car d'ordre n et possédant n valeurs propres distinctes.

Autre argument pour la diagonalisabilité : A_n *est symétrique réelle.*

Exercice 95 *Les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont égaux*

Soit $n \geqslant 2$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que 0 est valeur propre de AB si, et seulement si, 0 est valeur propres de BA.

2. On suppose dans cette question que λ est une valeur propre réelle non nulle de AB et on note X un vecteur propre de AB associé à cette valeur propre λ.

a) Justifier que ABX et BX sont non nuls.

b) Démontrer que BX est un vecteur propre de BA.

3. En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

4. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a) En factorisant de deux façons $x\mathrm{A}-\mathrm{ABA}$, montrer que pour tout réel x, $\chi_{\mathrm{AB}}(x) = \chi_{\mathrm{BA}}(x)$.

b) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec la même multiplicité.

5. Dans cette question, on suppose A non inversible, et on va étendre la propriété précédente à A grâce à un argument topologique de continuité.

a) Justifier que $\chi_{(-\mathrm{A})}$ n'a qu'un nombre fini de racines réelles. 0 est-il racine de $\chi_{(-\mathrm{A})}$?

b) Justifier qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\quad \forall p \geqslant p_0, \quad \dfrac{1}{p} \notin \mathrm{Sp}(-\mathrm{A})$.

c) On pose, pour tout $p \geqslant p_0$, $\mathrm{A}_p = \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n + \mathrm{A}$.

Montrer que $(\mathrm{A}_p)_{p \geqslant p_0}$ est une suite de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et convergente, en précisant sa limite.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que l'application :

$$\varphi_d : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{MB}}(x)$$

est continue.

En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{p \to +\infty} \chi_{\mathrm{A}_p\mathrm{B}}(x)$.

e) Montrer de même l'existence et la valeur de $\lim\limits_{p \to +\infty} \chi_{\mathrm{BA}_p}(x)$.

f) À l'aide de la question 4., montrer que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.

Solution (**Ex.95** – *Les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont égaux*)

1. $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \det(\mathrm{AB}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathrm{BA}) \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{BA})$.

2. a) $\mathrm{ABX} = \lambda\mathrm{X}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{X} \neq 0$, donc $\mathrm{ABX} \neq 0$.

$\mathrm{BX} = 0 \Rightarrow \mathrm{ABX} = 0$: impossible, donc $\mathrm{BX} \neq 0$.

b)
- $\mathrm{BX} \neq 0$.
- $(\mathrm{BA})\mathrm{BX} = \mathrm{B}(\mathrm{AB})\mathrm{X} = \mathrm{B}(\lambda\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{BX})$.

Donc BX est vecteur propre de BA, associé à la valeur propre λ.

3. 1. et 2. prouvent $\mathrm{Sp}(\mathrm{AB}) \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{BA})$, mais comme A et B jouent un rôle symétrique, $\mathrm{Sp}(\mathrm{BA}) \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{AB})$, d'où finalement $\mathrm{Sp}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{BA})$.

4. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x\mathrm{A} - \mathrm{ABA} = (x\mathrm{I}_n - \mathrm{AB})\mathrm{A}$ donne $\det(x\mathrm{A} - \mathrm{ABA}) = \chi_{\mathrm{AB}}(x)\det \mathrm{A}$.

$x\mathrm{A} - \mathrm{ABA} = \mathrm{A}(x\mathrm{I}_n - \mathrm{BA})$ donne $\det(x\mathrm{A} - \mathrm{ABA}) = \det(\mathrm{A})\chi_{\mathrm{BA}}(x)$.

En simplifiant par $\det(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}^*$ (car A inversible) : $\chi_{\mathrm{AB}}(x) = \chi_{\mathrm{BA}}(x)$.

b) Le polynôme $\chi_{\mathrm{AB}} - \chi_{\mathrm{BA}}$ possède une infinité de racines (il est nul sur $\mathbb{R}$), donc est le polynôme nul, donc $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.

Donc AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec la même multiplicité.

5. Dans cette question, on suppose A non inversible, et on va étendre la propriété précédente à A grâce à un argument topologique de continuité.

a) $\chi_{(-\mathrm{A})}$ est un polynôme de degré n, donc possède au plus n racines réelles.
$\chi_{(-\mathrm{A})}(0) = \det(\mathrm{A}) = 0$ car A n'est pas inversible.

b) • Si $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0\}$, alors la propriété est acquise avec $p_0 = 1$ car $\forall p \geqslant 1, \dfrac{1}{p} \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

• Si $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \neq \{0\}$, $\left\{ |\lambda|\,, \lambda \in \big(\mathrm{Sp}(-\mathrm{A}) \cap \mathbb{R}\big) \setminus \{0\} \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ finie non vide, donc admet un plus petit élément $\alpha = \min \left\{ |\lambda|\,, \lambda \in \big(\mathrm{Sp}(-\mathrm{A}) \cap \mathbb{R}\big) \setminus \{0\} \right\}$. *Autrement dit, α est la plus petite valeur absolue de des valeurs propres réelles non nulles de $-\mathrm{A}$.*
Alors : $\forall p > \dfrac{1}{\alpha}$, $\quad \dfrac{1}{p} < \alpha$, et donc $\dfrac{1}{p} \notin \mathrm{Sp}(-\mathrm{A})$. $p_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$ convient par exemple.

c) • Pour $p \geqslant p_0$, $\det(\mathrm{A}_p) = \chi_{(-\mathrm{A})}\big(\dfrac{1}{p}\big) \neq 0$ car $\dfrac{1}{p} \notin \mathrm{Sp}(-\mathrm{A})$, donc $\mathrm{A}_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

• La convergence par coordonnées donne clairement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_p = \mathrm{A}$.

d) $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{MB}$ est continue (continuité du produit matriciel), donc $\mathrm{M} \mapsto x\mathrm{I}_n - \mathrm{MB}$ est continue (continuité de la somme), donc $\mathrm{M} \mapsto \det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{MB})$ est continue par composition (par continuité du déterminant), donc φ_d est continue.
$\chi_{\mathrm{A}_p\mathrm{B}}(x) = \varphi_d(\mathrm{A}_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \varphi_d(\mathrm{A}) = \chi_{\mathrm{AB}}(x)$ par continuité.

e) $\varphi_g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{BM}}(x)$ est tout aussi continue, donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \chi_{\mathrm{BA}_p}(x)$ existe et vaut $\chi_{\mathrm{BA}}(x)$.

f) À l'aide de la question 4., montrer que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$. Comme A_p est inversible pour tout $p \geqslant p_0$, $\chi_{\mathrm{A}_p\mathrm{B}}(x) = \chi_{\mathrm{BA}_p}(x)$ par la question 4.
Par unicité de la limite : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \chi_{\mathrm{A}_p\mathrm{B}}(x) = \lim_{p\to+\infty} \chi_{\mathrm{BA}_p}(x)$, donc $\chi_{\mathrm{AB}}(x) = \chi_{\mathrm{BA}}(x)$, et ceci pour tout x de $\mathbb{R}$... Gagné!!!!! $\chi_{\mathrm{AB}} - \chi_{\mathrm{BA}}$ a une infinité de racines, donc $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.

Exercice 96 *Un espace vectoriel de matrices diagonalisables*
Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{M}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.

2. Justifier que toute matrice $\mathrm{M}_{a,b,c}$ de F est diagonalisable.
Que valent $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_{a,b,c})} \lambda$ et $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_{a,b,c})} \lambda$?

3. Donner deux matrices J et K de E telles que $(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ soit une base de F.

4. Déterminer les éléments propres de J et K.

5. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déduire de la question précédente les vecteurs propres puis les valeurs propres de $\mathrm{M}_{a,b,c}$.

Chapitre 5

Espaces euclidiens et isométries

Exercice 97 *Produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ soit orthonormale pour le produit scalaire défini par

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}^{(k)}(0) \mathrm{Q}^{(k)}(0).$$

Solution (**Ex.97** – *Produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.)
• Pour la bilinéarité et la symétrie, c'est tout bon par linéarité de la dérivation et de l'évaluation des polynômes, et par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
• Pour la positivité, il faut et il suffit que les a_k soient tous positifs. En effet, si $a_k < 0$, $\left\langle \mathrm{X}^k, \mathrm{X}^k \right\rangle = (k!)^2 a_k < 0$, ce qui est interdit.
• Pour la définition, il faut et il suffit que les a_k soient tous strictement positifs. En effet, si $a_k = 0$, $\left\langle \mathrm{X}^k, \mathrm{X}^k \right\rangle = (k!)^2 a_k = 0$ bien que $\mathrm{X}^k \neq 0$, ce qui est interdit.
• Pour $i \neq j$, $\left\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j \right\rangle = 0$, et la base canonique est orthogonale.
• $\left|\left|\mathrm{X}^k\right|\right|^2 = \left\langle \mathrm{X}^k, \mathrm{X}^k \right\rangle = (k!)^2 a_k$. Le seul choix qui rende orthonormale la base canonique est :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], \quad a_k = \frac{1}{(k!)^2}$$

Ainsi : $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2} \mathrm{P}^{(k)}(0) \mathrm{Q}^{(k)}(0)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 98 *Produit scalaire canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose, pour A et B dans E, $\qquad \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}.\mathrm{B})$.

1. Montrer que
$$\forall \mathrm{A} = (a_{i,j}), \mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \sum_{(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$

2. Vérifier que $\langle ., . \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une base orthonormale ?

4. Soit Δ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. Déterminer $\Delta^{\perp}$.

Solution (**Ex.98** – *Produit scalaire canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. Calculons explicitement $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ en fonction des coefficients de A et B.
$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A})_{i,j} (\mathrm{B})_{j,i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{j,i} \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i} b_{j,i}$$
ce qui est la somme voulue, quitte à permuter le nom des indices muets.
À retenir :
$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices A et B... exactement comme le produit canonique de $\mathbb{R}^n$.
En particulier, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{A} \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$ est la somme des carrés des coefficients de A.

2. $\langle ., . \rangle$ est bilinéaire car la transposition et la trace le sont.
$\langle ., . \rangle$ est symétrique car $\mathrm{tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB}\big) = \mathrm{tr}\big({}^{\mathrm{t}}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{BA}\big)\big) = \mathrm{tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{BA}\big)\big)$.
est positif, et ne s'annule que si tous les coefficients de A sont nuls, i.e. si $\mathrm{A} = 0$.
$\langle ., . \rangle$ est positif et défini.

3. Comme vu plus haut, $\langle \mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{k,\ell} \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$.
Si $(i,j) \neq (k,\ell)$, le seul « 1 » des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$ n'est pas au même endroit, donc tous les produits sont nuls, donc $\langle \mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{k,\ell} \rangle = 0$
De plus, $||\mathrm{E}_{i,j}||^2$ est la somme des carrés de ses coefficients, donc vaut 1.
Ainsi la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

4. Déterminer $\Delta^{\perp}$ (on pourra commencer par déterminer une base orthonormale de Δ). La famille $(\mathrm{E}_{i,i})_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ est une base de Δ, orthonormale puisque extraite d'une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Première approche -

Alors, par complétion en une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\left((\mathrm{E}_{i,j})_{i \neq j}\right)$ est le supplémentaire orthogonal de Δ...

- Seconde approche -

Si $A \in \Delta^{\perp}$, alors $A \perp E_{i,i}$ pour tout i. Or $\langle A, E_{i,i} \rangle = a_{i,i}$, donc $a_{i,i} = 0$ pour tout i.

- Bilan, par l'une ou l'autre approche -

$\Delta^{\perp}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 99 *Exemple de produit scalaire dans un espace de suites*

Soit $E = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*},\ \sum\limits_{n \geqslant 1} u_n^2 \text{ converge}\}$.

1. Étudier si les suites x, y et z définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad z_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

sont des vecteurs de E.

2. a) Justifier que, pour tous réels a et b, $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

b) Montrer que si u et v sont dans E, alors $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n v_n$ converge.

c) En déduire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que
$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},\ (u, v) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$$
est un produit scalaire sur E.

Solution (**Ex.99** – *Exemple de produit scalaire dans un espace de suites*)

1. $\sum\limits_{n \geqslant 0} x_n^2$ converge, $\sum\limits_{n \geqslant 0} y_n^2$ diverge, $\sum\limits_{n \geqslant 0} z_n^2$ converge, donc $x, z \in E$, $y \notin E$.

2. a) $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2|ab| \geqslant 0 \Rightarrow |ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{2} v_n^2$ assure l'absolue convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n v_n$.

c) E est non vide (par 1.) et, pour $u \in E$ et $v \in E$,
$(\lambda u + v)_n^2 = (\lambda u_n + v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + v_n^2$ assure la convergence par linéarité de $\sum\limits_{n \geqslant 0} (\lambda u_n + v_n)^2$ donc $\lambda u + v \in E$

3. Pas de problème d'existence par 2.b). Linéarité, symétrie sans problème, positivité, définition non plus.

Exercice 100 *Quatre applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

1. Montrer que le carré de la moyenne (arithmétique) de n nombres réels est inférieur (ou égal) à la moyenne (arithmétique) de leur carré.
2. Quel est le minimum de $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$ pour $(a_i)_{i=1}^n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$?
3. Quel est le minimum de
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$
pour f continue strictement positive sur $[\,a\,;\,b\,]$?
4. Soit $a < b$. Montrer que, pour toute fonction f continue sur $[\,a\,;\,b\,]$,
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t.$$

Solution (**Ex.100** – *Quatre applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*)

1. Soit $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels.
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x = (a_i, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = \dfrac{1}{n}(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
Alors $\big(\langle x, y\rangle\big)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$ est le carré de la moyenne des $(a_i)_i$.
Et $||x||^2\,||y||^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\big(n \times \frac{1}{n^2}\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ est la moyenne des carrés des $(a_i)_i$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité voulue... avec égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux entre eux.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $y = (\sqrt{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) = ||x||^2\,||y||^2 \geqslant \langle x, y\rangle^2 = n^2$.
Ce minorant est atteint pour $a_1 = \cdots = a_n = 1$ par exemple.
3. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit f continue strictement positive.
On pose $x = \sqrt{f}$ et $y = 1/\sqrt{f}$.
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = ||x||^2\,||y||^2 \geqslant \langle x, y\rangle^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$$
Ce minorant est atteint pour $f = 1$ par exemple, donc c'est un minimum.

4. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit f continue. Alors

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \left\langle f, t\mapsto \frac{1}{b-a}\right\rangle^2$$

$$||f||^2 \left|\left|t\mapsto \frac{1}{b-a}\right|\right|^2 = \frac{1}{(b-a)^2}\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t$$

d'où l'inégalité par Cauchy-Schwarz.

Exercice 101 *Étude d'une isométrie de* $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace euclidien canonique $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{M} \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a) Justifier que f est une isométrie.

b) Déterminer l'ensemble F des vecteurs de E fixes par f.

c) Déterminer une base orthonormale $\mathcal{C} = (u,v,w)$ de E telle que :

- (u) soit une base de F ;
- (v,w) soit une base de $\mathrm{F}^\perp$;
- $\mathcal{C}$ ait la même orientation que $\mathcal{B}$.

2. a) Justifier que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par f.

b) Montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{B}\end{pmatrix}$ où $\mathrm{B}\in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

c) A-t-on $\mathrm{B}\in\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$?

Solution (**Ex.101** – *Étude d'une isométrie de* $\mathbb{R}^3$)

1. a) On vérifie que les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ne pas oublier le "1/4" pour la norme des vecteurs !) donc $\mathrm{M}\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et f est une isométrie.

b) Soit $(x,y,z)\in\mathrm{E}$.

$$f((x,y,z)) = (x,y,z) \Leftrightarrow (\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4\mathrm{M}-4\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x+y+\sqrt{6}z = 0\\ -3x+3y-\sqrt{6}z = 0\\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)\in\mathrm{Vect}((1,1,0)).$$

Donc $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$.

c) Soit $(x,y,z) \in \mathrm{E}$.

$(x,y,z) \in \mathrm{F}^\perp \Leftrightarrow \big((x,y,z) \mid (1,1,0)\big) = 0 \Leftrightarrow x+y=0$.

Donc $\mathrm{F}^\perp = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0),(0,0,1)\big)$.

Prenons $u' = (1,1,0)$, $v' = (1,-1,0)$ et $w' = (0,0,1)$.

$\mathcal{C}' \overset{\text{déf.}}{=} (u',v',w')$ est une base orthogonale de E vérifiant

- (u') est une base de F ;
- (v',w') est une base de $\mathrm{F}^\perp$.

Mais $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}') = -2 < 0$. On permutant v' et w' on obtiendra une base directe.

Ainsi : $\mathcal{C} \overset{\text{déf.}}{=} (u;v;w) \overset{\text{déf.}}{=} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0);(0,0,1);\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)\right)$ convient.

- $\mathcal{C}$ ait la même orientation que $\mathcal{B}$.

2. a) Puisque $\forall t \in \mathrm{F}, f(t) = t$, F est stable par F. Comme f est une isométrie, $\mathrm{F}^\perp$ est aussi stable par f.

Sinon, on peut aussi vérifier que $f(v) \in \mathrm{Vect}(v,w)$ et $f(w) \in \mathrm{Vect}(v,w)$. C'est plus long...

b) $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ est une décomposition en sous-espace stable donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale par blocs, et comme $\mathrm{F} = \mathrm{E}_1$, on peut écrire $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$

où $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}$ est une b.o.n. et f une isométrie donc ${}^t\mathrm{NN} = \mathrm{I}_3$, or ${}^t\mathrm{NN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{B} \end{pmatrix}$, donc ${}^t\mathrm{BB} = \mathrm{I}_2$: $\mathrm{B} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

c) $\det(\mathrm{M}) = 1$, donc $\det(\mathrm{N}) = \det(f) = \det(\mathrm{M}) = 1$. Or $\det(\mathrm{N}) = \det(\mathrm{I}_1)\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{B})$, donc $\det(\mathrm{B}) = 1$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{Exercice 102}}$ *Exemples de matrices de projections orthogonales*

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique) représenté par la matrice $\mathrm{M} \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Justifier que f est un projecteur orthogonal et préciser sur quel sous-espace a lieu cette projection.

2. Soit F le plan d'équation $x - y - z = 0$. Déterminer la matrice représentant la projection orthogonale de E sur F dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

Solution (**Ex.102** – *Exemples de matrices de projections orthogonales*)

1. $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$ donc $f^2 = f$, donc f est un projecteur.

Plus précisément, f est le projecteur de E sur $E_1 = \mathrm{Im}f$ parallèlement à $E_0 = \mathrm{Ker}f$.
On peut observer que $C_1 - 2C_2 - C_3 = 0$,
donc $\mathrm{rg}(f) = 2$, $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}((5,2,1),(2,2,-2))$ et $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}((1,-2,-1))$.
Or $\langle (5,2,1),(1,-2,-1)\rangle = 0$ et $\langle (2,2,-2),(1,-2,-1)\rangle = 0$, donc $\mathrm{Im}f \perp \mathrm{Ker}f$.
Donc f est une projection orthogonale.

2. $\big((1,1,0);(1,0,1)\big)$ est une base de F, et $(u,v) \overset{\text{déf.}}{=} \big(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0); \frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2)\big)$ en est une base orthonormale.
On calcule les images des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ par la formule : $p_F(e_i) = \big(e_i \mid u\big)u + \big(e_i \mid v\big)v$.
Finalement : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_F) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 103 *Étude d'un endomorphisme*

Soit n un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ telle que (a,b) soit une famille orthonormale.
On définit sur E l'application f par :
$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a, x\rangle\, b - \langle b, x\rangle\, a.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2. a) Déterminer $\mathrm{Ker}f$.
b) Déterminer $\mathrm{Im}f$, en en précisant une base.
c) Justifier que $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont supplémentaires.

3. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$
On dit que f est antisymétrique.

4. Que dire, pour tout $(x,y) \in E^2$, de $\big\langle f^2(x), y\big\rangle = -\big\langle x, f^2(y)\big\rangle$?
On dit que f^2 est symétrique.

Solution (**Ex.103** – *Étude d'un endomorphisme*)

1. $\forall x \in E, f(x) \in E$ puisque $a, b \in E$.
$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \langle a, \lambda x + y\rangle\, b - \langle b, \lambda x + y\rangle\, a = \lambda(\langle a, x\rangle\, b - \langle b, x\rangle\, a) + (\langle a, y\rangle\, b - \langle b, y\rangle\, a) = \lambda f(x) + f(y)$.

2. a) Comme (a,b) est libre car orthonormale,
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\langle a, x\rangle = 0 \text{ et } \langle b, x\rangle = 0) \Leftrightarrow x \in (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}.$$
$\mathrm{Ker}f = (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.

b) $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Vect}(a,b)$ par définition de f. De plus, $f(a) = ||a||^2 b = b$ donc $b \in \mathrm{Im}f$, et $f(b) = -||b||^2 a = -a$ donc $a \in \mathrm{Im}f$. Donc $\mathrm{Vect}(a,b) \subset \mathrm{Im}f$.
$\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(a,b)$.

c) $\mathrm{Ker}f = (\mathrm{Im}f)^\perp$ donc $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont supplémentaires (l'un est l'orthogonal de l'autre).

3. $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2$,

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \langle \langle a,x\rangle b - \langle b,x\rangle a, y\rangle = \langle a,x\rangle \langle b,y\rangle - \langle b,x\rangle \langle a,y\rangle \\ &= \langle \langle b,y\rangle a, x\rangle - \langle \langle a,y\rangle b, x\rangle = \langle \langle b,y\rangle a - \langle a,y\rangle b, x\rangle = \langle -f(y), x\rangle \\ &= -\langle f(y), x\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.\end{aligned}$$

On dit que f est antisymétrique.

4. Utilisons la question précédente.
$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle f\circ f(x), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f\circ f(y)\rangle$
Donc $f \circ f$ est symétrique.

Exercice 104 *Une caractérisation des projections orthogonales*

1. Soit E l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent $\dfrac{1}{n}$.

a) Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de E. Montrer que : $||f(x)|| \leqslant ||x||$.

b) Montrer que f est un projecteur orthogonal.

2. Soit maintenant E un espace euclidien quelconque et p un projecteur de E.

a) Supposons $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}p$ orthogonaux. Montrer que :
$$\forall x \in \mathrm{E},\ ||p(x)|| \leqslant ||x||.$$

b) Supposons $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}p$ non orthogonaux. Montrer que :
$$\exists x \in \mathrm{E},\ ||p(x)|| > ||x||.$$

c) Quelle caractérisation des projections orthogonales peut-on en déduire ?

Solution (**Ex.104** – *Une caractérisation des projections orthogonales*)

1. a) $f(x) = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}(1,\ldots,1)$, donc $||f(x)||^2 = \dfrac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{n^2}\,||(1,\ldots,1)||^2$, donc $||f(x)||^2 = \dfrac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{n}$. Comme $||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, il s'agit de démontrer que $(x_1+\cdots+x_n)^2 \leqslant n(x_1^2+\cdots+x_n^2)$, ce qui est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $u = x$ et $v = (1,\ldots,1)$...

b) Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormale, la matrice M représentant f vérifie $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$ et ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$: c'est donc la matrice d'un projecteur orthogonal.
Remarque : vous pouvez vérifier que f est la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathrm{Vect}\big((1,\ldots,1)\big)$.

2. a) Supposons $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}p$ orthogonaux. Soit $x \in \mathrm{E}$.

J'écris : $x = x-p(x)+p(x)$ et je remarque que $x-p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $(x - p(x)) \perp x$. Par le théorème de Pythagore,
$||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2 \geqslant ||p(x)||^2$, d'où $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

b) Supposons $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}p$ non orthogonaux.
Soit $x \in (\mathrm{Ker}(p))^{\perp} \setminus \mathrm{Im}(p)$ (x existe par hypothèse ...)
J'utilise le même procédé qu'en a) :
$||p(x)||^2 = ||p(x) - x + x||^2 = ||p(x) - x||^2 + ||x||^2$ car $p(x) - x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x \in (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$.
Or $x \neq p(x)$ car $x \notin \mathrm{Im}(p)$, donc $||p(x) - x|| > 0$.
Du coup, $||p(x)||^2 > ||x||^2$, i.e. $||p(x)|| > ||x||$.

c) Comme une projection est orthogonale si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux, on a démontré :
une projection est orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in \mathrm{E}, ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

$\boxed{\textbf{Exercice 105}}$ *Orthogonalité des polynômes de Tchebychev*

Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par :

$$\mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

1. a) Calculer T_2 et T_3.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n.

2. a) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

b) En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$, les racines de T_n.

3. Soit f une fonction continue sur $[-1;1]$. À l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos(t))\mathrm{d}t$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ existe.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Montrer que

$$\langle .,. \rangle : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(u)\mathrm{Q}(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

est un produit scalaire sur E.

5. Montrer que la famille $(\mathrm{T}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

6. En déduire une base orthonormale de E.

7. a) Déduire de la question précédente (et sans aucun calcul d'intégrale !) le projeté orthogonal $p_{\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^2)$ de X^2 sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

b) Déterminer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(u^2+au+b\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u.$

Solution (**Ex.105** – *Orthogonalité des polynômes de Tchebychev*)

1. a) $\mathrm{T}_2=2\mathrm{X}^2-1$, $\mathrm{T}_3=4\mathrm{X}^3-3\mathrm{X}$.

b) Par récurrence sur n, on montre que :

- $\deg \mathrm{T}_n=n$,
- $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_0)=1$ et $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_n)=2^{n-1}$ si $n\geqslant 1$,
- T_n a la même parité que l'entier n.

On vérifie la propriété aux rangs $n=0$ et $n=1$, puis on montre que les propriétés aux rangs n et $n+1$ entraînent la propriété au rang $n+2$.

2. a) Là encore, par une récurrence (du même type que dans la question précédente),

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos(x))=\cos(nx).$$

Détails :

- La relation est vraie pour $n=0$ et $n=1$.
- Supposons-la vraie pour n et $n+1$. Par définition de T_{n+2},

$\mathrm{T}_{n+2}(\cos(x))=2\cos(x)\mathrm{T}_{n+1}(\cos(x))-\mathrm{T}_n(x)=2\cos(x)\cos((n+1)x)-\cos(nx)=$
$2\cos(x)(\cos(nx)\cos(x)-\sin(nx)\sin(x))-\cos(nx)=$
$\cos(nx)(2\cos^2(x)-1)-\sin(nx)(2\sin(x)\cos(x))=$
$\cos(nx)\cos(2x)-\sin(nx)\sin(2x)=\cos((n+2)x)$ et c'est gagné !

On peut mener le calcul « de bas en haut », c'est-à-dire partir de $\cos((n+2)x)$*...*

b) On cherche les racines dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

Soit α dans $[-1\,;\,1]$ et $x\in[0\,;\,\pi]$ tel que $\alpha=cos(x)$.

$\mathrm{T}_n(\alpha)=0\Leftrightarrow \mathrm{T}_n(\cos(x))=0\Leftrightarrow\cos(nx)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},nx=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}.$

Comme $x\in[0\,;\,\pi]$, seuls les $k\in[\![0\,;\,n-1]\!]$ sont possibles.

$\mathrm{T}_n(\alpha)=0\Leftrightarrow\exists k\in[\![0\,;\,n-1]\!],x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\Leftrightarrow\exists k\in[\![0\,;\,n-1]\!],\alpha=\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$

Comme la suite $\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une suite strictement croissante de $[0\,;\,\pi]$ et comme cos est strictement croissante sur $[0\,;\,\pi]$, les n nombres

$$\alpha_k\overset{\text{déf.}}{=}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\qquad(k\in[\![0\,;\,n-1]\!])$$

sont deux à deux distinctes.

Comme T_n est de degré n, T_n possède au plus n racines distinctes. Donc les $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ sont exactement les n racines de T_n.

3. À l'aide de l'intégrale $\int_0^\pi f(\cos(t))\mathrm{d}t$, montrer que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ existe. L'intégrale $\int_0^\pi f(\cos(t))\mathrm{d}t$ existe : elle n'est pas impropre puisque $t \mapsto f(\cos(t))$ est continue sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.
Le changement de variable $u = \cos(t)$ est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant sur $]\,0\,;\,\pi\,[$.
$\frac{du}{dt} = -\sin(t)$ et $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ pour $t \in\,]\,0\,;\,\pi\,[$, donc $dt = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$.
Enfin $t = 0$ entraîne $u = 1$, $t = \pi$ entraîne $u = -1$.
Le théorème de changement de variable assure que $\int_{-1}^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ existe, et que
$$\int_{-1}^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_0^\pi f(\cos(t))\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que $\langle .,. \rangle : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \longmapsto \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{P}(u)\mathrm{Q}(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ est un produit scalaire sur E. Démonstration classique. On peut alléger l'écriture en remarquant que
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{P}(u)\mathrm{Q}(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_0^\pi \mathrm{P}(\cos(t))\mathrm{Q}(\cos(t))\mathrm{d}t$$

5. Pour $i \neq j$,
$$\langle \mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j\rangle = \int_0^\pi \mathrm{T}_i(\cos(t))\mathrm{T}_j(\cos(t))\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(it)\cos(jt)\mathrm{d}t$$
Or $\cos(it)\cos(jt) = \frac{1}{2}(\cos((i+j)t) + \cos((i-j)t))$, d'où
$\langle \mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((i+j)t)}{i+j} + \frac{\sin((i-j)t)}{i-j}\right]_0^\pi = 0$ puisque sin s'annule aux multiples de π.
La famille $(\mathrm{T}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de E, puisque étant orthogonale sans vecteur nul, elle est libre, et compte $n+1 = \dim(\mathrm{E})$ vecteurs.

6. $||\mathrm{T}_i||^2 = \int_0^\pi (\mathrm{T}_i(\cos(t))^2\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos^2(it)\mathrm{d}t$, or $\cos^2(it) = \frac{1}{2}(1+\cos(2it))$,

- si $i = 0$, $||\mathrm{T}_i||^2 = \pi$
- si $i \neq 0$, $||\mathrm{T}_i||^2 = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(it)}{i}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{T}_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{T}_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{T}_2, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{T}_n\right)$ est une base orthonormale de E.

7. a) La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{T}_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{T}_1\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Donc $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \dfrac{1}{\pi}\left\langle X^2, T_0\right\rangle T_0 + \dfrac{2}{\pi}\left\langle X^2, T_1\right\rangle T_1$.

Pour calculer $\left\langle X^2, T_i\right\rangle$, observons que $X^2 = \dfrac{1}{2}T_2 + \dfrac{1}{2}T_0$. Par orthogonalité de la famille (T_0, T_1, T_2) :

$\left\langle X^2, T_0\right\rangle = \dfrac{1}{2}\left|\left|T_0\right|\right|^2 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left\langle X^2, T_1\right\rangle = 0$.

Donc $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \dfrac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(u^2+au+b\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(u^2-(\alpha u+\beta\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u =$
$\displaystyle\min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}\left|\left|X^2-(\alpha X+\beta)\right|\right|^2 = \min_{P\in\mathbb{R}_1[X]}\left|\left|X^2-P\right|\right|.$

Or d'après le cours ce minimum existe et est atteint (uniquement) pour $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$ i.e. $P = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(u^2+au+b\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \left|\left|X^2-\frac{1}{2}\right|\right|^2 = \left|\left|\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{2}T_0-\frac{1}{2}\right|\right|^2 = \left|\left|\frac{1}{2}T_2\right|\right|^2 =$
$\displaystyle\frac{1}{4}\left|\left|T_2\right|\right|^2 = \frac{\pi}{8}$

Exercice 106 *L'orthogonal est-il toujours un supplémentaire ?*

Soit $E = \mathcal{C}([-1\,;\,1], \mathbb{R})$ (*i.e.* l'espace vectoriel des applications continues de $[-1\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$) muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Soit F et G les sous-espaces

$F = \{f \in E, \forall x \in [-1\,;\,0], f(x) = 0\}$ et $G = \{g \in E, \forall x \in [0\,;\,1], g(x) = 0\}$.

On désigne par $F^\perp$ l'ensemble : $F^\perp = \{g \in E, \forall f \in F, g \perp f\}$.

1. F et G sont-ils en somme directe ?
2. Montrer que $G \subset F^\perp$.
3. Montrer que $F^\perp \subset G$ (on pourra raisonner par l'absurde).
4. F et $F^\perp$ sont-ils supplémentaires ?

Solution (**Ex.106** – *L'orthogonal est-il toujours un supplémentaire ?*)

1. Soit $f \in F \cap G$. $f \in F \Rightarrow \forall x \in [-1\,;\,0], f(x) = 0$ et $f \in G \Rightarrow \forall x \in [0\,;\,1], f(x) = 0$, donc f est la fonction nulle de E.
2. Soit $g \in G$. Alors, pour toute $f \in F$,
$\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} 0 \times g(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t) \times 0\mathrm{d}t = 0 + 0 = 0$
Donc $g \in F^\perp$, donc $G \subset F^\perp$.

3. Supposons qu'il existe $g \in \mathrm{F}^\perp$ avec $g \notin \mathrm{G}$.
Alors il existe $c \in]\,0\,;\,1\,[$ tel que $g(c) \neq 0$ (on peut imposer $0 < c < 1$ car g étant continue, si $g(0) \neq 0$, il existe un voisinage de 0 sur lequel g ne s'annule pas, idem en 1).
Supposons par exemple $g(c) > 0$.
Par continuité de g en c, il existe un intervalle $]\,a\,;\,b\,[\subset]\,0\,;\,1\,[$ contenant c sur lequel g est strictement positive. Soit f affine par morceaux telle que :
- $f = 0$ sur $[\,-1\,;\,a\,[$,
- $f(a) = 0$ et $f(c) = 1$,
- $f(c) = 1$ et $f(b) = 0$,
- $f = 0$ sur $[\,b\,;\,1\,]$.

Alors fg est strictement positive sur $]\,a\,;\,b\,[$ et nulle ailleurs, donc $\langle f, g\rangle > 0$, ce qui est absurde car $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{F}^\perp$ donc $\langle f, g\rangle = 0$.
On peut raisonner de même si $g(c) < 0$.
Ainsi : $\mathrm{F}^\perp \subset \mathrm{G}$.

4. On a par 2. et 3. $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$.
Par 1., F et $\mathrm{F}^\perp$ sont en somme directe.
Cependant, $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp \neq \mathrm{E}$. En effet, pour toute fonction $\alpha f + \beta g$ avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$, $(\alpha f + \beta g)(0) = 0$. Donc $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ ne contient que des fonctions s'annulant en 0 (exercice : montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ contient exactement toutes les fonctions s'annulant en 0). Donc $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ ne contient pas la fonction constante égale à 1, qui est pourtant dans E...

$\boxed{\textbf{Exercice 107}}$ *Endomorphisme orthogonal et/ou antisymétrique*

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et M sa matrice dans une base orthonormale de E. On dit que f est antisymétrique si M est antisymétrique (c'est-à-dire si ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$).

1. Montrer que deux quelconques des propriétes suivantes entraînent la troisième :
(i) f est orthogonal ; (ii) $f \circ f = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$; (iii) f est antisymétrique.

2. Montrer qu'il y a équivalence entre :
(i) f est antisymétrique ; (ii) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$
(iii) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \langle f(x), x\rangle = 0$.

Solution (**Ex.107** – *Endomorphisme orthogonal et/ou antisymétrique*)

1. Matriciellement :
- Si ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{I}$ et $\mathrm{M}^2 = -\mathrm{I}$, alors $\mathrm{M}^{-1} = {}^t\mathrm{M}$ et $\mathrm{M}^{-1} = -\mathrm{M}$ donc ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$;
- Si ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{I}$ et ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$, alors $\mathrm{M} = -{}^t\mathrm{M}$ et $\mathrm{M}^2 = (-{}^t\mathrm{M})\mathrm{M} = -{}^t\mathrm{MM} = -\mathrm{I}$;
- Si $\mathrm{M}^2 = -\mathrm{I}$ et ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$, alors ${}^t\mathrm{MM} = (-\mathrm{M})\mathrm{M} = -\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}$.

2. • Si ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$ alors $\langle f(x), x\rangle = {}^t\mathrm{MXX} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{MX} = {}^t\mathrm{X}(-\mathrm{M})\mathrm{X} = -{}^t\mathrm{X}(\mathrm{MX}) = -\langle x, f(x)\rangle = -\langle f(x), x\rangle$ donc $\langle f(x), x\rangle = 0$.

• En notant $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base orthonormale telle que $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$,
$\mathrm{M} = (m_{ij}) = (\langle f(e_j), e_i \rangle)$.
Si $\forall x \in \mathrm{E}, \langle f(x), x, = \rangle\, 0$, alors $m_{ii} = \langle f(e_i), e_i \rangle = 0 = -m_{ii}$ et
$$\begin{aligned} m_i j + m_{ji} &= \langle f(e_j), e_i \rangle + \langle f(e_i), e_j \rangle = \\ &= \langle f(e_j), e_i \rangle + \langle f(e_j), e_j \rangle + \langle f(e_i), e_i \rangle + \langle f(e_i), e_j \rangle \\ &= \langle f(e_j + e_i), e_j + e_i \rangle = 0 \text{ donc } m_{ij} = -m_{ji}. \text{ Donc } {}^{\mathrm{t}}\mathrm{M} = -\mathrm{M}. \end{aligned}$$

Exercice 108 *Endomorphisme adjoint*

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E et, pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E, on convient de noter X la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentant $\overrightarrow{x}$: $\mathrm{X} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{x})$.
Pour tout endomorphisme f de E, on appelle *adjoint* de f et on note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice représentative de f : $\quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(f^*\big) = {}^{\mathrm{t}}\big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\big)$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que : $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathrm{E}^2, \quad \big\langle f\big(\overrightarrow{x}\big), \overrightarrow{y} \big\rangle = \big\langle \overrightarrow{x}, f^*\big(\overrightarrow{y}\big) \big\rangle$.

2. Soient f et g deux endomorphismes de E et λ un scalaire. Justifier les relations :
a) $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$; **b)** $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$; **c)** $(f^*)^* = f$.

3. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que :
a) $\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$; **b)** $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$;
c) $\mathrm{Ker}(f \circ f^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$; **d)** $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}(f)$.

Solution (**Ex.108** – *Endomorphisme adjoint*)

1. a) $\langle f(x), y \rangle = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{MXY} = ({}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M})\mathrm{Y} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MY}) = \langle x, f^*(y) \rangle$.
b) Traduction de ${}^{\mathrm{t}}(\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N}) = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M} + {}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}$, ${}^{\mathrm{t}}(\mathrm{MN}) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}$ et ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

2. a) • Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^*)$. Alors ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{MX} = 0$ et
$\forall y, \langle x, f(y) \rangle = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}(\mathrm{MY}) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MX})\mathrm{Y} = 0$ donc $x \in (\mathrm{Im} f)^{\perp}$. Donc $\mathrm{Ker}(f^*) \subset (\mathrm{Im} f)^{\perp}$.
• $\dim \mathrm{Ker}(f^*) = n - \mathrm{rg}(f^*) = n - \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}) = n - \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = n - \mathrm{rg}(f) = n - \dim(\mathrm{Im} f) = \dim((\mathrm{Im} f)^{\perp})$ d'où $\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$.
b) Utilisons a) : $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Im}(f^*)^{\perp}) \perp = (\mathrm{Ker}((f^*)^*))^{\perp} = (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$
c) $f^*(x) = 0 \Rightarrow f \circ f^*(x) = 0$ donc $\mathrm{Ker} f^* \subset \mathrm{Ker}(f \circ f^*)$;
$f \circ f^*(x) = 0 \Rightarrow \langle f(f^*(x)), x \rangle = 0 \Rightarrow$ (par 1.a) $\langle f^*(x), f^*(x) \rangle = 0 \Rightarrow$
$||f^*(x)||^2 = 0 \Rightarrow f^*(x) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f \circ f^*) \subset \mathrm{Ker}(f^*)$.
• Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(f \circ f^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$.
d) Utilisons les relations précédentes :
$\mathrm{Im} f = (\mathrm{Ker}(f^*))^{\perp} = (\mathrm{Ker}(f \circ f^*))^{\perp} = \mathrm{Im}((f \circ f^*)^*) = \mathrm{Im}((f^*)^* \circ f^*) = \mathrm{Im}(f \circ f^*)$.

Exercice 109 *Majoration des coefficients d'une matrice orthogonale*

On utilisera les produits scalaires caononiques respectifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad |a_{i,j}| \leqslant 1$.

2. a) Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

b) Donner un exemple dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ où il y a égalité.

3. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

Solution (**Ex.109** – *Majoration des coefficients d'une matrice orthogonale*)

1. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est unitaire pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$|a_{i,j}| = \sqrt{a_{i,j}^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}^2} \leqslant 1.$$

2. a) Rappelons le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\big(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\big) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$.

Avec : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad b_{i,j} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i,j} \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } a_{i,j} < 0 \end{cases}$, on a : $\big(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\big) = \displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}|$.

De plus, $||\mathrm{A}||^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$ donc $||\mathrm{A}|| = \sqrt{n}$.
Et $||\mathrm{B}||^2 = \displaystyle\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} 1 = n^2$ donc $||\mathrm{B}|| = n$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\big|\big(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\big)\big| \leqslant ||\mathrm{A}||\,||\mathrm{B}||$:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

b) Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz lorsque A et B sont colinéaires.

On cherche donc A colinéaire à $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$...

$\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ fait l'affaire : $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

3. Comment récupérer la somme des coefficients de A ?
Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1.
Alors :

- $\langle \mathrm{U}, \mathrm{AU} \rangle = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{UAU} = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}$,
- $||\mathrm{U}|| = \sqrt{n}$,

- $||\mathrm{AU}|| = ||\mathrm{U}||$ car A est orthogonale, donc une matrice d'isométrie.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 110}}$ *Matrices de projections orthogonales*

Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

2. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}^2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X})$.
Déterminer les matrices dans la base canonique des projections orthogonales sur F puis sur G.

Solution (**Ex.110** – *Matrices de projections orthogonales*)

1. Une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{X}; \sqrt{\frac{5}{8}}(3\mathrm{X}^2 - 1) \right)$.

2. $1 \in \mathrm{F}$, $\mathrm{X}^2 \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{F}^{\perp}$ vue la famille orthonormale précédente, donc $\mathcal{M}(p_{\mathrm{F}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{X} \right)$ est manifestement une base orthonormale de G. On peut s'en servir pour déterminer $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{X}^2)$. Par ailleurs, on a encore $1 \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{G}$.

Donc $\mathcal{M}(p_{\mathrm{G}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 111}}$ *Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme*

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, on désigne par x le triplet (x_1, x_2, x_3).

1. Soit $\mathrm{N} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3}$.
Prouver que N est une norme euclidienne sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour le produit scalaire associé à N.

Solution (**Ex.111** – *Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme*)

1. Produit scalaire associé :
$\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\big(\mathrm{N}(x+y)^2 - \mathrm{N}(x-y)^2\big) =$
$x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$.
$\langle x, x\rangle = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$.

2. (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1;0;0)$, $u_2 = (-2;1;0)$ et $u_3 = (-5;2;1)$ est une orthonormale de E obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 112 *Majoration de la somme des $k^{3/2}$ puis des $k^{5/2}$*

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de n y a-t-il égalité ?

2. Proposer une majoration analogue de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{5/2}$.

Solution (**Ex.112** – *Majoration de la somme des $k^{3/2}$ puis des $k^{5/2}$*)

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs $x = (1, 2, \dots, n)$ et $y = (1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$...
Il n'y a égalité que si x et y sont colinéaires, donc si $n = 1$...

2. Avec les vecteurs $x = (1, 2, \dots, n)$ et $y = (1, 2^{3/2}, \dots, n^{3/2})$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} k^{5/2} \leqslant \frac{\big(n(n+1)\big)^{3/2}\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{6}}.$$

Exercice 113 *Matrices de projection et symétrie orthogonales*

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique) de :

1. la projection orthogonale p sur le plan Q d'équation $x + y + z = 0$.

2. la symétrie orthogonale s admettant le plan Q pour axe.

Solution (**Ex.113** – *Matrices de projection et symétrie orthogonales*)

1. Il est plus rapide de passer par $\mathrm{Q}^{\perp}$...
$(x, y, z) \in \mathrm{Q} \Leftrightarrow \langle (x, y, z), (1, 1, 1)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \perp (1, 1, 1)$, donc $\mathrm{Q}^{\perp} = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$ et une base orthonormale de $\mathrm{Q}^{\perp}$ est (u) avec $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Donc $p_{\mathrm{Q}^{\perp}}((x, y, z)) = \langle (x, y, z), u\rangle\, u = \dfrac{1}{3}(x + y + z)$.

D'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_{\mathrm{Q}^\perp}) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Or $p_{\mathrm{Q}} + p_{\mathrm{Q}^\perp} = id_{\mathrm{E}}$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_{\mathrm{Q}}) = \mathrm{I}_3 - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_{\mathrm{Q}^\perp}) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $s = 2p_{\mathrm{Q}} - id_{\mathrm{E}}$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 114 *Une matrice de symétrie orthogonale*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.

2. Montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution (**Ex.114** – *Une matrice de symétrie orthogonale*)

1. On vérifie que les colonnes de M forment une base orthonormale, donc M est une matrice orthogonale et f une isométrie vectorielle.

2. $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_3$ donc $f^2 = id$ et f une symétrie d'axe $\mathrm{E}_1 = \ker(f - id)$ et de direction $\mathrm{E}_{-1} = \ker(f + id)$. Reste à montrer que $\mathrm{E}_1 \perp \mathrm{E}_{-1}$.
Soit $x \in \mathrm{E}_1$ et $y \in \mathrm{E}_{-1}$ quelconques, $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ les colonnes représentant x et y.
$\langle x, y\rangle = \langle f(x), -f(y)\rangle = -\,{}^{\mathrm{t}}(\mathrm{MX})(\mathrm{MY}) = -\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{MMY} = -\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{XY} = -\langle x, y\rangle$, donc $\langle x, y\rangle = 0$, donc $x \perp y$, donc $\mathrm{E}_1 \perp \mathrm{E}_{-1}$, et la symétrie f est orthogonale.

Exercice 115 *Diagonalisation orthogonale*

Soit $n \geqslant 2$, $\mathrm{J}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Justifier que J_n est diagonalisable, et possède exactement deux sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.

2. En déduire l'existence d'une matrice $\mathrm{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{J}_n = \mathrm{P}_n \times diag(0, \dots, 0, n) \times \mathrm{P}_n^{\mathrm{T}}.$$

3. Déterminer P_2.

4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commute avec J_2, alors il existe $(a,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P_2^T$$

.

Solution (**Ex.115** – *Diagonalisation orthogonale*)

1. $\text{rg}(J_n) = n-1$ donc $0 \in \text{Sp}(J_n)$ et $\dim E_0 = n-1$.
De plus : $E_0 = \text{Vect}\big(E_1 - E_2, E_1 - E_3, \ldots, E_1 - E_n\big)$.
J_n possède au plus une autre valeur propre, dont le sous-espace propre associé sera de dimension 1.
En notant $U_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne ne contenant que des « 1 », $J_n U_n = n U_n$ donc $n \in \text{Sp}(J_n)$ et $E_n = \text{Vect}(U_n)$.
Donc J_n est diagonalisable et $E_0 \oplus E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Comme : $\forall j \in [\![2\,;\,n]\!]\,, \langle E_1 - E_j, U_n\rangle = 0$, on a $E_0 \perp E_n$.

2. Soit $(C_1, \ldots, C_{n-1})$ une base orthonormale de E_0 (obtenue par exemple par le procédé de Gram-Schmidt) et $C_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} U_n$.
Alors la matrice de passage P_n de la base canonique orthonormale à la base $(C_1, \ldots, C_n)$ elle aussi orthonormale est une matrice orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres de J_n, d'où
$J_n = P_n \times diag(0, \ldots, 0, n) \times P_n^{-1} = P_n \times diag(0, \ldots, 0, n) \times P_n^T$.

3. Pour $n = 2$, $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $P_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

4. Notons $J = J_2$, $P = P_2$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que $J = PDP^{-1}$, et notons $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
En multipliant par P^{-1} et P :
$AJ = JA \Leftrightarrow BD = DB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0$.
Donc $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, i.e. $A = P_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P_2^T$.

Exercice 116 *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature de l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution (**Ex.116** – *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)
Symétrie orthogonale d'axe le plan d'équation $x + y - 2z = 0$.

Exercice 117 *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$
Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature de l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution (**Ex.117** – *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)
Projection orthogonale d'axe le plan d'équation $x + y - 2z = 0$.

Exercice 118 *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$
Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on veut étudier la nature de l'endomorphisme φ canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$$

On justifiera que $\mathcal{P} = (\mathrm{E}_1)^\perp$ est stable par φ et on donnera la nature précise de la restriction de φ à $\mathcal{P}$.

Solution (**Ex.118** – *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)
φ est une isométrie, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$. $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)$ est stable par φ et φ est une isométrie donc $\mathcal{P} = (\mathrm{E}_1)^\perp$ est aussi stable.
$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), (0, 1, 0)\right) = (u, v, w)$ est une base orthonormale directe de E adaptée à la somme $\mathrm{E}_1 \oplus \mathcal{P}$, et

$$\mathcal{M}_{(v,w)}(\varphi_{|\mathcal{P}}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\varphi_{|\mathcal{P}}$ est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 119 *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$
Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature de l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution (**Ex.119** – *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)
Symétrie orthogonale d'axe le plan d'équation $2x + y - 2z = 0$.

Exercice 120 *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$
Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature de l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution (**Ex.120** – *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)
Projection orthogonale d'axe le plan d'équation $2x + y - 2z = 0$.

Exercice 121 *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$
Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on veut étudier la nature de l'endomorphisme φ canoniquement associé à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On justifiera que $\mathcal{P} = (\mathrm{E}_1)^\perp$ est stable par φ et on donnera la nature précise de la restriction de φ à $\mathcal{P}$.

Solution (**Ex.121** – *Endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$)
φ est une isométrie, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$. $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(1,0,1)$ est stable par φ et φ est une isométrie donc $\mathcal{P} = (\mathrm{E}_1)^{\perp}$ est aussi stable.
$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), (0,1,0)\right) = (u, v, w)$ est une base orthonormale directe de E adaptée à la somme $\mathrm{E}_1 \oplus \mathcal{P}$, et

$$\mathcal{M}_{(v,w)}(\varphi_{|\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\varphi_{|\mathcal{P}}$ est la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 122 *Matrice de projection symétrique*
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

1. Justifier que A est diagonalisable avec $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}$.

Solution (**Ex.122** – *Matrice de projection symétrique*)

1. $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ donc A est une matrice de projecteur, donc diagonalisable et semblable à $\mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$. En particulier, $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.
2. $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{D}) \overset{\mathrm{D}^2 = \mathrm{D}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{D}^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.
3. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ aux vecteurs :
   $x = (|a_{1,1}|, \ldots, |a_{n,n}|)$ et $y = (1, \ldots, 1)$,
   $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = |\langle x, y\rangle| \leqslant ||y||\,||x|| \leqslant \sqrt{n^2} \times \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2} \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}$.

Exercice 123 *Projection et minimum*
On munit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.\mathrm{B}).$$

1. Vérifier que : $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}), \quad \langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$.

2. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Déterminer $\mathrm{F}^{\perp}$.

3. Déterminer la projection orthogonale p_{F} sur F, puis la projection orthogonale $p_{\mathrm{F}^{\perp}}$ sur $\mathrm{F}^{\perp}$.

4. Soit J_n la matrice de E dont tous les coefficients valent 1. Déterminer la distance de J_n à F, définie par : $d(\mathrm{J}_n,\mathrm{F}) = \min_{\mathrm{A}\in\mathrm{F}} ||\mathrm{J}_n - \mathrm{A}||$.

Solution (**Ex.123** – *Projection et minimum*)

1. $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}) = \sum_{j=1}^{n}[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}]_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$.

2. Comme $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$,

$$\mathrm{A}\in\mathrm{F}^{\perp} \Leftrightarrow \mathrm{A}\perp\mathrm{I}_n \Leftrightarrow \langle \mathrm{A},\mathrm{I}_n\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0, \text{ donc } \mathrm{F}^{\perp} = \ker(\mathrm{tr}).$$

3. $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{I}_n\right)$ est une base orthonormale de F, donc :

$$\forall \mathrm{A}\in\mathrm{E}, \quad p_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = \left\langle \mathrm{A}, \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{I}_n\right\rangle \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\langle \mathrm{A},\mathrm{I}_n\rangle \mathrm{I}_n = \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A})}{n}\mathrm{I}_n.$$

De plus : $p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{F}^{\perp}} = id_{\mathrm{E}}$ donc finalement :

$$p_{\mathrm{F}} : \mathrm{E}\to\mathrm{E}, \mathrm{A}\mapsto \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A})}{n}\mathrm{I}_n \text{ et } p_{\mathrm{F}^{\perp}} : \mathrm{E}\to\mathrm{E}, \mathrm{A}\mapsto \mathrm{A} - \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A})}{n}\mathrm{I}_n.$$

4. Par la propriété de minimisation en norme :

$$d(\mathrm{J}_n,\mathrm{F}) = \min_{\mathrm{A}\in\mathrm{F}} ||\mathrm{J}_n - \mathrm{A}|| = ||\mathrm{J}_n - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{J}_n)|| = ||\mathrm{J}_n - \mathrm{I}_n|| = \sqrt{n^2 - n}$$

Exercice 124 *Égalité entre deux noyaux*

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}\mathrm{A}) = \ker(\mathrm{A}).$$

Solution (**Ex.124** – *Égalité entre deux noyaux*)

Soit $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{AX} = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = 0$, donc $\ker(\mathrm{A})\subset\ker({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA})$.
- ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = 0 \Rightarrow {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{AX})(\mathrm{AX}) = 0 \Rightarrow ||\mathrm{AX}||^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{AX} = 0$, donc $\ker({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA})\subset\ker(\mathrm{A})$.

Exercice 125 *Les endomorphismes conservant l'orthogonalité*

Soit $(\mathrm{E}, (.\mid .), ||.||)$ un espace euclidien.

1. Montrer que si u et v sont unitaires, alors $\big(u+v \mid u-v\big)=0$.
2. Soit f un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2, \qquad (x\perp y)\Rightarrow (f(x)\perp f(y)).$$

   Montrer que si u et v sont unitaires, alors $||f(u)||=||f(v)||$.
3. En déduire qu'il existe $k\in\mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x\in \mathrm{E}, \quad ||f(x)||=k\,||x||\,.$$

Solution (**Ex.125** – *Les endomorphismes conservant l'orthogonalité*)

1. $\big(u+v \mid u-v\big)=||u||^2-||v||^2=1-1=0$.
2. Soit u et v unitaires. Par 1., $(u+v)\perp(u-v)$ donc $f(u+v)\perp f(u-v)$ donc $\big(f(u)+f(v)\mid f(u)-f(v)\big)=0$ donc $||f(u)||^2-||f(v)||^2=0$, d'où $||f(u)||=||f(v)||$.
3. Soit u un vecteur unitaire quelconque et $k=||u||\in\mathbb{R}^+$. La question précédente montre que : $\forall v\in \mathrm{E}, \big(\,||v||=1\big)\Rightarrow\big(\,||f(v)||=k\big)$. Autrement dit, k ne dépend pas du vecteur unitaire choisi...
   Alors :
   - $||f(0)||=||0||=0=k\,||0||\,;$
   - $\forall x\in \mathrm{E}$ tel que $x\neq 0$,

   $||f(x)||=\left|\left|f\big(\,||x||\,.\dfrac{1}{||x||}x\big)\right|\right|=||x||\left|\left|f\big(\dfrac{1}{||x||}x\big)\right|\right|=||x||\times k$ car $\dfrac{1}{||x||}x$ est unitaire.

   Remarque : $f=k.id_{\mathrm{E}}$ est un exemple d'un tel endomorphisme conservant l'orthogonalité.

Exercice 126 *Un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathrm{E}=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique

$$\langle .,.\rangle : \mathrm{E}^2\to \mathrm{E}, (\mathrm{M},\mathrm{N})\mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}.\mathrm{N}).$$

Soit A une matrice de E et f_{A} l'endomorphisme de E définie par

$$f_{\mathrm{A}} : \mathrm{M}\mapsto \mathrm{AM}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_{A} soit un endomorphisme orthogonal de E.

Solution (**Ex.126** – *Un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

$f_{\mathrm{A}}\in\mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\Leftrightarrow \forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \langle f_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}),f_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})\rangle=\langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle$

$\Leftrightarrow \forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \mathrm{tr}\big(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{AN}\big)=\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{N})$

$\Leftrightarrow \forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \mathrm{tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)\mathrm{N})=0$

$\Leftrightarrow \forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \big\langle(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)\mathrm{M},\mathrm{N}\big\rangle=0$

$\Leftrightarrow \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big(\forall \mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{M} \perp \mathrm{N}\big)$
$\Leftrightarrow \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{M} = 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} - \mathrm{I}_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 127 *Puissances de matrices orthogonales et moyenne de puissances*
Soit $n \geqslant 2$.
On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique : $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XY}$
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique : $\langle \mathrm{M}, \mathrm{N} \rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MN})$.
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Quelles sont les seules valeurs propres réelles possibles de A ?

2. Que vaut $||\mathrm{A}||$?

3. On suppose que $1 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

a) On pose $\mathrm{M}_p = \dfrac{1}{p+1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \cdots + \mathrm{A}^p)$, moyenne des $p+1$ premières puissances de A.
Montrer que $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.
En déduire $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathrm{M}_p$.

b) On suppose, jusque la fin, que $\mathrm{A}^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{B}$.
Que vaut $||\mathrm{B}||$?

c) Justifier que, pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{BX} = \mathrm{ABX}$. Que peut-on dire de BX ? Et de B ?

d) Qu'a-t-on prouvé ?

Solution (**Ex.127** – *Puissances de matrices orthogonales et moyenne de puissances*)

1. -1 et 1 car $\forall \mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ||\mathrm{AU}|| = ||\mathrm{U}||$ donc $\mathrm{AU} = \lambda \mathrm{U} \Rightarrow |\lambda| = 1$.

2. $||\mathrm{A}|| = \sqrt{\langle \mathrm{A}, \mathrm{A} \rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA})} \overset{\mathrm{A}\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})}{=} \sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n)} = \sqrt{n}$.

3. a) • Après simplification, $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{M}_p = \dfrac{1}{p+1}\big(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^{p+1}\big)$.
$\big|\big|\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^{p+1}\big|\big| \leqslant ||\mathrm{I}_n|| + \big|\big|\mathrm{A}^{p+1}\big|\big| \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n}$ car d'après 2), car $\mathrm{A}^{p+1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Donc $||(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{M}_p|| \leqslant \dfrac{2\sqrt{n}}{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.
• Comme $1 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible et :
$\mathrm{M}_p = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\big[(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{M}_p\big] \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

b) Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\forall p \in \mathbb{N}, \mathrm{A}^{p+1}\mathrm{X} = \mathrm{AA}^p\mathrm{X}$ donc en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$, $\mathrm{BX} = \mathrm{ABX}$.
Si $\mathrm{BX} \neq 0$, alors BX est vecteur propre de A associé à 1 : impossible.

Donc $\mathrm{BX} = 0$.
On a : $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathrm{BX} = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{B}) = \{0\}$, donc B est la matrice nulle.

c) Ceci est contradictoire : $a) \Rightarrow ||\mathrm{B}|| = \sqrt{n}$ et $b) \Rightarrow ||\mathrm{B}|| = 0$ ...
Donc la suite $(\mathrm{A}^p)_p$ ne converge pas.

Exercice 128 *Isométries diagonalisables*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.
On suppose f diagonalisable. Montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution (**Ex.128** – *Isométries diagonalisables*)

f est une isométrie donc ses seules valeurs propres réelles possibles sont -1 et 1 : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.
Trois cas sont possibles :

- $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = 1 \times id_{\mathrm{E}}$;
- $\mathrm{Sp}(f) = \{-1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = -1 \times id_{\mathrm{E}}$;
- $\mathrm{Sp}(f) = \{-1; 1\}$, et comme f est diagonalisable, dans une base propre $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_q \end{pmatrix}$ (avec $p = \dim(\mathrm{SEP}(f, -1))$ et $q = \dim(\mathrm{SEP}(f, 1))$).

Dans les trois cas, $f^2 = id_{\mathrm{E}}$.
Donc f est une symétrie, toujours d'axe E_1 et de direction E_{-1}.
Soit $u \in \mathrm{E}_1$ et $v \in \mathrm{E}_{-1}$.
f est orthogonale donc conserve le produit scalaire, donc $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, -v\rangle = -\langle u, v\rangle$, donc $\langle u, v\rangle = 0$ et $u \perp v$.
Ceci prouve que $\mathrm{E}_1 \perp \mathrm{E}_{-1}$ donc que f est une symétrie orthogonale.

Exercice 129 *Complémentaire d'une isométrie*

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E.
On pose $g = id_{\mathrm{E}} - f$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \big(\mathrm{Im}(g)\big)^{\perp}$.

Solution (**Ex.129** – *Complémentaire d'une isométrie*)

Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$ et $y \in \mathrm{Im}(g)$.
$x \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $x = f(x)$.
Soit $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = g(z) = z - f(z)$.
$\langle x, y\rangle = \langle x, z - f(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle f(x), f(z)\rangle$ car $x = f(x)$,
$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, z\rangle$ car f conserve le produit scalaire.
$\langle x, y\rangle = 0$.
Ainsi : $\mathrm{Ker}(g) \perp \mathrm{Im}(g)$.
Mais par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{E})$.
Donc $\mathrm{Ker}(g)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 130 *Étude d'une isométrie*
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B}$ sa base canonique.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que f est une isométrie.

2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + z = 0$ est stable par f.

3. $\mathcal{P}^\perp$ est-il stable par f ?

4. Déterminer la matrice de f relativement à une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp = \mathrm{E}$.

Solution (**Ex.130** – *Étude d'une isométrie*)

1. Les colonnes de M forment une famille orthonormale. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, f est une isométrie de E.

2. $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0)) = \mathrm{Vect}(u,v)$.
Or $f(u) = \sqrt{2}v \in \mathcal{P}$ et $f(v) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}u \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$ est stable par f.

3. f est une isométrie et $\mathcal{P}$ est stable par f donc $\mathcal{P}^\perp$ est stable par f.

4. $\mathcal{P}^\perp = \mathrm{Vect}((1,0,1)) = \mathrm{Vect}(w)$.
Prenons $\mathcal{C} = \big(\frac{1}{\sqrt{2}}u, v, \frac{1}{\sqrt{2}}w\big)$, base orthonormale adaptée à $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp = \mathrm{E}$. Alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 131 *Équation matricielle (CCP 2019)*

1. Montrer que $\big(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\big) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB})$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.

2. Montrer que les sous-espaces des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux

3. En déduire que, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2\big) \Leftrightarrow \big(\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big)$.

4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, il existe M non symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$. On pourra chercher M sous la forme $\mathrm{V}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{U}$ avec U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

5. Montrer que toutes les solutions de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont symétriques.

Solution (**Ex.131** – *Équation matricielle (CCP 2019)*)

1. À savoir faire : $\operatorname{tr}({}^{t}AB) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$...

2. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $M = S + A$ avec $S = \frac{1}{2}(M + {}^{t}M) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^{t}M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Et pour S et A symétrique et antisymétrique respectivement :
$\big(S \mid A\big) = \operatorname{tr}({}^{t}SA) = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}({}^{t}(AS)) = \operatorname{tr}({}^{t}S\,{}^{t}A) = \operatorname{tr}(-SA) = -\big(S \mid A\big)$, donc $\big(A \mid S\big) = 0$, i.e. $S \perp A$.

3. • Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^{t}MM = M^2$....
   • Soit $M = S + A$ telle que ${}^{t}MM = M^2$. Alors
   $(S - A)(S + A) = (S + A)^2$, donc $-AS - A^2 = AS + A^2$, donc $A^2 + AS = 0$, donc $AM = 0$, donc $M \perp A$. Comme $S \perp A$, alors $(M - S) \perp A$, i.e. $A \perp A$, donc $A = 0$, et $M = S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $M = V\,{}^{t}U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$${}^{t}MM = M^2 \Leftrightarrow U\,{}^{t}VV\,{}^{t}U = V\,{}^{t}UV\,{}^{t}U \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) U\,{}^{t}U = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right) V\,{}^{t}U$$
Débrouillons nous pour que les deux sommes soient nulles :
$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ conduit à } M = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ i & -1 & i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$
matrice non symétrique vérifiant ${}^{t}MM = M^2$, valable à partir de $n = 3$...

5. Supposons ${}^{t}MM = M^2$. En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, en considérant le premier et le dernier coefficient de ${}^{t}MM$ et de M^2, on a :
$a^2 + c^2 = a^2 + bc$ et $b^2 + d^2 = bc + d^2$, donc $c^2 = bc$ et $b^2 = bc$.
Si $c \neq 0$, on en déduit $b = c$ et M est symétrique.
Si $c = 0$, alors $b^2 = 0$ donc $b = 0 = c$ et M est symétrique.

Exercice 132 *Une formule pour les matrices de projections orthogonales*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$. Pour $X \in E$, X^{T} désigne la transposée de X.
Soit $d \in [\![1\,;n]\!]$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension d.

1. On suppose que $(U_1, \dots, U_d)$ une base orthonormale de F.

Soit $\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{U}_i \mathrm{U}_i^{\mathrm{T}}$.
Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

2. On suppose que $(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_d)$ une base quelconque de F et on note A la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ donc les colonnes sont $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_d$.

a) Montrer que, pour tout X de E,

i – $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff \exists \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{AY} = \mathrm{X}$,

ii – $\mathrm{X} \in \mathrm{F}^{\perp} \iff \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = 0$.

b) Montrer que $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ est une matrice inversible. *On pourra déterminer* $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})$.

c) Soit $\mathrm{M} = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.
Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

3. *Application - Impératif d'utiliser ce qui précède !* Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$

a) en utilisant une base quelconque de F,

b) en utilisant une base orthonormale de F.

Solution (**Ex.132** – *Une formule pour les matrices de projections orthogonales*)

1. $\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}$,

$$\mathrm{MX} = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{U}_i \mathrm{U}_i^{\mathrm{T}} \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{U}_i \langle \mathrm{U}_i, \mathrm{X} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle \mathrm{X}, \mathrm{U}_i \rangle \mathrm{U}_i = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X})$$

d'après la propriété du cours, puisque $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_d)$ est une base orthonormale de F.

2. a) i – Il suffit d'observer que si $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{AY} = \sum_{i=1}^{d} y_i \mathrm{C}_i.$$

Comme $(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_d)$ est une base de F, donc une famille génératrice, on a bien :

$$\mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff \exists \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{AY} = \mathrm{X}.$$

ii – Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{C}_1, \mathrm{X} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathrm{C}_d, \mathrm{X} \rangle \end{pmatrix}$.

Comme $(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_d)$ est une base de F, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = 0 \iff \mathrm{X} \in \mathrm{F}^{\perp}$.

b) • $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

- Soit $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.
$X \in \mathrm{Ker}(A^T A) \Longrightarrow X^T A^T A X = 0 \Longrightarrow ||AX|| = 0 \Longrightarrow AX = 0$.
Or $AX = \sum_{i=1}^{d} x_i C_i$ et $(C_1, \ldots, C_d)$ est une base de F, donc une famille libre.
Donc $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}\big(A^T A\big) = \{0\}$.
- Par la formule du rang, $\mathrm{rg}\big(A^T A\big) = d$ donc $A^T A$ est inversible.

c) Soit $M = A\big(A^T A\big)^{-1} A^T$.
Soit $X \in E$ et $Y = MX$.
① Comme $Y = A\big[(A^T A)^{-1} A^T\big] X$ avec $\big(A^T A\big)^{-1} A^T \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $Y \in F$ d'après **i**.
② $A^T\big(X - Y\big) = A^T X - A^T A (A^T A)^{-1} A^T X = A^T X - A^T X = 0$ donc d'après **ii** $X - Y \in F^{\perp}$.
③ Ainsi $Y \in F$ et $X - Y \in F^{\perp}$, donc Y est le projeté orthogonal de X sur F.
④ Ceci étant vrai pour tout X de E, M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

3. a) Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Alors $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Par le procédé de Gram-Schmidt, prenons

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$U_1 {U_1}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 {U_2}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Et

$$M = U_1 {U_1}^T + U_2 {U_2}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 6

Analyse de première année

Exercice 133 *Limites classiques*

Déterminer les limites des expressions suivantes au point indiqué quand elles existent :

a) $\dfrac{x^2-x-12}{x-4}$ en 4 **b)** $x+\sqrt{x^2-1}$ en $-\infty$ **c)** $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

d) $\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$ **e)** $x\sin\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$ **f)** $x\sin x$ en $+\infty$

g) $\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ en 0 **h)** $\dfrac{\sin x}{x}$ en $-\infty$ **i)** $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en $+\infty$

j) $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0 **k)** $\dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$ **l)** $\cos x\cos\dfrac{1}{x}$ en 0

m) $x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)$ en $+\infty$ **n)** $\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}$ en 1 **o)** $\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}$ en $a>0$

Solution (**Ex.133** – *Limites classiques*)

a) $\forall x\neq 4,\ \dfrac{x^2-x-12}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x+3)}{x-4}=x+3\xrightarrow[x\to 4]{}7.$

b) $\forall x<-1,\ f(x)\overset{\text{déf.}}{=}x+\sqrt{x^2-1}=x+|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$

donc $f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x\dfrac{1}{2x^2}\xrightarrow[x\to-\infty]{}0.$

c) • Version quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\xrightarrow[x\to 0]{}1.$$

• Version développement limité :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\big(1+x/2+o(x)\big)-\big(1-x/2+o(x)\big)}{x}=1+o(1)\xrightarrow[x\to 0]{}1.$$

d) $x\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\dfrac{-a}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim} -a$ donc $x\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0]{} -a$.
Par composition par exp : $\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-a}$.
e) $x\sin\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
f) Soit $f : x\mapsto x\sin x$.
$\forall n\in\mathbb{N}, f(n\pi)=0\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
$\forall n\in\mathbb{N}, f\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
donc f diverge (sans limite) en $+\infty$.
g) $\forall x\in\mathbb{R}^*, \left|\sin x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|\sin x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0$, donc $\sin x\sin\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par encadrement.
h) $\forall x\in\mathbb{R}^*, \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right|=0$, donc $\dfrac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par encadrement.
i) $\forall x>1, \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$, donc $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$. Donc $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
j) $\forall x\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,, x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\leqslant x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\leqslant x\dfrac{1}{x}$ donc $1-\dfrac{1}{x}\leqslant x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\leqslant 1$. Par encadrement, $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
k) Comme $x\mapsto x^x$ croît très vite vers $+\infty$, le petit écart entre $\lfloor x\rfloor$ et x peut ne pas être insignifiant...
Soit $f(x)\overset{\text{déf.}}{=}\dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$
$\forall n\in\mathbb{N}^*, f(n)=\dfrac{n^n}{n^n}=1\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,
$\forall n\in\mathbb{N}^*, f(n+1/2)=\dfrac{(n+1/2)^{n+1/2}}{n^n}\geqslant\dfrac{n^{n+1/2}}{n^n}\geqslant\sqrt{n}$
donc par comparaison $f(n+1/2)\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
f n'admet pas de limite en $+\infty$.
l) $\cos\dfrac{1}{2\pi n}\cos(2\pi n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\cos\dfrac{1}{\pi n+\pi/2}\cos(\pi n+\pi/2)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
$\cos x\cos\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$.
m) $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\underset{x\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{x}$ donc $x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-1\xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$
n) $\forall x\neq 1, \dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x(x-1)^2}}{x-1}=\dfrac{|x-1|\sqrt{x}}{x-1}=sign(x-1)\sqrt{x}$.
$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}=-1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}=1$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}$ n'existe pas.

o) $\sqrt[m]{\dfrac{x}{a}} - 1 = \sqrt[m]{1 + \left(\dfrac{x}{a} - 1\right)} - 1 \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{x}{a} - 1\right) \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{x - a}{ma}$ donc

$$\frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[m]{a}\left(\sqrt[m]{\dfrac{x}{a}} - 1\right)}{\sqrt[n]{a}\left(\sqrt[n]{\dfrac{x}{a}} - 1\right)} \underset{x \to a}{\sim} \frac{\sqrt[m]{a}\dfrac{x-a}{ma}}{\sqrt[n]{a}\dfrac{x-a}{na}} \underset{x \to a}{\sim} \frac{n \sqrt[m]{a}}{m \sqrt[n]{a}}$$

Exercice 134 *Convergence*

1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de
   a) $\ln(n+1) - \ln(n)$; **b)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2. Soit u une suite réelle. *Frai ou faux ?*
   a) $\left(u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right) \Rightarrow \left(u \text{ converge }\right)$?
   b) $\left(u \text{ converge }\right) \Rightarrow \left(u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right)$?

Solution (**Ex.134** – *Convergence*)

1. a) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. a) Faux : les suites $\big(\ln(n)\big)_{n \geqslant 1}$ ou $\big(\sqrt{n}\big)_{n \geqslant 0}$ sont deux contre-exemples.
   b) Vrai : car (u_{n+1}) est une suite extraite de la suite u, donc converge vers la même limite que u.

Exercice 135 *Équivalences et signes*

1. On considère deux suites réelles u et v telles que v soit non nulle à partir d'un certain rang.
   On suppose que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.
   Montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution (**Ex.135** – *Équivalences et signes*)

1. Soit n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0, \quad v_n \neq 0$.
   Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, en prenant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1/2$, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Alors : $\forall n \geqslant n_1, \quad 0 < \dfrac{u_n}{v_n}$.

Donc pour tout $n \geqslant n_1$, u_n et v_n sont de même signe.

2. $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^3} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^3}$.

À partir d'un certain rang, u_n est strictement négatif.

Exercice 136 *Intervalles, segments et continuité*

1. On rappelle, pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, le segment $[\,a\,;\,b\,]$ est défini par :

$$[\,a\,;\,b\,] = \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x \leqslant b\}.$$

On rappelle que $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \leqslant y,\ [\,x\,;\,y\,] \subset \mathrm{I}.$$

a) Soit $a \leqslant b$. Montrer que $[\,a\,;\,b\,] = \{(1-t)a + tb/t \in [\,0\,;\,1\,]\}$.

b) Soit $a < b$ et $c < d$. Montrer qu'il existe une bijection continue $f : [\,a\,;\,b\,] \to [\,c\,;\,d\,]$.

c) Montrer qu'il existe une bijection continue de $]\,-1\,;\,1\,[$ sur $]\,-\infty\,;\,+\infty\,[$.

2. a) Justifier que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

b) Justifier que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

3. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ deux fonctions continues telles que $|f| = |g|$.

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$ (*i.e.* $\big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)\big)$ ou $\big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -g(x)\big)$).

4. Ce résultat demeure-t-il si f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et non plus $\mathbb{R}^*$) ?

Solution (**Ex.136** – *Intervalles, segments et continuité*)

1. a) • Soit $t \in [\,0\,;\,1\,]$ et $x = (1-t)a + tb$.

Comme $a \leqslant b$, $(1-t)a + ta \leqslant x \leqslant (1-t)b + tb$, i.e. $a \leqslant x \leqslant b$.

Donc $x \in [\,a\,;\,b\,]$, donc $[\,a\,;\,b\,] \supset \{(1-t)a + tb/t \in [\,0\,;\,1\,]\}$.

• Supposons $a \neq b$. Soit $x \in [\,a\,;\,b\,]$. On a :

$(1-t)a + tb = x \Leftrightarrow t(b-a) = x - a \Leftrightarrow t = \dfrac{x-a}{b-a}$.

De plus : $0 \leqslant x - a \leqslant b - a$ donc $\dfrac{x-a}{b-a} \in [\,0\,;\,1\,]$.

Donc $x \in \{(1-t)a + tb/t \in [\,0\,;\,1\,]\}$.

Donc $[\,a\,;\,b\,] \subset \{(1-t)a + tb/t \in [\,0\,;\,1\,]\}$.

Si $a = b$, l'inclusion est évidente car $\{(1-t)a + ta/t \in [\,0\,;\,1\,]\} = \{a\}$... car $(1-t)a + ta = a$ $(\forall t)$.

• Par double inclusion, $[\,a\,;\,b\,] = \{(1-t)a + tb/t \in [\,0\,;\,1\,]\}$.

b) Cherchons f affine : $f : x \mapsto \alpha x + \beta$.

$$\begin{cases} f(a) = c \\ f(b) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta = c \\ \alpha b + \beta = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{d-c}{b-a} \\ \beta = c - \dfrac{d-c}{b-a} a = \dfrac{bc-ad}{b-a} \end{cases}$$

et $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ convient car est continue, strictement croissante car $\alpha > 0$, donc réalise une bijection de $[\,a\,;\,b\,]$ sur $f([\,a\,;\,b\,]) = [\,c\,;\,d\,]$.

c) • On peut penser à utiliser la fonction tangente qui est une bijection continue de $]\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$ sur $]\,-\infty\,;\,+\infty\,[$.
$f :]\,-1\,;\,1\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ convient.

• On peut aussi commencer par envoyer bijectivement $[\,0\,;\,1\,[$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, par exemple par $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$.
En effet $f'(x) = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} > 0$ donc f est continue strictement croissante avec $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$.
Puis on prolonge f en en faisant une fonction impaire sur $]\,-1\,;\,1\,[$: pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\dfrac{-x}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.
Finalement, $f :]\,-1\,;\,1\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{1-|x|}$ convient.

2. a) Soit I un intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.
Soit $(x, y) \in \mathrm{J}$ avec (pour fixer les idées uniquement) $x \leqslant y$.
Alors il existe $(x', y') \in \mathrm{I}$ tels que $f(x') = x$ et $f(y') = y$.
Soit $z \in [\,x\,;\,y\,]$. Comme f est continue sur $\mathrm{K} = [\,x'\,;\,y'\,]$ (ou $[\,y'\,;\,x'\,]$ si $y' \leqslant x'$), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z' \in \mathrm{K} \subset \mathrm{I}$ tel que $f(z') = z$.
Donc $z \in \mathrm{J}$. Ainsi $[\,x\,;\,y\,] \subset \mathrm{J}$.
Donc J est un intervalle.

b) Justifier que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Soit $f : [\,a\,;\,b\,] \to \mathbb{R}$ continue et $\mathrm{J} = f([\,a\,;\,b\,])$. f est continue sur un segment, donc est bornée et atteint ses bornes.
En posant $m = \min\limits_{[\,a\,;\,b\,]} f$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{[\,a\,;\,b\,]} f$, on a : $\mathrm{J} \subset [\,m\,;\,\mathrm{M}\,]$.
Mais comme J est l'image par une fonction continue d'un intervalle, J est un intervalle, contenant m et M (f atteint ses bornes...).
Donc : $[\,m\,;\,\mathrm{M}\,] \subset \mathrm{J}$.
Bilan : $\mathrm{J} = [\,m\,;\,\mathrm{M}\,]$ et J est un segment.

3. Soit $h = \dfrac{f}{g}$. Alors $h(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$.
Comme h est continue comme quotient de fonctions continues, $h(\mathbb{R})$ est un intervalle. Donc :

- soit $h(\mathbb{R}) = \{-1\}$ et $f = -g$,
- soit $h(\mathbb{R}) = \{1\}$ et $f = g$.

4. Non : avec $f : x \mapsto x$ et $g = |.|$, on a $|f| = |g|$ mais $f \neq g$ et $f \neq -g$.

Exercice 137 *Fonctions bornées*

Soit f une fonction réelle continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

1. a) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie. Montrer que f est bornée.

b) f atteint-elle nécessairement un maximum global ?

2. On suppose que f est nulle en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f atteint un maximum global et un minimum global.

Solution (**Ex.137** – *Fonctions bornées*)

1. a) Soit $\ell \overset{\text{déf.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Par la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{A}, |f(x) - \ell| \leqslant 1$, donc $\forall x \geqslant \mathrm{A}, \ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$: f est bornée sur $[\,\mathrm{A}\,;\,+\infty\,[$.
Comme f est continue sur $[\,0\,;\,\mathrm{A}\,]$ qui est fermé borné, f est aussi bornée sur $[\,0\,;\,\mathrm{A}\,]$.
Ainsi, f est bornée sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

b) $f : [\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto -\dfrac{1}{x+1}$ est continue strictement croissante avec $f([\,0\,;\,+\infty\,[) = \left[f(0)\,;\, \lim\limits_{+\infty} f \right[= [\,-1\,;\,0\,[$ n'atteint pas de maximum global.

2. • 1^{er} cas : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant 0$. Alors le maximum global de f est 0, atteint en 0.
• $2^{\text{ème}}$ cas : $\exists a \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, f(a) > 0$. Alors par la définition de la limite :
$$\exists b \in \,]\,a\,;\,+\infty\,[\,, \forall x \geqslant b, f(x) \leqslant f(a).$$
Comme f est continue sur $[\,0\,;\,b\,]$, f y atteint un maximum M au moins égal à $f(a)$ (car $a \in [\,0\,;\,b\,]$). De plus, sur $[\,b\,;\,+\infty\,[$, f est majorée par $f(a)$ donc par M. Donc f atteint un maximum global M sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
• On raisonne de façon analogue pour justifier l'existence d'un minimum global.
Variante :
On considère la fonction $g : [\,0\,;\,\pi/2\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si } x \in [\,0\,;\,\pi/2\,[\\ 0 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$.
Elle est continue sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ donc bornée et atteint ses bornes. Et on passe à f sans problème : les extremums de f sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ sont ceux de g sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$...

Exercice 138 *Accroissements écrasés*

Soit $\alpha \in \,]\,1\,;\,+\infty\,[$ un réel fixé.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(u) - f(v)| \leqslant |u - v|^{\alpha} \quad (\sharp).$$

Solution (**Ex.138** – *Accroissements écrasés*)

Soit $v \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall u \neq v,\quad \left|\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}\right| \leqslant |u-v|^{\alpha-1}$.

Par encadrement, comme $\alpha - 1 > 0$, $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} \xrightarrow[u \to v]{} 0$: f est dérivable en v avec $f'(v) = 0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle, donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est constante, alors f vérifie ($\sharp$).

Ainsi, les fonctions vérifiant ($\sharp$) sont exactement les fonctions constantes.

Exercice 139 *Rolle sur des intervalles non bornés*

1. Soit $f : [\,0\,;\,+\infty\,[$ une fonction dérivable.
On suppose que $f(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

a) Montrer que $g : [\,0\,;\,\pi/2\,[\,, x \mapsto f\big(\tan(x)\big)$ est dérivable et peut être prolongée en une fonction continue sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$.

b) En déduire qu'il existe $c \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. a) Énoncer et démontrer une propriété analogue pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) En est-il de même si cette limite commune est infinie ?

Solution (**Ex.139** – *Rolle sur des intervalles non bornés*)

1. a) Comme $\tan\left([\,0\,;\,\pi/2\,[\right) = [\,0\,;\,+\infty\,[$, g est dérivable par composition de fonctions dérivables.

Donc g est continue sur $[\,0\,;\,\pi/2\,[$. De plus, $\lim\limits_{x \to \pi/2} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et est finie : c'est $f(0)$. Donc g peut être prolongée en une fonction continue sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ en posant $g(\pi/2) = f(0)$.

b) g étant continue sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ et dérivable sur $[\,0\,;\,\pi/2\,[$, avec $g(0) = g(\pi/2) = f(0)$, il existe, d'après le théorème de Rolle, $a \in \,]\,0\,;\,\pi/2\,[$ tel que $g'(a) = 0$.

Or : $\forall x \in \,]\,0\,;\,\pi/2\,[\,, g'(x) = f'\big(\tan(x)\big) \times (1 + \tan^2 x)$.

Donc : $f'(\mathrm{Arctan}(a))(1 + \tan^2 a) = 0$, et $f'(\tan(a)) = 0$.

Or : $c \overset{\text{déf.}}{=} \tan(a) \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$. Donc il existe bien $c \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. a) • Énoncé :

soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

• Preuve :

On reprend la même méthode que précédemment avec :

$$g : [\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f\big(\tan(x)\big) & \text{si } x \in \,]\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\,, \\ \lim\limits_{y \to \pm\infty} f(y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

g est continue sur $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$ et dérivable sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ avec $g(-\pi/2) = g(\pi/2)$, donc par le théorème de Rolle il existe $a \in\,]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ tel que $g'(a) = 0$. Et du coup $f'\big(\tan(a)\big) = 0$.

b) Il en est de même si cette limite commune est infinie. Supposons pour fixer les idées que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in\,]-\infty\,;\,0[$ tel que $f(a) = f(0)+1$ et il existe $b \in\,]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(b) = f(0)+1$.
Le théorème de Rolle sur $[a\,;\,b]$ montre qu'il existe $c \in\,]a\,;\,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Remarque : un raisonnement analogue via le théorème des valeurs intermédiaires aurait pu permettre de démontrer les propriétés précédente sans utiliser tan ... dont le mérite est d'envoyer bijectivement et de façon $\mathcal{C}^\infty$ des intervalles bornés sur des intervalles non bornés.

$\boxed{\textbf{Exercice 140}}$ *Dérivable... lipschitzienne*
Soit $f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

1. Dans cette question, on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0\,;\,1], \quad |f(x)| \leqslant k\,|x|.$$

2. Dans cette question, on suppose f dérivable.

a) Soit $g :]0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable en une fonction continue sur $[0\,;\,1]$.

b) En déduire :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0\,;\,1], \quad |f(x)| \leqslant k\,|x|.$$

Solution (**Ex.140** – *Dérivable... lipschitzienne*)

1. Comme f' est continue sur le segment fermé borné $[0\,;\,1]$, $|f'|$ est bornée : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in [0\,;\,1], |f'(t)| \leqslant k$.
Soit $x \in [0\,;\,1]$ quelconque. L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur le segment $[0\,;\,x]$ donne :
$|f(x) - f(0)| \leqslant k\,|x-0|$. Ainsi :

$$|f(x)| \leqslant k\,|x|.$$

2. a) $g :]0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur $]0\,;\,1]$ comme quotient de fonctions cotinues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Comme : $\forall x \in\,]0\,;\,1], g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et f est dérivable en 0, g admet une limite finie en 0, égale à $f'(0)$.
Ainsi g est prolongeable par continuité en 0.

b) J'appelle encore g ce prolongement par continuité. g est continue sur le segment fermé borné $[0\,;\,1]$, donc g est bornée :

$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in [\,0\,;\,1\,], |g(x)| \leqslant k$.
Vu la définition de g : $\forall x \in]\,0\,;\,1\,], |f(x)| \leqslant k\,|x|$.
Et comme l'inégalité est claire pour $x = 0$,
$$\forall x \in [\,0\,;\,1\,], |f(x)| \leqslant k\,|x|.$$

Exercice 141 *Classe d'une composée*
Soit $f : [\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ (au moins).

2. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculer $f^{(10)}(0)$.

Solution (**Ex.141** – *Classe d'une composée*)

1. • $\sqrt{.}$ et cos étant continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et $\mathbb{R}$ respectivement, f est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

• $\sqrt{.}$ et cos étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $\mathbb{R}$ respectivement, f est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

• $\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, f'(x) = -\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2}$ car $\sin\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. De plus, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

• $\forall x > 0, \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \dfrac{-\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{x\sqrt{x}/6 + o\left(x\sqrt{x}\right)}{2x\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{12}$, donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ avec $f''(0) = 1/12$.

2. Le D.L. de f en 0 à l'ordre n est : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} + o\left(x^n\right)$.

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, par la formule de Taylor-Young et par unicité du développement limité,
$\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$, donc $f^{(k)}(0) = (-1)^k \dfrac{k!}{(2k)!}$.

Exercice 142 *Dérivées successives nulles en 0*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. a) Montrer que, pour tout n de N, f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et il existe un polynôme P_n dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(t) = \mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{t}\right)\exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)$.

b) En déduire la classe de f.

3. Déterminer le développement limité de f à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$.

Solution (**Ex.142** – *Dérivées successives nulles en 0*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. $t \mapsto -1/t^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. a) Démontrons la propriété voulue par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 0$:

Comme $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$, f est continue (ou $\mathcal{C}^0$) sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(0)}(t) = f(t) = \mathrm{P}_0(1/t)\exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)$ avec $\mathrm{P}_0 = 1$.

La propriété est vraie au rang n.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n.

$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(t) = {f^{(n)}}'(t) = \left(\dfrac{-1}{t^2}\mathrm{P}_n'(1/t) + \mathrm{P}_n(1/t)\dfrac{2}{t^3}\right)\exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) = \mathrm{P}_{n+1}(1/t)\exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)$. avec $\mathrm{P}_{n+1} = -\mathrm{X}^2\mathrm{P}_n' + 2\mathrm{X}^3\mathrm{P}_n$.

Comme $\lim\limits_{t\to 0} f^{(n+1)}(t) = \lim\limits_{u\to\pm\infty} \mathrm{P}_{n+1}(u)\exp(-u^2) = 0$ par croissance comparée, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $f^{(n+1)}(0) = 0$.

b) Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Taylor-Young, f, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (au moins !), admet un D.L. à l'ordre n en 0.
Et comme : $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], \quad f^{(k)}(0) = 0$, ce D.L. est : $f = o(x^n)$.
Autrement dit, f tend plus vite vers 0 que tout monôme...

$\boxed{\textbf{Exercice 143}}$ *Alternance*

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = 2^n + (-2)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Solution (**Ex.143** – *Alternance*)

$u_{2n} = 2^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

$u_{4n+1} = 2^{4n+1} + (-2)^{4n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

donc u diverge.

$\boxed{\textbf{Exercice 144}}$ *Équivalent d'une somme*

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k,

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. En déduire un équivalent de $u_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.144** – *Équivalent d'une somme*)

1. Par conjugaison : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.
Or : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{k} \leqslant \sqrt{k+1} + \sqrt{k} \leqslant 2\sqrt{k+1}$.
Par inversion, on a directement l'encadrement voulu.
Variantes : Par l'inégalité de accroissements finis, $f : [\,k\,;\,k+1\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable avec $\forall x \in [\,k\,;\,k+1\,]$, $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$, on en déduit l'encadrement voulu.
On peut aussi partir de : $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et appliquer la croissance de l'intégrale.

2. Encadrons u_n.
On a déjà : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
L'autre partie de l'encadrement donne :
$\forall k \geqslant 2, \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ et on remarque que cette inégalité est encore vraie pour $k = 1$.
En sommant pour k allant de 1 à n, on en tire :

$$2\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leqslant u_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

Donc : $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n}$.
On peut penser que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ (non ?), divisons :

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1.$$

Par encadrement, $\dfrac{u_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 145}}$ *Autour de la convergence*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant a \text{ et } v_n \leqslant b, \\ \\ u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b \end{cases}$$

Montrer que u et v sont convergentes, en précisant leur limite.

2. On suppose que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant v_n \leqslant 1, \\ \\ u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{cases}$$

Que peut-on dire des suites u et v ?

3. On suppose que :

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que u et v sont convergentes, en précisant leur limite.

Solution (**Ex.145** – *Autour de la convergence*)

1. On a :
$0 \leqslant a - u_n \leqslant (a - u_n) + (b - v_n) \leqslant (a + b) - (u_n + v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$
donc par encadrement : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
Et : $v_n = (u_n + v_n) - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b - a = b$.

2. $0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$ entraîne par encadrement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Idem pour v_n.

3. On a :
$0 \leqslant (u_n + v_n)^2 \leqslant 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc par encadrement $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Du coup : $u_n^2 + v_n^2 = 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) - (u_n + v_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ainsi : $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n^2 + v_n^2$ induit $u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Idem pour v_n.

$\boxed{\textbf{Exercice 146}}$ *Divergence de la série harmonique*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $\quad \mathrm{H}_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n$.

Solution (**Ex.146** – *Divergence de la série harmonique*)

1. $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2. $\mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n = \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$ donc (H_n) est croissante, donc soit converge, soit diverge vers $+\infty$.

Si $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0 \geqslant \dfrac{1}{2}$: absurde.

Exercice 147 *Nature des suites (cos(n)) et (sin(n))*

1. a) Exprimer $\sin(n+1) - \sin(n-1)$ en fonction de $\cos(n)$. En déduire que, si la suite $\big(\sin(n)\big)$ converge, alors $\big(\cos(n)\big)$ converge vers 0.

b) En exprimant $\cos(2n)$ à l'aide de $\cos^2(n)$, montrer finalement que $\big(\sin(n)\big)$ diverge.

2. Établir la divergence de la suite $\big(\cos(n)\big)$.

Solution (**Ex.147** – *Nature des suites (cos(n)) et (sin(n))*)

1. a) $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n)$.

Si la suite $\big(\sin(n)\big)$ converge vers ℓ :

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2\sin(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell - \ell}{2\sin(1)} = 0.$$

b) Toujours si la suite $\big(\sin(n)\big)$ converge, en passant à la limite dans $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$, $0 = -1$: absurde. Donc $\big(\sin(n)\big)$ diverge, sans limite.

2. Si la suite $\big(\cos(n)\big)$ converge vers ℓ,

$\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2\sin(n)\sin(1)$ entraîne $\sin(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or la suite $(\sin(n))$ diverge. Donc $\big(\cos(n)\big)$ diverge.

Exercice 148 *Équivalent d'une somme*

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.148** – *Équivalent d'une somme*)

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \dfrac{2}{2\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant 0.$

De façon analogue, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.

$u_n - v_n = 2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc u et v sont adjacentes.

2. En notant ℓ leur limite commune,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 149}}$ *Convergence de la série de Riemann d'ordre 2*

On pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Solution (**Ex.149** – *Convergence de la série de Riemann d'ordre 2*)

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0,$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant 0,$

$v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

u et v sont adjacentes.

$\boxed{\textbf{Exercice 150}}$ *Taylor-Young et dérivées*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = g(x^2).$$

Solution (**Ex.150** – *Taylor-Young et dérivées*)

Posons : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(\sqrt{x})$. On a ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x^2)$.

Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$\forall x > 0, g'(x) = \dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, or par la formule de Taylor-Young, $f'(t) = f'(0) + f''(0)t + o\,(t)$, donc $f'(\sqrt{x}) = f''(0)\sqrt{x} + o\,(\sqrt{x})$.

Ainsi : $g'(x) = \dfrac{1}{2}f''(0) + o\,(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}f''(0).$

Comme g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, cette limite prouve que g est dérivable en 0, à dérivée continue en 0.

Ainsi, g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Mission accomplie.

$\boxed{\textbf{Exercice 151}}$ *Encadrement*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Justifier que : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant 2$.

2. a) Soit $n \geqslant 4$ et $0 \leqslant k < \dfrac{n}{2}$. Montrer que $\dbinom{n}{k+1} \geqslant \dbinom{n}{k}$.

b) En déduire : $\forall n \geqslant 4, \forall k \in [\![2\,;\,n-2]\!]\,, \quad \dbinom{n}{k} \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Montrer que u converge, et que sa limite vaut 2.

Solution (**Ex.151** – *Encadrement*)

1. ... car $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$ et $1+1=2$ (si !).

2. a) Soit $n \geqslant 4$ et $0 \leqslant k < \dfrac{n}{2}$. $\dbinom{n}{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1}\dbinom{n}{k}$, or $\dfrac{n-k}{k+1} \geqslant 1$ car $n > 2k$, donc $\dbinom{n}{k+1} \geqslant \dbinom{n}{k}$.

b) Pour $k \leqslant n/2$, $\dbinom{n}{k} \geqslant \dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ par la croissance précédente.

Pour $\dfrac{n}{2} < k \leqslant n$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k} \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$ car $n-k < \dfrac{n}{2}$.

3. Pour $n \geqslant 4$, $u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 2 + \frac{2}{n} + (n-3) \times \frac{2}{n(n-1)}$.

Ainsi $2 \leqslant u_n \leqslant 2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-3}{n(n-1)}\right)$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ par encadrement.

$\boxed{\textbf{Exercice 152}}$ *Reformulation*

Soit $x \in [\,0\,;\,2\pi\,[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\cos(nx).$$

Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Solution (**Ex.152** – *Reformulation*)

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \Re\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^k \mathrm{e}^{ikx}\right) = \Re\left(-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\mathrm{e}^{ix}}{2}\right)^k\right)$.

Comme $\dfrac{-\mathrm{e}^{ix}}{2} \neq 1$ (son module vaut $1/2$), $u_n = \Re\left(\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{2} \times \dfrac{1-\left(-\mathrm{e}^{ix}/2\right)^n}{1+\mathrm{e}^{ix}/2}\right)$

Comme $\left|\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2}\right)^n = 0$, donc

- u converge,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2+\mathrm{e}^{ix}}\right)$.

$\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2+\mathrm{e}^{ix}} = \frac{(2+\mathrm{e}^{-ix})\mathrm{e}^{ix}}{(2+\mathrm{e}^{-ix})(2+\mathrm{e}^{-ix})} = \frac{2\mathrm{e}^{ix}+1}{5+4\cos(x)}$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2\cos(x)+1}{5+4\cos(x)}.$$

Exercice 153 *Complexification*

Soit α, β, a, b quatre réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
Soit u et v les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ v_0 = b, \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n - \beta v_n, \\ v_{n+1} = \beta u_n + \alpha v_n. \end{cases}$$

Montrer que les suites u et v convergent *toutes les deux* si, et seulement si, $\alpha^2+\beta^2 < 1$.

Solution (**Ex.153** – *Complexification*)
Posons, pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = u_n + iv_n$.
La relation de récurrence s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = (\alpha + i\beta)z_n.$$

(z_n) est une suite géométrique de raison $\alpha + i\beta \neq 1$: elle converge si, et seulement si, $|\alpha + i\beta| < 1$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

- Si $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, alors (z_n) converge vers 0, et comme $u = Re(z)$ et $v = Im(z)$, u et v convergent simultanément, vers 0.
- Si $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant 1$, alors (z_n) diverge. Or si (u_n) ET (v_n) convergeaient, alors z convergerait. Donc l'une (au moins) diverge.

Exercice 154 *Étude d'une suite récurrente*

Soit u la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1.$$

Montrer que u converge, si et seulement si, $u_0 \in [-2\,;\,2]$. Dans ce cas, préciser sa limite.

Solution (**Ex.154** – *Étude d'une suite récurrente*)
Quelques observations qu'on pourra faire :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n^2 + 4 - 4u_n) = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$ donc u est croissante.
Donc :

- soit u est majorée et converge ;

- soit u n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Étude des variations de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^2}{4} + 1$:
f est un trinôme du second degré de racine double 0.

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -\infty & & -2 & & 0 & & 2 & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & & & & & & & +\infty \\
 & & \searrow & & & & & & \nearrow & \\
f(x) & & & 2 & & & & 2 & & \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Premier cas : $u_0 \in [\,-2\,;\,2\,]$.
Comme $f([\,-2\,;\,2\,] = [\,0\,;\,2\,]$, une récurrence immédiate montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\,0\,;\,2\,].$$

Ainsi u est majorée, donc convergente (car croissante).
Soit ℓ sa limite. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{4} + 1 = \dfrac{\ell^2}{4} + 1$. Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{\ell^2}{4} + 1$.
Or : $\ell = \dfrac{\ell^2}{4} + 1 \Leftrightarrow \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 2$.
Bilan : u converge, vers 2.
Second cas : $u_0 \notin [\,-2\,;\,2\,]$.
Comme $f\big(\,]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,;\,+\infty\,[\,\big) = \,]\,2\,;\,+\infty\,[$, on a : $u_1 > 2$.
Supposons que u converge. Par le raisonnement précédent, sa limite ℓ est nécessairement 2. Or comme u est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant u_1$ donc $\ell \geqslant u_1$, donc $\ell > 2$, ce qui est impossible.
Bilan : u diverge, vers $+\infty$.

Exercice 155 *Suite récurrente*
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1.$$

Solution (**Ex.155** – *Suite récurrente*)
- Comme exp est définie sur $\mathbb{R}$, u est convenablement définie.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$ donc par récurrence u est strictement croissante (resp. décroissante) si $u_1 > u_0$ (resp. $u_1 < u_0$).
- Par étude de fonction, $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ ne s'annule qu'en 0 donc l'unique limite possible de u est 0. De plus, g est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.
- Bilan :

– si $u_0 = 0$ alors u est constante, égale à 0 ;

– si $u_0 > 0$, alors $u_1 - u_0 = g(u_0) > 0$ donc u est strictement croissante. Si elle converge, sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant u_0 > 0$: impossible. Donc u diverge, et étant croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
– si $u_0 < 0$, alors $u_1 - u_0 = g(u_0) > 0$ donc u est strictement croissante. De plus, par récurrence immédiate, $u_n < 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Donc u est majorée. Finalement u converge, et sa limite est $\ell = 0$.

Exercice 156 *Suite récurrente*
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = a \in [\,-2\,;\,2\,] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

1. Justifier que la suite u est bien définie.
2. Déterminer les limites possibles de u.
3. Montrer que la suite $(|u_n - 1|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. En déduire la convergence et la limite de u.

Solution (**Ex.156** – *Suite récurrente*)

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$. On a : $f\big([\,-2\,;\,2\,]\big) = [\,0\,;\,2\,] \subset [\,-2\,;\,2\,]$ ce qui assure la définition de u (par récurrence immédiate).

2. Supposons $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Comme $\forall n \geqslant 1, u_n \in [\,0\,;\,2\,]$, $\ell \in [\,0\,;\,2\,]$.
Par continuité de f, $\ell = f(\ell)$, i.e. $\ell = \sqrt{2-\ell}$, donc $\ell^2 + \ell - 2 = 0$, donc $\ell = 1$ ou $\ell = -2$. Comme $\ell \geqslant 0$, la seule limite possible de u est 1.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - 1| = \left|\sqrt{2-u_n} - 1\right| = \left|\frac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2-u_n}+1}\right| = \frac{|u_n - 1|}{1 + \sqrt{2-u_n}} \leqslant |u_n - 1|$$
Donc $\big(|u_n - 1|\big)_n$ est décroissante, et minorée par 0 donc convergente.

4. Soit λ la limite de $\big(|u_n - 1|\big)_n$. On a : $\lambda \geqslant 0$.
- Si $\lambda > 0$,
$$1 + \sqrt{2-u_n} = \frac{|u_n - 1|}{|u_{n+1} - 1|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda}{\lambda} = 1,$$
donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, ce qui est impossible.
- Donc $\lambda = 0$. $|u_n - 1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 157 *Suite récurrente et équation fonctionnelle*
Soit u une suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n).$$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer toutes les fonctions g continues en 0 telles :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g\big(\text{Arctan}(x)\big) = g(x).$$

Solution (**Ex.157** – *Suite récurrente et équation fonctionnelle*)

1. • Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \text{Arctan}(x) - x$. f est $\mathcal{C}^\infty$ avec :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $f(0) = 0$, f est strictement négative sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et strictement positive sur $]\,-\infty\,;0\,[$.
• De plus, l'équation $\text{Arctan}(x) = x$ n'a qu'une solution dans $\mathbb{R}$: 0, donc si u converge, ce sera nécessairement vers 0.
• *Premier cas :* $u_0 < 0$. Comme $\big(x < 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x) < 0\big)$, une récurrence immédiate assure que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0.$$
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) > 0$, donc u est croissante, et majorée par 0. Donc u converge, nécessairement vers 0.
• *Deuxième cas :* $u_0 = 0$. Alors u est la suite nulle, convergente de limite nulle.
• *Troisième et dernier cas :* $u_0 > 0$. Comme $\big(x > 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x) < 0\big)$, une récurrence immédiate assure que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) < 0$, donc u est décroissante, et minorée par 0. Donc u converge, nécessairement vers 0.

2. • Soit g une fonction continue en 0 vérifiant l'équation fonctionnelle :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g\big(\text{Arctan}(x)\big) = g(x) \quad (\natural).$$
Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \text{Arctan}(x_n).$$
$(\natural)$ entraîne, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x_n) = g(x)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$.
Par 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Par continuité de g en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(0)$.
Par unicité de la limite, $g(x) = g(0)$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g(0)$, donc g est constante.
• Réciproquement, il est clair que toute fonction g constante vérifie l'équation $(\natural)$.
• Bilan : les solutions de l'équation fonctionnelle $(\natural)$ sont exactement toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 158}}$ *Un D.L. en 1*

1. Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \dfrac{\exp x}{x}$ à l'ordre 2 en 1.
2. En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.

Solution (**Ex.158** – *Un D.L. en 1*)

1. $\exp(1+h) = \mathrm{e} \times \exp h = \mathrm{e}\left(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right)$,

   $\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + o\left(h^2\right)$, d'où : $f(1+h) = \mathrm{e}\left(1 + \dfrac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right)$.

   Ainsi, en 1 : $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\dfrac{(x-1)}{2} + o\left((x-1)^2\right)$.
2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1, par la formule de Taylor-Young et l'unicité du développement limité : $f'(1) = 0$ et $f''(1) = \mathrm{e}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 159}}$ *Suite implicite*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère l'équation

$$(\mathrm{E}_n) : \qquad x + \tan x = n$$

d'inconnue x dans $]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution, que l'on notera x_n.
2. Établir la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Solution (**Ex.159** – *Suite implicite*)

1. L'étude de $f :]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto x + \tan x$ montre que f est une bijection de $]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$ sur $\mathbb{R}$ car continue et strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to\pm\pi/2} f(x) = \pm\infty$.

   Donc tout $n \in \mathbb{N}(\subset \mathbb{R})$ admet un unique antécédent par f, autrement dit, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution.
2. Quelques arguments :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = f^{-1}(n)$ et f^{-1} a les mêmes variations que f, donc est strictement croissante. Donc (x_n) est une suite (strictement) croissante et majorée par $\pi/2$ donc convergente. Soit ℓ sa limite : $\ell \in\ ]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$, et même $\ell \in [\,0\,;\,\pi/2\,[$ car $x_0 = 0$ (et (x_n) est croissante).

     De $\tan x_n = n - x_n$ on tire en passant à la limite que $\tan x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc nécessairement $\ell = \pi/2$, car sinon, par continuité de tan en ℓ, on aurait $\tan \ell = +\infty$! ! !
   - Plus expéditif : $n - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car (x_n) converge, et $x_n = \mathrm{Arctan}(n - x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{Arctan} u$, i.e. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi/2$.

Chapitre 7

Séries numériques

Exercice 160 *Natures des séries de terme général u_n ...*

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geqslant 0)$
2. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \quad (n \geqslant 1)$
3. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (n \geqslant 0)$
4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^{-1} \quad (n \geqslant 1)$
5. $u_n = \sin \dfrac{\pi \times n^2}{n+1} \quad (n \geqslant 0)$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad (n \geqslant 2)$
7. $u_n = \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (n \geqslant 1, \alpha \in \mathbb{R})$
8. $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (n \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.160** – *Natures des séries de terme général u_n ...*)

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
   Par le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
2. $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1-\dfrac{1}{n}+O\left(1/n^2\right)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}-\dfrac{1}{n}+O\left(1/n^2\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$: la série diverge.
3. $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. $\sum u_n$ converge par équivalence.
4. $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

5. $u_n = \sin\left(\pi\dfrac{(n+1)^2 - 2(n+1)+1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n-1) + \dfrac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$: on conclut à la convergence grâce au critère spécial des séries alternées.

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème spécial de séries alternées,

$\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente,

$\sum O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série absolument convergente donc convergente, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$,

donc $\sum u_n$ diverge.

7. $\ln(u_n) = n^\alpha \ln\left(1 - \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n^\alpha\left(1 - \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$

$\ln(u_n) = -\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2} + o\left(n^{\alpha-3}\right)$

- Si $\alpha < 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1/6$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-1/6)$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 2$: $n^2 u_n = \exp\left(2\ln(n) - \dfrac{1}{6}n^{\alpha-2} + o\left(n^{\alpha-3}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\ln(n) = o\left(n^{\alpha-2}\right)$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

8.
- Si $|a| < 1$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n$, or $\sum |a|^n$ est une série géométrique convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Si $a = 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ et si $a = -1$, $u_{2n} = 1/2$ et $u_{2n+1} = -1/2$: dans le deux cas, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $|a| > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$, or $\sum \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$ est une série géométrique convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 161 *Pairs et impairs*

1. a) Justifier la convergence des séries

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\quad \text{et}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n)^2}.$$

b) En admettant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries précédentes.

2. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}>\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Solution (**Ex.161** – *Pairs et impairs*)

1. a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge par application du théorème spécial des séries alternées.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n)^2}$ converge par linéarité car la série de Riemann de paramètre $\alpha=2$ converge.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge par le critère des équivalents de t.g. positifs : $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n^2}$ et convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha=2$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{24}$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\text{ pair}}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\text{ impair}}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$,

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{n\text{ pair}}\frac{1}{n^2}-\sum_{n\text{ impair}}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{8}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Remarque : la somme de cette dernière série alternée est bien du signe de son premier terme.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$\forall k \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \dfrac{(x^2)^k}{k!}$ assure la convergence de $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ par comparaison à la série exponentielle de paramètre x^2.

Une comparaison analogue justifie la convergence de $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, donc de $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ par linéarité.

Attention si on utilise un autre critère : x^{2k+1} est de signe alternant pour $x < 0$.

Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \exp(-x) > 0$.

Exercice 162 *Constante γ d'Euler*

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n$?

2. En déduire l'existence $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$.

Solution (**Ex.162** – *Constante γ d'Euler*)

1. $v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

$v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{-1}{n(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Comme $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par domination $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge.

2. Comme $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge, la suite (u_n) converge. En notant γ sa limite, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \right) = 0 = o(1)$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1).$$

Exercice 163 *Autour du logarithme*

1. Existence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

2. a) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

b) Proposer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme partielle de la série précédente.

Solution (**Ex.163** – *Autour du logarithme*)

1. L'existence peut être obtenue via l'équivalence $\ln(1 - 1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$ et la convergence de la série de Riemann de paramètre 2. Mais on peut faire d'une pierre deux coups en cherchant la somme.

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) =$$

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \big[\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)\big] = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \ln(n) + \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1} \ln(n) - 2\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln(n) =$$

$$\ln(1) + \ln(2) + \ln(\mathrm{N}) + \ln(\mathrm{N}+1) - 2\ln(2) - 2\ln(\mathrm{N}) = \ln\frac{\mathrm{N}+1}{2\mathrm{N}}$$

Donc la série converge et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$.

Remarque : termes strictement négatifs... somme strictement négative...

2. $$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \big[\ln(n) - \ln(n+1)\big] =$$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln(n) - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1} \ln(n) = \ln(1) - \ln(\mathrm{N}+1) = -\ln(\mathrm{N}+1)$$

Donc la série diverge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} -\ln(\mathrm{N})$.

$\boxed{\textbf{Exercice 164}}$ *Produit infini*

Montrer la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Solution (**Ex.164** – *Produit infini*)

Manifestement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \ln(u_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, or $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

Le critère des équivalents pour ces séries à termes positifs permet d'affirmer que la suite $(v_n)_n$ converge. Par composition par la fonction exponentielle (continue !), la suite $(u_n)_n$ converge.

$\boxed{\textbf{Exercice 165}}$ *Somme d'une série de type exponentielle*

1. Justifier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!}.$$

2. a) Déterminer trois réels α, et γ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 = \alpha n(n-1)(n-2) + \beta n(n-1) + \gamma n.$$

b) En déduire la somme de la série précédente.

Solution (**Ex.165** – *Somme d'une série de type exponentielle*)

1. $\frac{n^3}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n-3)!}$ permet de justifier la convergence, ou encore D'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$...

2. Pour pouvoir simplifier les factorielles, on écrit :
$n^3 = n(n-1)(n-2) - 3n^2 + 2n = n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) + 5n.$

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} - 3\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n(n-1)}{n!} + 5\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n}{n!}$$
$$= \sum_{n=3}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-3)!} - 3\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-2)!} + 5\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-1)!} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{e} - 3\mathrm{e} + 5\mathrm{e} = 3\mathrm{e}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 166}}$ *Fonction ζ de Riemann en 1*

Pour tout $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{\alpha\to 1^+} \zeta(\alpha)$.

2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Solution (**Ex.166** – *Fonction ζ de Riemann en* 1)

1. Par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.

Donc : $\dfrac{1}{\alpha-1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$.

Par comparaison, $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.

La majoration n'était pas nécessaire mais sera utile pour la suite.

2. Et : $\forall \alpha > 1, 1 \leqslant \dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \leqslant (\alpha-1)+1$, donc par encadrement : $\dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \xrightarrow[\alpha\to 1]{} 1$, et

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to 1}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 167 *Avec ou sans la formule de Stirling*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.

a) Déterminer un équivalent de $\ln u_{n+1} - \ln u_n$.

b) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) En s'intéressant à la série de terme général $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big)$, montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

d) Soit $v_n = \sqrt{n}u_n$.

En s'intéressant à la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$, montrer que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge vers une limite strictement positive.

2. Retrouver les résultats précédents à l'aide de la formule de Stirling.

Solution (**Ex.167** – *Avec ou sans la formule de Stirling*)

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.

a) $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} = \ln \dfrac{2n+1}{2n+2} = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n+2}\right)$

$\ln u_{n+1} - \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

b) La série $\sum_{n\geqslant 0}(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ tend vers $-\infty$, donc $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, donc $u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big) = \ln\dfrac{2n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big)$ diverge vers $+\infty$, donc $\ln(nu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $nu_n = \mathrm{e}^{\ln(nu_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Comme $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, nu_n \geqslant 1$ *i.e.* $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$: $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison de termes généraux positifs.

d) $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln u_{n+1} - \ln u_n$,

or $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

donc $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge.

On en déduit que $(\ln v_n)$ converge, vers une limite $c \in \mathbb{R}$. Donc $v_n = \mathrm{e}^{\ln v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \mathrm{e}^c > 0$. Cela signifie au passage que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{\sqrt{n}}$.

2. $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}2^{2n}(2\pi n)n^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ce qui permet de retrouver tous les résultats précédents... et même plus : $\ell = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 168 *Exemples de Séries de Bertrand*

Soit $\alpha \in]\,0\,;+\infty\,[$.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$.

Solution (**Ex.168** – *Exemples de Séries de Bertrand*)

1. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^\alpha t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$ donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

• Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

• Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(t)}\right]_2^x$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(x)} - \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}(2)} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

• Bilan : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

• si $\alpha > 1$, $f_\alpha(t) = o(1/t^\alpha)$ et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

• si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

• si $\alpha < 1$, $f_\alpha(t) \geqslant f_1(t) \geqslant 0$ car $t^\alpha \leqslant t$, or $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$ diverge d'après le point précédent donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 169 *Une série semi-convergente très classique*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$, et déterminer le signe de sa somme.

b) Cette série est-elle absolument convergente ?

2. En écrivant u_n à l'aide d'une intégrale, montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Solution (**Ex.169** – *Une série semi-convergente très classique*)

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Le théorème spécial pour les séries alternées permet de justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$. De plus, le signe de sa somme est celui de son premier terme, donc positif.

b) La série harmonique étant divergente, cette série n'est pas absolument convergente.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{0}{n} = \left[\dfrac{(-t)^n}{n}\right]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 -(-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \int_0^1 (-t)^{n-1}\mathrm{d}t \overset{\text{lin.}}{=} -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \mathrm{I_N} \text{ où } \mathrm{I_N} = \int_0^1 \frac{(-t)^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale :

$$|\mathrm{I_N}| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{N}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}.$$

Ainsi $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \ln(2) - \mathrm{I_N}$ avec $\mathrm{I_N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$, d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 170}}$ *Somme et reste de la série exponentielle*

On ne suppose pas connues les propriétés de la série exponentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

On pose $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{x^n}{n!}, \quad$ et $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n.$

1. Dans cette question, $x = 1$, et on pose : $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{T_N} = \mathrm{S_N} + \dfrac{1}{\mathrm{N} \times (\mathrm{N}!)}.$

a) Montrer que les suites S et T sont convergentes, de même limite.

b) On pose de plus : $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R_N} = \sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n.$

Justifier que : $\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad |\mathrm{R_N}| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{N.N!}}$

2. a) On revient au cas général. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge en précisant sa somme.

Proposer une majoration du reste R_N de cette série.

b) Dans le cas $x = 1$, comparer cette majoration à celle obtenue précédemment.

Solution (**Ex.170** – *Somme et reste de la série exponentielle*)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x^n}{n!}, \text{ et } \forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

1. a) $S_{N+1} - S_N = \dfrac{1}{(N+1)!} > 0,$

$T_{N+1} - T_N = \dfrac{1}{(N+1)!} + \dfrac{1}{(N+1)(N+1)!} - \dfrac{1}{N.N!} = \dfrac{N(N+1) + N - (N+1)^2}{N(N+1)(N+1)!}$

$T_{N+1} - T_N = \dfrac{-1}{N(N+1)(N+1)!} < 0,$

$T_N - S_N = \dfrac{1}{N.N!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$

donc S et T sont adjacentes, donc convergentes, vers une même limite.

b) Notons ℓ la limite commune de S et T (en fait, la suite de l'exercice montrera que $\ell = \mathrm{e}$). Comme S et T sont deux suites respectivement croissante et décroissante de limite ℓ,

$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N \leqslant \ell \leqslant T_N$, donc $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \ell - S_N \leqslant \dfrac{1}{N.N!},$

et comme $R_N = S_N - \ell$, on a bien : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad |R_N| \leqslant \dfrac{1}{N.N!}$

2. a) On revient au cas général. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge en précisant sa somme.

• Supposons $x \in \mathbb{R}^+$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à exp qui est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^{N+1}$ sur $[\,0\,;\,x\,]$,

$$\exp(x) = S_N + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{N!}(x-t)^N \mathrm{d}t$$

$$\left|\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{N!}(x-t)^N \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{N!}\int_0^x (x-t)^N \mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{N!} \times \frac{x^{N+1}}{N+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^x x^{N+1}}{(N+1)!}$$

Or $x^N = o\,(N!)$, donc par domination $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{N!}(x-t)^N \mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$

Par conséquent, $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \exp(x)$: la série converge, sa somme est e^x.

• Supposons $x \in \,]-\infty\,;\,0\,[$. L'application de la formule de Taylor sur $[\,x\,;\,0\,]$ donne encore :

$$\exp(x) = S_N + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{N!}(x-t)^N \mathrm{d}t,$$

mais la majoration du reste intégral change :

$$\left|\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{N!}(x-t)^N \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{N!}\int_x^0 \left|\mathrm{e}^t(x-t)^N\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{N!}\int_x^0 (t-x)^N \mathrm{d}t$$

$\left|\int_0^x \frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\right| \leqslant \frac{(-x)^{N+1}}{(N+1)!}$
On conclut comme pour $x \geqslant 0$.

- Pour majorer le reste, on peur écrire en toute généralité :

$$R_N \leqslant \frac{e^{\max(0,x)}\,|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

b) Dans le cas $x = 1$, cette dernière majoration donne $|R_N| \leqslant \frac{e}{(N+1)!}$.

Ce majorant n'est pas meilleur que celui de la première question :

$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{e}{N+1} - \frac{1}{N} = \frac{eN - N - 1}{N(N+1)} = \frac{(e-1)N-1}{N(N+1)} > 0,$

donc : $\quad \frac{1}{N.N!} \leqslant \frac{e}{(N+1)!}$.

Exercice 171 *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite *décroissante* telle que la serie $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n$? En déduire $\lim_{n\to+\infty} 2nu_{2n}$.

b) Montrer que : $\quad u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*, n = k^2, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré.} \end{cases}$

Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

A-t-on $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Solution (**Ex.171** – *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants*)

1. a) Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, la suite (S_n) converge, vers une limite S. Alors :

$S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$.

Or : $\forall n \geqslant 1, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_n \geqslant nu_{2n}$ car u décroît.

Et comme la serie $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, u tend vers 0. Étant de plus décroissante, u

est une suite positive. Ainsi : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant nu_{2n} \leqslant \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n$.
Par encadrement, $nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $2nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$ donc $0 \leqslant 2nu_{2n+1} \leqslant 2nu_{2n}$, et par encadrement, $2nu_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Comme de plus $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad (2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ainsi, $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit : $u_n\, o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. $\forall \mathrm{N} \geqslant 1, \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{\mathrm{N}}\rfloor} \frac{1}{k^2}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (k^2)u_{k^2} = 1$, ce qui exclut que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On n'a pas : $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 172 *Cyclicité d'ordre 3*

Soit : $n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n = 3p+1 \text{ ou } n = 3p+2, \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \\ -\dfrac{2}{n} & \text{si } n = 3p, \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1. Montrer que : $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{3p} u_n = \sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{p+i}$.

2. À l'aide d'une somme Riemann (et non une série), montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{3p} u_n$ existe et déterminer cette limite.

3. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Solution (**Ex.172** – *Cyclicité d'ordre 3*)

1. En calculant la somme de tous les $1/n$ et en retranchant ceux tels que n soit multiple de 3 :
$$\sum_{n=1}^{3p} u_n = \sum_{k=1}^{3p} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{p+i}.$$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{p+i} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} \frac{2p}{p+i} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} \frac{2}{1+2(i/2p)} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} f(i/p)$,
où $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2}{1+2x}$ est continue. Le théorème sur les sommes de

Riemann assure que : $\displaystyle \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{2p} f(i/p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln(3)$

Ainsi : $\displaystyle \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{3p} u_n$ existe et vaut $\ln(3)$.

3. Du coup, on a aussi :

$$\sum_{n=1}^{3p+1} u_n = \sum_{n=1}^{3p} u_n + \frac{1}{3p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ln(3),$$

$$\sum_{n=1}^{3p+2} u_n = \sum_{n=1}^{3p} u_n + \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ln(3).$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et sa somme est $\ln(3)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 173}}$ *Terme général défini par récurrence*

On considère la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \left]0\,;+\infty\right[\quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

1. Dans cette question, on suppose $u_0 > 1$.

a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n > 1$, et en déduire : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

b) À l'aide de la suite $\left(\dfrac{1}{u_n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{u_n}$ converge et déterminer sa somme.

2. Étudier le comportement de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{u_n}$ lorsque $u_0 \in \left]0\,;1\right]$.

Solution (**Ex.173** – *Terme général défini par récurrence*)

1. Dans cette question, on suppose $u_0 > 1$.

a) Se démontre par récurrence, l'hérédité étant assurait par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1).$$

b) On a : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n-1)^2 \geqslant 0$.

Donc u est croissante : soit elle converge vers une limite ℓ, soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons que u converge vers ℓ. Alors $\ell = \ell^2 - \ell + 1$, donc $(\ell-1)^2 = 0$, donc $\ell = 1$, ce qui est absurde car :

$$(\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \geqslant u_0 > 1) \Rightarrow (\ell \geqslant u_0 > 1).$$

Donc u diverge et : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

c) Posons : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n = \dfrac{1}{u_n-1}$ (au fait, $u_n \neq 1\,!$).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = -\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n - 1} = -\frac{1}{u_n} + v_n, \text{ doù :}$$

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{u_n} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (v_n - v_{n+1}) = v_0 - v_{\mathrm{N}+1} = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{\mathrm{N}+1} - 1}$$

Comme $u_{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$, la série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1}.$$

2. On a, comme en 1.b), u croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0 > 0$.
On montre, par réccurence comme en 1.a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$.
Par conséquent : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 > u_n \leqslant 1$, et $\dfrac{1}{u_n} \geqslant 1$. Ainsi $\dfrac{1}{u_n}$ ne tend pas vers 0, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ diverge grossièrement lorsque $u_0 \in \left]0\,;\,1\right]$.

Exercice 174 *Exponentielle et sinus*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Justifier l'existence de R_n, et rappeler les limites des suites (S_n) et (R_n).

2. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(n+1)!\mathrm{R}_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Quelle est la nature de la série de terme général $\sin\big(2\pi\mathrm{e}(n!)\big)$.

Solution (**Ex.174** – *Exponentielle et sinus*)

1. R_n étant le reste d'ordre n de la série exponentielle (donc convergente !) de paramètre 1, R_n existe et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \mathrm{e} \text{ tandis que } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0.$$

2. a) $(n+1)!\mathrm{R}_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+k)!}$, or $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{(n+1)!}{(n+k)!} \leqslant \dfrac{1}{(n+2)^{k-1}}$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+k)!} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-1}} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^k \leqslant \frac{1}{n+1}$

d'où $1 \leqslant (n+1)!\mathrm{R}_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

b) Par encadrement, $(n+1)!\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$

3. Partons de : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n = \mathrm{e}$.

$\sin\big(2\pi \mathrm{e}(n!)\big) = \sin(2\pi n!\mathrm{S}_n + 2\pi n!\mathrm{R}_n) = \sin(2\pi n!\mathrm{R}_n)$ car $n!\mathrm{S}_n$ est un entier naturel.

Or $n!\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sin(2\pi\mathrm{e}(n!)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi \times \dfrac{1}{n}$.

Par équivalence de termes positifs à partir d'un certain rang, puisque la série harmonique diverge, $\sum\limits_{n\geqslant 0} + \sin\big(2\pi\mathrm{e}(n!)\big)$ diverge.

$\boxed{\textbf{Exercice 175}}$ *Développement asymptotique du reste des séries de Riemann.*

Soit α un réel de $]\,1\,;\,+\infty\,[$. On définit g sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ par

$$\forall x \geqslant 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \mathrm{S}(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Contrairement à l'usage courant, la somme $\mathrm{R}_n(\alpha)$ *commence à* n *et non* $n+1$.

1. a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1} g(x)\mathrm{d}x \leqslant g(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} g(x)\mathrm{d}x.$$

b) En déduire, pour $n \geqslant 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1.$$

c) En déduire un encadrement de $\mathrm{S}(\alpha)$.

2. a) Montrer pour $n \geqslant 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

b) En déduire : $\qquad \mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$

3. Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par : $\quad \forall x \geqslant 1, \quad f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}.$

a) Par la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \mathrm{I}_k, \qquad \text{avec } 0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}.$$

b) En isolant $\dfrac{1}{k^\alpha}$ dans l'expression précédente, montrer finalement que

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Solution (**Ex.175** – *Développement asymptotique du reste des séries de Riemann.*)

1. a) Soit $k \geqslant 2$. Par décroissance de g sur $[\,k-1\,;\,k\,]$ et sur $[\,k\,;\,k+1\,]$,

- $\forall x \in [\,k-1\,;\,k\,]$, $\quad g(x) \geqslant g(k)$ entraîne $g(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} g(x)\mathrm{d}t$.
- $\forall x \in [\,k\,;\,k+1\,]$, $\quad g(x) \leqslant g(k)$ entraîne $\displaystyle\int_{k}^{k+1} g(x)\mathrm{d}x \leqslant g(k)$.

b) Par la relation de Chasles appliquée aux encadrements précédents pour k allant de 1 à n sur la première inégalité, et pour k allant de 2 à n sur la seconde, on a :

$$\int_{1}^{n+1} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(\alpha) \leqslant \int_{1}^{n} g(t)\mathrm{d}t + g(1).$$

En calculant les deux intégrales de cet encadrement, on obtient, pour $n \geqslant 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)+1.$$

c) En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\alpha-1} \leqslant \mathrm{S}(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}+1.$$

2. a) En sommant à l'aide de la relation de Chasles, pour $n \geqslant 1$,

$$\int_{n}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$$

Et en calculant ces deux intégrales, on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

b) $0 \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha-1}\times\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

Or $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)}{\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}} = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\alpha-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

3. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f étant de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[\,k\,;\,k+1\,]$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

$$f(k+1) = f(k) + f'(k)(k+1-k) + \frac{f''(k)}{2}(k+1-k)^2 + \int_{k}^{k+1}\frac{(t-k)^2}{2}f^{(3)}(t)\mathrm{d}t.$$

Or $f'(k) = \dfrac{1}{k^\alpha}$, $f''(k) = \dfrac{-\alpha}{k^{\alpha+1}}$,

$$\int_{k}^{k+1}\frac{(t-k)^2}{2}f^{(3)}(t)\mathrm{d}t = \int_{k}^{k+1}\frac{(t-k)^2}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t,$$

et $\forall t \in [\,k\,;\,k+1\,]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{(t-k)^2}{2}\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$, ce qui donne par croissance de l'intégrale,

$$f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \mathrm{I}_k, \text{ avec } 0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{N} \geqslant n$.

$$\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \left(f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \mathrm{I}_k \right)$$

$$= f(\mathrm{N}+1) - f(n) + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}_k \qquad (1).$$

Que peut-on dire de chaque terme lorsque N tend vers $+\infty$?

- $\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} f(\mathrm{N}+1) = 0$, sans souci.
- $\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} -f(n) = -f(n) = \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, no problem.
- $\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2} \mathrm{R}_n(\alpha+1) = \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ par 4.b).
- De $0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}$, on tire, par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$ la convergence de $\sum_{k \geqslant 1} \mathrm{I}_k$, et on a, en sommant pour $k \geqslant n$ l'encadrement,

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \mathrm{R}_n(\alpha+2) \leqslant \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha+1}},$$

la dernière majoration résultant de 4.a).

Alors $0 \leqslant n^\alpha \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha}{2} \times \frac{n^\alpha}{(n-1)^{\alpha+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ montre que par encadrement,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Conclusion : en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 176}}$ *En passant par la série harmonique*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(2n+1)}$.

1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n.

2. On note $\mathrm{H_N}$ la $\mathrm{N}^{\text{ème}}$ somme partielle de la série harmonique : $\mathrm{H_N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$.

Justifier que la suite $\left(\mathrm{H}_n - \ln n\right)_{n \geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.

3. a) Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n+1}$.

b) En déduire que, pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = 2\mathrm{H}_{\mathrm{N}} - 2\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} + 2$.

4. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Solution (**Ex.176** – *En passant par la série harmonique*)

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ (ou "$\leqslant$", ou encore "O"...) permet de conclure.

2. Vu en cours. En posant $v_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$,
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{-1}{n^2+n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ assure la convergence de la série de t.g. $v_{n+1} - v_n$, donc la convergence de la suite v.

3. a) $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n+1} = \dfrac{(2\alpha+\beta)n+\alpha}{n(2n+1)}$ donc $\beta = -2$ et $\alpha = 1$ conviennent.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \mathrm{H}_{\mathrm{N}} - 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+1} = \mathrm{H}_{\mathrm{N}} - 2 \sum_{\substack{3 \leqslant n \leqslant 2\mathrm{N}+1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n} = \mathrm{H}_{\mathrm{N}} - 2\left(\sum_{n=2}^{2\mathrm{N}+1} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{2 \leqslant n \leqslant 2\mathrm{N} \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n}\right)$

$\displaystyle= \mathrm{H}_{\mathrm{N}} - 2(\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} - 1) + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n} = 2\mathrm{H}_{\mathrm{N}} - 2\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} + 2.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = 2(\ln \mathrm{N} + \gamma + o(1)) - 2(\ln 2\mathrm{N} + 1 + \gamma + o(1)) + 2 = 2 + 2\ln\frac{\mathrm{N}}{2\mathrm{N}+1} + o(1) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 2 - 2\ln 2$

$\boxed{\textbf{Exercice 177}}$ *En passant par la formule de Stirling*

Soit : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\dfrac{n!}{(2n)!}\right)^{1/n}$.

1. a) Montrer que : $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right) \Rightarrow \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

b) Montrer que : $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_n u_n$?

Solution (**Ex.177** – *En passant par la formule de Stirling*)

1. a) $\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \dfrac{\ln\big((u_n/v_n)\times v_n\big)}{\ln(v_n)} = \dfrac{\ln(u_n/v_n)}{\ln(v_n)} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

b) Par la formule de Stirling, $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$.

2. $\ln(u_n) = -\ln n + (1-2\ln 2) + o(1)$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{1-2\ln 2}\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{4n}$, d'où la divergence de la série.

Exercice 178 *Sinus et cosinus*

Nature des séries $\sum \dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n}$ et $\sum \dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n^2}$.

Solution (**Ex.178** – *Sinus et cosinus*)

- $\dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n} \geqslant \dfrac{\sin^2 n + \cos^2 n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$: la série diverge.
- $\dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n^2} \leqslant \dfrac{2}{n^2}$: la série converge.

Exercice 179 *Comparaison de sommes et d'intégrales*

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, on pose : $\forall n \geqslant 1,\quad u_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

Dans la suite, on pose, pour $x \in]0\,;+\infty[$, $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Soit $x \in]0\,;+\infty[$ et $f : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t(t+x)}$.

a) Montrer que f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

b) Justifier que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

c) En déduire un encadrement explicite (i.e. sans intégrale) de $\mathrm{S}(x)$.

3. En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.179** – *Comparaison de sommes et d'intégrales*)

1. $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ (ou "$\leqslant$", ou "O"...) permet de prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$

converge.

2. a) $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ assure que f est intégrable sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.

b) Il s'agit d'une comparaison série/intégrale, possible par la décroissance de f.

On prouve d'abord $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

On somme la partie gauche pour n de 1 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x)$.

On somme la partie droite pour n de 2 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $\displaystyle\mathrm{S}(x) - u_1(x) \leqslant \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Et comme $u_1(x) = f(1)$, on obtient le résultat voulu.

c) On peut décomposer : $\dfrac{1}{t(t+x)} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\right)$.

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\ln t - \ln(t+x)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}\left[\ln\frac{t}{t+x}\right]_1^{+\infty} = \frac{ln(1+x)}{x}.$$

Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

3. On vérifie sans peine que $\dfrac{1}{1+x} = o\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

On pense alors que $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ce que l'on prouve en divisant l'encadrement précédent :

$1 \leqslant \dfrac{x\mathrm{S}(x)}{\ln(1+x)} \leqslant \dfrac{x}{(1+x)\ln(1+x)} + 1$. Le majorant tend vers 1 : les gendarmes assurent $\dfrac{x\mathrm{S}(x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$...

Exercice 180 *Nature*

Nature de $\sum u_n$ pour $u_n = \left(\ln\left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{n}\right)\right)^{-n^2}$ $(\forall n \geqslant 1)$.

Solution (**Ex.180** – *Nature*)

$u_n = \exp\left(-\dfrac{n}{\mathrm{e}} + o(n)\right)$ donc $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 181 *Série des carrés*

On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Solution (**Ex.181** – *Série des carrés*)
Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N}, -1 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc $\forall n \geqslant \mathrm{N}, 0 \leqslant |u_n| \leqslant 1$, donc $\forall n \geqslant \mathrm{N}, u_n^2 \leqslant |u_n|$: $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge par comparaison.

$\boxed{\textbf{Exercice 182}}$ *Leibniz ?*

Soit $a \in [\,0\,;\,+\infty\,[$. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n}{n^2+an+4}$.

Solution (**Ex.182** – *Leibniz ?*)
On montre (en étudiant $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+ax+4}$ par exemple) que $\left(\dfrac{n}{n^2+an+4}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante, de limite nulle... Leibniz s'applique.

$\boxed{\textbf{Exercice 183}}$ *Termes généraux fonctions d'une suite*

On suppose que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$ converge.

1. Justifier, qu'à partir d'un certain rang n_0, $u_n \neq -1$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ où $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge. On pourra s'intéresser à $v_n - u_n$...

Solution (**Ex.183** – *Termes généraux fonctions d'une suite*)
Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \geqslant -\dfrac{1}{2}$ à partir d'un certain rang ($\varepsilon = 1/2$ dans définition de la limite).
On peut montrer que $|v_n - u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$, donc par équivalence $\sum_n (v_n - u_n)$ converge, donc par linéarité $\sum_n v_n$ converge.

$\boxed{\textbf{Exercice 184}}$ *Télescopage*

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ converge.
2. Calculer $\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et en déduire la somme de la série précédente.

Solution (**Ex.184** – *Télescopage*)

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$ et la série converge par équivalence (signe constant négatif !).

2. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ ce qui permet un télescopage.

$$\mathrm{S_N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \ln\big(1+\frac{1}{\mathrm{N}+1}\big) - \ln 2 \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} -\ln 2$$

Exercice 185 *Valeur approchée d'une somme*

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n^3+1}$.

2. On note $\mathrm{S_N}$ sa somme partielle d'ordre N et S sa somme.

a) Quelle est le signe de S ?

b) Déterminer un entier N tel que $|\mathrm{S}-\mathrm{S_N}| \leqslant 10^{-2}$.

c) En déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Solution (**Ex.185** – *Valeur approchée d'une somme*)

1. $\left(\dfrac{1}{2n^3+1}\right)_{n\geqslant 0}$ étant décroissante de limite nulle, le théorème de Leibniz s'applique et assure la convergence de la série alternée.

2. a) Le signe de S est celui du premier terme, donc positif.

b) $|\mathrm{S}-\mathrm{S_N}| = \left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n^3+1}\right| = |\mathrm{R_N}| \leqslant \dfrac{1}{2(\mathrm{N}+1)^3+1}$.

$\dfrac{1}{2(\mathrm{N}+1)^3+1} \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow 2(\mathrm{N}+1)^3+1 \geqslant 100 \Leftrightarrow (\mathrm{N}+1)^3 \geqslant \dfrac{99}{2} \Leftrightarrow \mathrm{N} \geqslant 3$ car N est entier.

N = 3 convient.

c) $\mathrm{S_3} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{17} - \dfrac{1}{55} \left(= \dfrac{1984}{2805} \simeq 0,71\right)$ est une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Exercice 186 *Convergence*

Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Solution (**Ex.186** – *Convergence*)

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}+O\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ par le théorème des séries alternées, et $\sum_{n\geqslant 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge par domination, puisque la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge.
Donc la série initiale converge par linéarité.

Exercice 187 *Convergence*

Soit $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$.

Nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Solution (**Ex.187** – *Convergence*)

$\frac{1}{n}\ln\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(u_n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{-1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

Par équivalence de suites positives et Riemann, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exercice 188 *Série à paramètre*

Soit $a \neq 0$ et $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^{n+1}}$.

Nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Solution (**Ex.188** – *Série à paramètre*)

- Si $a < 0$, $n^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $n^a + (-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$: divergence grossière.
- Supposons $a > 0$.

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(\frac{1}{1-(-1)^n/n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}+\frac{1}{n^{2a}}+o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) = v_n + w_n + o(w_n)$

$\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge par le théorème de Leibniz, $\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ étant décroissante de limite

nulle.
$u_n - v_n = w_n + o(w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ qui est positive.
Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n - v_n$ converge si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}$ par équivalence et par les séries de Riemann.
Comme $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge ssi $a > \dfrac{1}{2}$.
Par équivalence de suites positives et Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exercice 189 *Nature*
Soit $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$.
Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Solution (**Ex.189** – *Nature*)
$\dfrac{1}{n}\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: par définition de la limite, $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N}, |\sqrt[n]{n} - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Ainsi : $\forall n \geqslant \mathrm{N}, |u_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente, par comparaison $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 190 *Ça finira par converger*
Soit $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{n - |\cos n|}{n + |\sin n|}$.
Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, de $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n - 1)$ et de $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n - 1)^2$.

Solution (**Ex.190** – *Ça finira par converger*)
$n - |\cos n| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $n + |\sin n| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement.
$u_n - 1 = \dfrac{-|\cos n| - |\sin n|}{n + |\sin n|} = -\dfrac{|\cos n| + |\sin n|}{n + |\sin n|}$.
De $|\cos n| \leqslant 1$ et $|\sin n| \leqslant 1$ je tire $|\cos n| + |\sin n| \geqslant \cos^2 n + \sin^2 \geqslant 1$, donc

$\dfrac{|\cos n| + |\sin n|}{n + \sin n} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+1}$ diverge, par comparaison $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\cos n| + |\sin n|}{n + |\sin n|}$ diverge et par linéarité $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - 1)$ diverge.

$(u_n - 1)^2 = \left(\dfrac{-|\cos n| - |\sin n|}{n + |\sin n|}\right)^2$

$n + |\sin n| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ car $\sin n = o(n)$, donc $(n + |\sin n|)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. Et comme $(-|\cos n| - |\sin n|)^2 \leqslant 2$, $(u_n - 1)^2 = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - 1)^2$ converge (absolument).

$\boxed{\textbf{Exercice 191}}$ *Télescopage*

Convergence et calcul de la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Solution (**Ex.191** – *Télescopage*)

Voilà qui sent le télescopage à plein nez, donc le calcul de la somme partielle permettra au passage de justifier la convergence.

$$\mathrm{S_N} = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 2\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\mathrm{S_N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\mathrm{S_N} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1 - \sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 192}}$ *Nature*

Soit : $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \dfrac{1}{\ln^n n}$ et $v_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ et de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$.

Solution (**Ex.192** – *Nature*)

- $\dfrac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: par définition de la limite, $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N}, \left|\dfrac{1}{\ln n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $\forall n \geqslant \mathrm{N}, |u_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente, par comparaison $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(\ln x)^{\ln x}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^y\right)^2}{y^y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\left(e^2\right)^y}{y^y}$, or les croissances comparées donnent $q^y = o\left(y^y\right)$ pour tout $q\in\mathbb{R}$.

Donc $\frac{x^2}{(\ln x)^{\ln x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $v_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par négligeabilité, $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge.

$\boxed{\textbf{Exercice 193}}$ *De la nécessité de la constance du signe pour l'équivalence*

Soit : $\forall n\geqslant 1,\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et de $\sum_{n\geqslant 2}\ln(1+u_n)$.

Solution (**Ex.193** – *De la nécessité de la constance du signe pour l'équivalence*)

- $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge par application directe du théorème de Leibniz : $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ décroît et tend vers 0.

Attention : $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ mais le critère des équivalents ne s'applique pas : les suites ne sont pas de signes constants.

- $\ln(1+u_n) = u_n - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Or $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent, et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{-1}{2n}$ diverge vers $-\infty$.

Donc $\sum_{n\geqslant 1}\ln(1+u_n)$ diverge.

$\boxed{\textbf{Exercice 194}}$ *De la nécessité...*

Soit : $\forall n\geqslant 1,\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que u_n et v_n sont équivalents.

2. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

3. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

Solution (**Ex.194** – *De la nécessité...*)

1. $\dfrac{v_n}{u_n} = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $(-1)^n = o\left(\sqrt{n}\right)$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge par application directe du théorème de Leibniz : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ décroît et tend vers 0.

3. Malgré l'équivalence, le critère ne s'applique car le signe n'est pas constant.
$v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge mais $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ diverge.

Exercice 195 *Leibniz : positive de limite nulle ne suffit pas*

Soit : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$, puis de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$.

Solution (**Ex.195** – *Leibniz : positive de limite nulle ne suffit pas*)

- Soit $\mathrm{H_N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} u_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2k} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{H_N} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k-1)^2} \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{H_N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

-

Le théorème de Leibniz ne s'applique pas directement car la suite n'est pas monotone.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-1)^n u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \mathrm{N}/2 \rfloor} \frac{1}{2k} - \sum_{n=0}^{\lfloor (\mathrm{N}-1)/2 \rfloor} \frac{1}{(2k+1)^2}$

Or la première somme diverge vers $+\infty$ car la série harmonique diverge, la seconde domination par la série de Riemann de paramètre 2 converge car $\dfrac{1}{(2k+1)^2} = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ diverge... bien que u soit positive de limite nulle...

Chapitre 8

Intégrales généralisées

Exercice 196 *Natures*

Déterminer la nature de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+1}$, $\mathrm{I} = [\,0\,;\,+\infty\,[$

2. $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t^3+1}}$, $\mathrm{I} = [\,1\,;\,+\infty\,[$

3. $f : t \mapsto \sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^3+t^2}}$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\,1\,]$

4. $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{t^3+1}}$, $\mathrm{I} = [\,0\,;\,+\infty\,[$

5. $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}$, $\mathrm{I} =]\,1\,;\,2\,]$

6. $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}$, $\mathrm{I} = [\,2\,;\,+\infty\,[$

7. $f : t \mapsto \dfrac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\,+\infty\,[$

8. $f : t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\,+\infty\,[$

Solution (**Ex.196** – *Natures*)

1. Convergente : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, ou encore $\mathrm{F} : t \mapsto \dfrac{-1}{t+1}$;

2. Convergente : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o\left(\dfrac{1}{t^{5/4}}\right)$;

3. Divergente : $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$;

4. Convergente : $\forall t \geqslant 1, |f(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^{3/2}}$;

5. Divergente :
$f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\ln(t)}$, et $(\forall t > 1, \ln(t) \leqslant t-1) \Rightarrow \big(\forall t > 1, \dfrac{1}{\ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{t-1}\big)$,
or $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$ diverge $\displaystyle\int_x^2 \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t = -\ln(x-1) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$;

6. Convergente : $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, ou encore : $\forall t \geqslant 3, f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$;

7. Divergente : $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
mais : $\forall t \in \,]\,0\,;1\,[\,, f(t) = \dfrac{1}{t}$ entraîne la divergence de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$;

8. Convergente : $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
et en 0 : $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = \ln(t^2+1) - 2\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$ or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge ...
Remarque : une intégration par parties peut aussi justifier la convergence (et donner la valeur) :
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP.}}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \pi ...$$

Exercice 197 *Calculs*

Montrer l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$

2. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\exp(x)+1)(\exp(-x)+1)}$

3. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\mathrm{d}x$

4. $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

5. $\mathrm{M} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

6. $\mathrm{N}_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$ où $a \in \,]\,1\,;\,+\infty\,[$

7. $\mathrm{P} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\exp(x)+1}}$

8. $\mathrm{Q} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}(x)}$

9. $\mathrm{R} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\ln(\sin x)\mathrm{d}x$

Solution (**Ex.197** – *Calculs*)

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ continue positive sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.
$\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = \left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]_0^{+\infty} = \ln 2.$

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}$ continue positive sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$: convergence par équivalence.
$\mathrm{J} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$

3. $f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ continue positive sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$,
$\sqrt{x}f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x^2) - 2\sqrt{x}\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par domination en 0 et équivalence en $+\infty$.
$\mathrm{K} \overset{\text{IPP.}}{=} \left[x\ln(1+1/x^2)\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$

4. $f : x \mapsto \exp(-\sqrt{x})$ continue positive sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, $x^2f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en $+\infty$.
$\mathrm{L} \overset{u=\sqrt{x}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \overset{\text{IPP.}}{=} \left[-2u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 2.$

5. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$ continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, $\sqrt{x}f(x) = \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $x^{3/2}f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en 0 et en $+\infty$.

$\mathrm{M} \overset{u=1/x}{=} -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = -\mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} = 0$.

6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ continue positive sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.

$\mathrm{N}_a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_a^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}$.

7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination.

$\mathrm{P} \overset{u=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}{=} \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{u^2-1}\mathrm{d}u = 2\mathrm{N}_{\sqrt{2}} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2})$.

8. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}x}$ continue sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination.

$\mathrm{Q} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{2}{u^2-1}\mathrm{d}u = 2\mathrm{N}_{\mathrm{e}} = \ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$.

9. $f : x \mapsto \sin x \ln(\sin x)$ continue sur $]\,0\,;\,\pi/2\,]$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc intégrale faussement impropre.

$\mathrm{R} \overset{x=\cos t}{=} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-t)+\ln(1+t)\mathrm{d}t = \ln 2 - 1$.

Exercice 198 *Développement asymptotique pour une intégrale divergente*

1. Établir la divergence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{u^2+2u}}{u^3+2u^2}\mathrm{d}u$.

2. a) On pose, pour x dans $]\,0\,;\,1\,]$, $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\sqrt{u^2+2u}}{u^3+2u^2}\mathrm{d}u$. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$?

b) À l'aide du changement de variable $z = 1/u$, montrer que

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} - \sqrt{3} + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

Solution (**Ex.198** – *Développement asymptotique pour une intégrale divergente*)

1. $\dfrac{\sqrt{u^2+2u}}{u^3+2u^2} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{2u}}{2u^2} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}u^{3/2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$ diverge ...

a) $+\infty$ (l'intégrale divergente d'une fonction positive tend vers $+\infty$!)

b) $f(x) \overset{z=1/u}{=} \displaystyle\int_1^{1/x} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+2z}} = \left[\sqrt{1+2z}\right]_1^{1/x} = \sqrt{1+\frac{2}{x}} - \sqrt{3}$.

$$\text{Puis } f(x) - \sqrt{\frac{2}{x}} + \sqrt{3} = \sqrt{1+\frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{2}{x}}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Exercice 199 *Intégrales jumelles*

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence, les intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)} \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que I_n et J_n existent. Que vaut $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$?

2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, en déduire I_n et J_n.

Solution (**Ex.199** – *Intégrales jumelles*)

1. • Convergence : $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^n)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{n+2}}$ avec $n+2>1$ et $\dfrac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ avec $2>1$.

• $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi/2.$

2. $\mathrm{I}_n \overset{u=1/t}{=} \mathrm{J}_n$, donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n = \pi/4$.

Exercice 200 *Se méfier des bornes liées*

1. Justifier la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

2. Pour $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

Calculer $\mathrm{I}(x)$, et en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$.

3. Soit $x>0$. Comparer $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1/x}^{1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

4. Étudier rapidement la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et interpréter graphiquement les résultats précédents.

Solution (**Ex.200** – *Se méfier des bornes liées*)

1. La minoration $\dfrac{\ln t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$ pour $t \geqslant \mathrm{e}$ suffit à justifier la non-intégrabilité en $+\infty$.

2. $\mathrm{I}(x) = \left[\dfrac{\ln^2 t}{2}\right]_{1/x}^{x} = \dots = 0$, donc $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,bien que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

3. $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = -\int_{1/x}^{1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ puisque leur somme $\mathrm{I}(x)$ vaut 0...

4. ...donc la “partie positive de la courbe” de 1 à x compense exactement la “partie négative” de $1/x$ à 1 (je suppose dans ce commentaire que $x > 1$) ...

Exercice 201 *Équivalent d'une suite d'intégrales*

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\mathrm{d}x.$$

1. Établir que, pour tout entier naturel non nul n, I_n existe.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathrm{I}_n = \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Solution (**Ex.201** – *Équivalent d'une suite d'intégrales*)

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^{nx}}\frac{\ln(n+x)}{x} = 0\times 0 = 0$, ainsi $\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et on conclut par négligeabilité ...

2. $\displaystyle\mathrm{I}_n \overset{\text{IPP.}}{=} \left[\frac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\ln(n+x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x = \frac{\ln n}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x.$

Alors $\forall x > 0$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \overset{\text{primit.}}{=} \frac{1}{n}$ donne

$\dfrac{\ln n}{n} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n^3}$, donc $\mathrm{I}_n - \dfrac{\ln n}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

Exercice 202 *Tassement*

Soit $f : [\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

Solution (**Ex.202** – *Tassement*)

Il suffit d'écrire (Chasles) :

$$\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0 \ldots$$

Exercice 203 *Une différence entre séries et intégrales*

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

Indication : On commencera par poser $u = t^2$, puis par faire une intégration par parties...

2. a) Est-il nécessaire que le terme général de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tende vers 0 pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge ?

b) Est-il nécessaire que f, continue par morceaux sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$, admette une limite nulle en $+\infty$ pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ existe ?

Solution (**Ex.203** – *Une différence entre séries et intégrales*)

1. Le changement de variable $u = t^2$ conduit à l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, qui en intégrant par parties est de même nature que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{3/2}}\mathrm{d}u$, elle-même absolument convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$.

2. a) Si une série converge, son terme général tend vers 0 :

$$u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = 0.$$

C'est dans le cours de première année.

b) $f : t \mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[\,\sqrt{\pi}\,;\,+\infty\,[$, n'admet aucune limite en $+\infty$ et pourtant $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} f$ existe...

Exercice 204 *Que faire d'un logarithme ?*

Montrer l'existence et calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.204** – *Que faire d'un logarithme ?*)

Ici, il est INTERDIT DE NE RIEN TENTER, car tout marche :

- pour l'existence :

☞Comparaison : $\forall x \leqslant 0,\ 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(2)$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ existe ...

☞Négligeabilité : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0$ donc $\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \underset{x\to+\infty}{o}(1/x^2)$ ...

☞Équivalence : $\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \overset{\text{primit.}}{=} \frac{1}{2}$ existe ...

- pour l'existence et la valeur (comme souvent, savoir calculer la valeur permet de justifier au passage l'existence) :

☞Calcul d'une primitive : la formule de dérivation $(u\ln u)' = u'\ln u + u'$ fournit $u'\ln u = \big(u(\ln u - 1)\big)'$ donc
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x \overset{\text{primit.}}{=} -\left[(1+\mathrm{e}^{-x})\big(\ln(1+\mathrm{e}^{-x})-1\big)\right]_0^{+\infty} = 1+2(\ln 2 - 1) = 2\ln 2 - 1$;

☞Changement de variable :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x \overset{u=\mathrm{e}^{-x}}{=} \int_0^1 \ln(1+u)\mathrm{d}u \overset{\text{IPP.}}{=} [(1+u)\ln(1+u)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1+u}{1+u}\mathrm{d}u = 2\ln 2 - 1$;

☞Par intégration par parties :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x \overset{\text{IPP.}}{=} \left[-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(1+\mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \Gamma(1) = 2\ln 2 - 1.$

Exercice 205 *Développement asymptotique du reste de l'intégrale de Gauss*

1. Justifier l'existence de l'intégrale de Gauβ :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

2. a) On pose, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{R}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{R}(x)$?

b) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \mathrm{R}(x)$.

c) En déduire que : $\quad \mathrm{R}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

Solution (**Ex.205** – *Développement asymptotique du reste de l'intégrale de Gauss*)

1. $\mathrm{e}^{-t^2} = o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$ assure la convergence en $+\infty$.

2. a) $\mathrm{R}(x) = \mathrm{I} - \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ comme tout reste d'une intégrale convergente.

b) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP.}}{=} \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \mathrm{R}(x)$.

c) Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{R}(x)}{2x^2}$

En divisant par $\mathrm{R}(x)$ (car $\mathrm{R}(x) \neq 0$), on obtient $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}/(2x)}{\mathrm{R}(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ ...

Exercice 206 *Équivalent de ln(n !)*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère :

$$\mathrm{S}_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ?

2. Justifier l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{1/n}^{1+1/n} \ln(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \int_{1/n}^{1+1/n} \ln(t)\mathrm{d}t.$$

En déduire la convergence et la limite de la suite S.

3. Déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.206** – *Équivalent de ln(n !)*)

1. Pour $x \in]\,0\,;\,1\,]$, $\displaystyle\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t = -1 - x\ln x + x \xrightarrow[x\to 0]{} -1$: $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut -1.

2. Par croissance de ln sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ donc sur $[\,k/n\,;\,(k+1)/n\,]$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[\frac{k}{n}\,;\,\frac{k+1}{n}\right], \ln\frac{k}{n} \leqslant \ln t \leqslant \ln\frac{k+1}{n}.$$

En intégrant les encadrements précédents,

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!], \qquad \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln t\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$$

En sommant pour k allant de 1 à n,

$$\mathrm{S}_n \leqslant \int_{1/n}^{1+1/n} \ln t \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n}.$$

En isolant S_n,

$$\int_{1/n}^{1+1/n} \ln t \mathrm{d}t + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \int_{1/n}^{1+1/n} \ln t \mathrm{d}t$$

$\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}\ln\dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{n+1} = 0$.

Par 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{1/n}^{1+1/n} \ln t \mathrm{d}t = -1$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = -1$.

3. $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln n)\right) = \dfrac{\ln(n!)}{n} - \ln n$ d'où $\ln(n!) = n\mathrm{S}_n + n\ln n$

et $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} = \dfrac{\mathrm{S}_n}{\ln n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.

$\boxed{\textbf{Exercice 207}}$ *Arctangentes en cascade*

1. Justifier la convergence des intégrales

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\ \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \text{ et } \mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

2. Les calculer.

Solution (**Ex.207** – *Arctangentes en cascade*)

1. I, J et K convergent par le critère des équivalents.

2. $\mathrm{I} \overset{\text{primit.}}{=} [\arctan x]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{I} \overset{\text{IPP.}}{=} \left[\dfrac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + 2\mathrm{K}$ donc $\mathrm{K} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\mathrm{J} = \mathrm{I} - \mathrm{K} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 208}}$ *Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales*

Pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty\,[$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\Gamma(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction Γ est effectivement définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
Γ *s'appelle la fonction gamma d'Euler.*

2. a) Montrer que, pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty\,[$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

En quelque sorte, Γ prolonge la factorielle sur $]\,0\,;+\infty\,[$... au décalage d'une unité près.

3. On admet que Γ est une fonction continue.
Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0.

4. Pour tous p et q de $\mathbb{N}$, on pose sous réserve d'existence,

$$\mathrm{I}_{p,q} \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 z^p \ln^q z \mathrm{d}z.$$

En utilisant le changement de variable $u = -(p+1)\ln z$, justifier l'existence de $\mathrm{I}_{p,q}$ et la calculer.

Solution (**Ex.208** – *Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales*)

1. • $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ assure la convergence en $+\infty$.

• $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$ assure la convergence en 0 (et aussi la divergence si $x \leqslant 0$...).

2. a) Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$. Comme $t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, par une intégration par parties, j'obtiens :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$...

3. $\forall \mathrm{X} > 0, \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ or $\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \Gamma(1)$ par continuité donc $\Gamma(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
D'où $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4. Le changement proposé étant une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante,

$$\mathrm{I}_{p,q} \overset{u=1(p+1)\ln z}{=} \int_{+\infty}^0 \left(\mathrm{e}^{-u/(p+1)}\right)^p \left(\frac{-u}{p+1}\right)^q \left(\frac{-1}{p+1}\mathrm{e}^{-u/(p+1)}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{(-1)^q}{(p+1)^{q+1}}\Gamma(q+1) = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 209}}$ *Couple d'intégrales*

Soit sous réserve d'existence,

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)\mathrm{d}u$.

3. À l'aide du changement de variable $u = \pi - x$ dans I, montrer que J existe et vaut 2I.

4. Montrer que $2\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\mathrm{J} - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

5. En déduire la valeur de I, puis celle de J.

Solution (**Ex.209** – *Couple d'intégrales*)

1. On sait : $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$. A-t-on $\ln\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$?

$\dfrac{\ln\sin x}{\ln x} = \dfrac{\ln(\frac{\sin x}{x}x)}{\ln x} = \dfrac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\ln x} + 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, donc $\ln\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$.

Or $\displaystyle\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ existe (en utilisant la primitive $x \mapsto x\ln x - x$ par exemple). Dernier détail : $\ln\sin x$ et $\ln x$ sont négatives au voisinage de 0. On passe à l'absolue convergence : $|\ln\sin x| \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$, donc par le critère des équivalents, I est absolument convergente, donc existe.

2. $\mathrm{I} \overset{u=\frac{\pi}{2}-x}{=} \displaystyle\int_{\pi/2}^0 \ln\sin(\pi/2 - u) \times (-1)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln\cos u\mathrm{d}u$.

3. $\mathrm{I} \overset{u=\pi-x}{=} \displaystyle\int_{\pi}^{\pi/2} \ln\sin(\pi - u) \times (-1)\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin u\mathrm{d}u$.

Par Chasles : $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{I} + \mathrm{I}$

4. $2\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x\cos x)\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin(2x)}{2})\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\sin(2x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \ln 2\mathrm{d}x$

Et en posant $u = 2x$ dans la première intégrale,

$2\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} (\ln\sin x) \times (\frac{1}{2})\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\mathrm{J} - \frac{\pi}{2}\ln 2$.

5. 3. dans 4. donne $2\mathrm{I} = \mathrm{I} - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$ donc $\mathrm{I} = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

Exercice 210 *Quelques séries de Bertrand*

1. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

2. Soit $\beta > 1$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$.

Solution (**Ex.210** – *Quelques séries de Bertrand*)

1. Soit $f : [\,2\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$.

$\displaystyle\int_2^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_2^{\mathrm{T}} \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} +\infty$, et comme f est continue, positive et décroissante, par comparaison série/intégrale, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

2. Soit $f_\beta : [\,2\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^{\beta}(t)}$.

$\displaystyle\int_2^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}(t)}\right]_2^{\mathrm{T}} \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(2)}$s, et comme f est continue, positive et décroissante, par comparaison série/intégrale, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$ converge.

Exercice 211 *Limite d'une famille de séries*

1. Soit $a \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{n^2+a^2}$ converge.

b) Montrer que : $\displaystyle\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer l'existence de $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$, puis la calculer.

Solution (**Ex.211** – *Limite d'une famille de séries*)

1. a) $\displaystyle\frac{a}{n^2+a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ assure la convergence par le critère des équivalents pour ces séries à terme général positif et par la convergence de la série de Riemann de paramètre 2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\forall t \in [\,n\,;\,n+1\,]\,, \frac{a}{n^2+a^2} \geqslant \frac{a}{t^2+a^2}$, donc $\displaystyle\frac{a}{n^2+a^2} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$

$\displaystyle\forall t \in [\,n-1\,;\,n\,]\,, \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \frac{a}{t^2+a^2}$, donc $\displaystyle\frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$

En sommant ces inégalités pour $n \in [\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$,

$$\int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \int_0^{\mathrm{N}} \frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t.$$

À l'aide de la primitive $t \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{a}\right)$ de $t \mapsto \dfrac{a}{t^2+a^2}$,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{\mathrm{N}+1}{a}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{\mathrm{N}}{a}\right).$$

Par conservation des inégalités (larges) en passant à la limite :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

2. Puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0$, $\lim\limits_{a\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ existe par le théorème d'encadrement et

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

* **Exercice 212** *Limite d'une intégrale à paramètre*

Soit $f : [\,0\,;+\infty\,[$ une fonction continue et a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Solution (**Ex.212** – *Limite d'une intégrale à paramètre*)

Écrivons, par continuité de f en 0, $f(t) = f(0) + \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Alors :

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = f(0)\int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a} + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Reste à justifier : $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Pour $x > 0$, ε est continue sur le segment $[\,ax\,;\,bx\,]$ donc bornée et par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{t\in[\,ax\,;\,bx\,]} |\varepsilon(t)| \ln\frac{b}{a}.$$

Or $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$ entraîne $\max\limits_{t\in[\,ax\,;\,bx\,]} |\varepsilon(t)| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. (Sauriez-vous le démontrer ?)

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = f(0)\ln\frac{b}{a}$.

Exercice 213 *Intégrales à paramètre*

a désigne un réel de $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

1. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\mathrm{I}_a \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}.$$

2. Justifier l'existence de

$$\mathrm{J}_a \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

3. À l'aide du changement de variable $u = a^2/t$, calculer J_a.

Solution (**Ex.213** – *Intégrales à paramètre*)

1. $t \mapsto \dfrac{1}{a^2+t^2}$ est continue et positive sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$. Comme $\dfrac{1}{a^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, on obtient l'existence par équivalence.

$\mathrm{I}_a \overset{u=t/a}{=} \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}a\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\left[\mathrm{Arctan}u\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}$.

2. $\dfrac{\ln t}{a^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{a^2}\ln t$ donc par équivalence de fonctions négatives (et comme $\displaystyle\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t$ existe), $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$ existe.

$t^{3/2}\dfrac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\ln t}{a^2+t^2} = o\left(t^{3/2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$ existe par domination.

Donc J_a existe.

3. $\mathrm{J}_a \overset{u=a^2/t}{=} \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{2\ln a - \ln u}{a^2+a^4/u^2}\left(\frac{-a^2}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{2\ln a - \ln u}{u^2+a^2}\mathrm{d}u = 2\ln(a)\mathrm{I}_a - \mathrm{J}_a$

d'où $\mathrm{J}_a = \ln(a)\mathrm{I}_a = \dfrac{\pi \ln a}{2a}$.

Exercice 214 *Fonction définie par une intégrale*

Soit, pour $a \in \mathbb{R}$ et sous réserve d'existence,

$$f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est décroissante.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution (**Ex.214** – *Fonction définie par une intégrale*)

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t^a+1}$ est continue et positive sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ et :

- pour $a > 0$, $\dfrac{1}{t^a+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$ donc par équivalence $f(a)$ existe si, et seulement si, $a > 1$;
- pour $a \leqslant 0$, $\forall t \geqslant 1, t^a = \mathrm{e}^{a\ln(t)} \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{t^a+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}$ diverge et $f(a)$ n'est pas définie.

Bilan : l'ensemble de définition de f est $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

2. Soit $1 < a \leqslant b$. $\forall t \geqslant 1, \dfrac{1}{t^b+1} \leqslant \dfrac{1}{t^a+1}$ donc par croissance de l'intégrale $f(b) \geqslant f(a)$. Donc f est décroissante.

3. Soit $1 < a$. $\forall t \geqslant 1, \dfrac{1}{t^a+1} \leqslant \dfrac{1}{t^a}$ donc par croissance de l'intégrale :

$0 \leqslant f(a) \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{a-1}$, d'où par encadrement $f(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$.

Exercice 215 *Une fonction constante*

Soit $g :]\,0\,;\,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est effectivement définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. On admet que : $g(1) = \dfrac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).
À l'aide d'un changement de variable, calculer $g(x)$ pour $x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Solution (**Ex.215** – *Une fonction constante*)

1. L'intégrale est faussement impropre en 0 car $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(xt)}{t} = x$. La convergence en $+\infty$ se prouve en par une intégration par parties en dérivant $t \mapsto 1/t$ et primitivant $t \mapsto \sin(xt)$, puis par comparaison, grâce à l'intégrale de Riemann da paramètre $\alpha = 2$.

2. $g(x) \overset{u=xt}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 216 *Que faire d'un logarithme ?*

1. Établir la convergence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

2. Calculer I.

Solution (**Ex.216** – *Que faire d'un logarithme ?*)

1. $\dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^{3/2})$ et on conclut par le critère de domination.

2. $\mathrm{I} \overset{\text{IPP.}}{=} \left[-\dfrac{\ln t}{t}\right]_1^{+\infty} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} \overset{\text{primit.}}{=} 1.$

Exercice 217 *Convergence de l'intégrale de Dirichlet*

1. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

2. En déduire la nature de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

3. Justifier l'existence de $\mathrm{D} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$, intégrale de Dirichlet (qui vaut $\pi/2$ pour information).

Solution (**Ex.217** – *Convergence de l'intégrale de Dirichlet*)

1. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ donc I est faussement impropre en 0.
$0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ permet de comparer I à une intégrale convergente en $+\infty$.

2. Une intégration par parties permet de conclure, avec en plus I = J.

3. L'intégrande est paire (à vérifier !), donc D existe (et vaut 2J).

Exercice 218 *convergences*

1. Nature de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin t}\mathrm{d}t$, $\quad \mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{\sin t}\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}\mathrm{d}t$.

2. En effectuant changement de variable $u = \pi - t$ dans K, déterminer la nature de $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}\mathrm{d}t$.

Solution (**Ex.218** – *convergences*)

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$: I diverge ; $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} -1$: J converge (faussement impropre) ;
$\dfrac{1}{\sqrt{\sin t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$: K converge.

2. $\mathrm{K} \overset{u=\pi-t}{=} \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin(\pi-u)}} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin(u)}}$. Par la relation de Chasles, L existe et $\mathrm{L} = \mathrm{K} + \mathrm{K}$.

Exercice 219 *Intégrale à paramètre*

Soit a un réel.

1. Établir la convergence de $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

2. Calculer I_a.

Solution (**Ex.219** – *Intégrale à paramètre*)

1. $\ln\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{a^2}{t^2}$ donne la convergence en $+\infty$ par équivalence (Riemann en $+\infty$).

$\ln\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right) = \ln(t^2+a^2) - 2\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$ donne la convergence en 0 par équivalence ($\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge).

2. $\mathrm{I}_a \overset{\text{IPP.}}{=} \left[t\ln\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+a^2} - \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2a^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$

$\mathrm{I}_a = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t/a)^2+1}\mathrm{d}t \overset{u=t/a}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} a\mathrm{d}u = 2a\frac{\pi}{2} = a\pi$ (happy ?)

Exercice 220 *Racines imbriquées*

1. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$?

2. a) Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sqrt{t}}}$ existe.

b) Calculer I en posant $t = \sin^4 x$.

Solution (**Ex.220** – *Racines imbriquées*)

1. $\dfrac{1}{1-\sqrt{t}} = \dfrac{1+\sqrt{t}}{1-t} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{2}{1-t}$ donc divergence par équivalence (Riemann sur $[\,0\,;1\,[$).

2. a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{t}}} = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t}}$ donc I existe par équivalence et convergence de l'intégrale de Riemann sur $[\,0\,;1\,[$.

b) $\mathrm{I} \overset{x=\sin^4 t}{=} 4\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\mathrm{d}x = \left[-3\cos x + \frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}$

car $\sin^3 x = \frac{1}{4}\big(3\sin(x) - \sin(3x)\big)$: toujours linéariser pour primitiver des puissances de sin ou cos.

Exercice 221 *Autour de la tangente*

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(t)\mathrm{d}u.$

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}u$ de deux façons :

a) en cherchant un equivalent de $\sqrt{\tan t}$ en $\frac{\pi}{2}$;

b) en effectuant le changement de variable $u = \tan t$.

Solution (**Ex.221** – *Autour de la tangente*)

1. Une primitive sur $]\,0\,;\pi/2\,[$ de $t \mapsto \tan t$ est $t \mapsto -\ln(\cos t) \xrightarrow[t\to\pi/2]{} +\infty$ ... donc divergente.

2. a) $\displaystyle\frac{\sin t}{\cos t} \underset{t\to\pi/2^-}{\sim} \frac{1}{\cos t} \underset{t\to\pi/2^-}{\sim} \frac{1}{\sin(\pi/2 - t} \underset{t\to\pi/2^-}{\sim} \frac{1}{\pi/2 - t}$ donc

$\tan^\alpha t \underset{t\to\pi/2^-}{\sim} \displaystyle\frac{1}{(\pi/2-t)^\alpha}$ et par équivalence I est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{(\pi/2-t)^\alpha}$ donc convergente car $\alpha = 1/2 < 1$.

NB : et on retrouve la divergence de l'intégrale de la première question avec $\alpha = 1$...

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}u \overset{u=\tan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ donne la convergence par équivalence à l'intégrale de Riemann en $+\infty$ $(\alpha > 1)$.

Exercice 222 *Arc-tangente like*

1. Justifier la convergence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4u^2+4u+5}\mathrm{d}u.$

2. Calculer I à l'aide du changement de variable $x = u + 1/2$.

Solution (**Ex.222** – *Arc-tangente like*)

1. Remarquer que $4u^2 + 4u + 5 = 4\left[(u+\frac{1}{2})^2 + 1\right] > 0$.

$\displaystyle\frac{1}{4u^2+4u+5} \underset{u\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{4u^2}$ assure la convergence.

2. $\mathrm{I} \overset{x=u+1/2}{=} \displaystyle\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \overset{\text{primit.}}{=} \frac{\pi}{4}.$

Exercice 223 *Arctangentes à gogo*

1. Montrer que : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$ converge.

2. a) Montrer que : $\forall y \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,,\ \arctan \dfrac{1}{y} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan y$.

b) Pour $a \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$, on pose $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{x \arctan x}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$. À l'aide du changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, montrer que $2\mathrm{I}_a = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{x}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$.

c) En déduire que : $\mathrm{I}_a = \dfrac{\pi}{8} \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$.

d) En déduire finalement la valeur de I.

3. a) Montrer par une intégration par parties que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

b) En observant que $\dfrac{1}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$, calculer I à l'aide d'une nouvelle intégration par parties.

Solution (**Ex.223** – *Arctangentes à gogo*)

1. $\dfrac{x \arctan x}{(x^2+1)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^3}$ assure la convergence de I.

2. a) Montrer en la dérivant que $y \mapsto \arctan \dfrac{1}{y} + \arctan y$ est constante et vaut $\dfrac{\pi}{2}$ en 1.

b) $\mathrm{I}_a \overset{y=1/x}{=} \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan y}{(1+y^2)^2} y \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_{1/a}^{a} \frac{y}{(1+y^2)^2} \mathrm{d}y - \mathrm{I}_a$.

c) $\mathrm{I}_a = \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{y}{(1+y^2)^2} \mathrm{d}y \overset{\text{primit.}}{=} \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1+y^2} \right]_{1/a}^{a} = \frac{\pi}{8} \frac{a^2-1}{a^2+1}$.

d) $\mathrm{I} = \displaystyle\lim_{a \to +\infty} \mathrm{I}_a = \frac{\pi}{8}$.

3. a) $\mathrm{I} = \left[\dfrac{-1/2}{1+x^2} \mathrm{Arctan}(x) \right]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \left[\frac{-1/2}{1+x^2} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 224 *Surprenant (ou pas) ?*

1. Soit $\mathrm{I} = \int_{\pi}^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt$, $\mathrm{J} = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$ et $\mathrm{K} = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du$.

a) Montrer que I et J sont de même nature.

b) Montrer que J et K sont de même nature.

c) En déduire la nature de I.

2. $t \mapsto \cos\left(t^2\right)$ admet-elle une limite lorsque t tend vers $+\infty$?

3. Quelle conclusion en tirez-vous ?

Solution (**Ex.224** – *Surprenant (ou pas) ?*)

1. a) Poser $u = t^2$ (l'intégrale de π à π^2 existe, elle n'est pas impropre !)

b) Et une intégration par parties !

c) K est absolument convergente, par la majoration $\left|\sin u/u^{3/2}\right| \leqslant 1/u^{3/2}$.

2. Non !!!!!!!!!!!

3. Contrairement à ce qui se passe pour les séries, il n'est pas nécessaire que f tende vers 0 en $+\infty$ pour que $\int^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge ...

Exercice 225 *Convergence*

Étudier la nature de $\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-t}}$.

Solution (**Ex.225** – *Convergence*)

I converge : d'une part $\frac{1}{\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe $(= 1)$;

d'autre part : $\frac{1}{\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{t^2\mathrm{e}^{-t}} \leqslant \mathrm{e}^t$ pour $t \geqslant 1$, et $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \overset{\text{primit.}}{=} 1$ existe.

Exercice 226 *Limite d'une moyenne*

Soit f fonction continue et positive sur $[\,0\,; +\infty\,[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = 0$.

Solution (**Ex.226** – *Limite d'une moyenne*)

Pour $x \geqslant 1$, en majorant t par $\sqrt{x}$ pour $t \in [\,0\,; \sqrt{x}\,]$ et t par x pour $t \in [\,\sqrt{x}\,; x\,]$, on a : $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + x\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors $0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t$.

On conlut avec $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{I}$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{}$ 0.

Exercice 227 *Équivalent en 0 et limite en l'infini*

1. Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$.

2. a) Majorer $\left|\sqrt{1+u}-1\right|$ pour $u\in[\,0\,;\,1\,]$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

b) En déduire $\displaystyle\left|\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} - \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leqslant \frac{1}{2}$

c) Proposer en équivalent simple de $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$ en 0.

3. a) Calculer la dérivée de $x\mapsto \ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ sur $[\,\pi/4\,;\,\pi/2\,]$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$ à l'aide du changement de variable $t=\tan x$.

Solution (**Ex.227** – *Équivalent en 0 et limite en l'infini*)

1. $\dfrac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donne la divergence de l'intégrale en 0, $\dfrac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donne la convergence de l'intégrale en $+\infty$ grâce aux intégrales ed Riemann adéquates.

2. a) $f :_i ntff01 \to \mathbb{R}, u\mapsto \sqrt{1+u}$ est $\mathcal{C}^1$ avec $|f'|\leqslant \dfrac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis, $\left|\sqrt{1+u}-1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u-0| \leqslant \dfrac{u}{2}$ pour tout u de $[\,0\,;\,1\,]$.

b) Par l'inégalité triangulaire, puis 2.a) avec $u=t^2$, puis croissance de l'intégrale, on a pour $x\in\,]\,0\,;\,1\,]$:

$$\left|\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} - \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| = \left|\int_x^1 \frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^1 \left|\frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{t^2/2}{t\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_x^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$
$$\left|\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} - \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_x^1 t\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}(1-x) \leqslant \frac{1}{2}$$

c) ... Donc $\displaystyle\left|\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} - (-\ln x)\right| \leqslant \frac{1}{2}$, et $\left|\dfrac{\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}}{-\ln x} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{-2\ln x}$, d'où par les gendarmes :

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} - \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 1 : \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$

3. Dérivée : $x \mapsto \dfrac{2}{\sin(x)}$... et ensuite $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

Chapitre 9

Suites de fonctions et convergence dominée

Exercice 228 *Se méfier des opérations algébriques, même simples !*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\quad f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n). La convergence est-elle uniforme ?

2. Étudier la limite simple de la suite (f_n^2). La convergence est-elle uniforme ?

3. La suite (f_n^2) converge-elle uniformément sur tout segment de $[\,0\,;\,a\,]$ de $\mathbb{R}^+$?

Solution (**Ex.228** – *Se méfier des opérations algébriques, même simples !*)

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$, donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}+$ vers $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||f_n - f||_\infty = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^2(x) = x^2$, donc la suite (f_n^2) converge simplement sur $\mathbb{R}+$ vers $f^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \left|f_n^2(x) - f^2(x)\right| = \left|\dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right|$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \overset{\text{déf.}}{=} n$. Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \left|f_n^2(x_n) - f^2(x_n)\right| = \left|2 + \dfrac{1}{n^2}\right| > 2$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||f_n - f||_\infty > 2$ et $(||f_n - f||_\infty)_n$ ne tend pas vers 0.
Ainsi la suite (f_n^2) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f^2.

3. Soit $a \geqslant 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [\,0\,;\,a\,], \quad \left|f_n^2(x) - f^2(x)\right| = \left|\dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right|.$
donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||f_n - f||_{\infty,[\,0\,;\,a\,]} = \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ et $(||f_n - f||_{\infty,[\,0\,;\,a\,]})_n$ tend vers 0.
Ainsi la suite (f_n^2) converge uniformément sur tout segment $[\,0\,;\,a\,]$ vers f^2.
Moralité : la convergence uniforme ne supporte pas nécessairement les opérations algébriques simples...
Prévisibilité de la situation : de l'identité $f_n^2 - f^2 = (f_n - f)(f_n + f)$, on pressent que pour que $\left|\left|f_n^2 - f^2\right|\right|_\infty \xrightarrow[n\to 0]{}$, mieux vaut maîtriser $||f_n + f||_\infty$, ce qui ici n'est le cas que sur des intervalles bornés...

$\boxed{\textbf{Exercice 229}}$ *Réfuter la CVU par les intégrales*
Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [\,0\,;\,1\,] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [\,0\,;\,1/n\,], \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[\,0\,;\,1\,]$?

4. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[\,a\,;\,1\,]$ avec $a \in\,]\,0\,;\,1\,]$.

Solution (**Ex.229** – *Réfuter la CVU par les intégrales*)
Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [\,0\,;\,1\,] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [\,0\,;\,1/n\,], \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
- $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,;$
- Soit $x \in\,]\,0\,;\,1\,]$. Dès que $n > \dfrac{1}{x}$, on a $x > \dfrac{1}{n}$ donc $f_n(x) = 0$. Ainsi $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle $f : [\,0\,;\,1\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$.

2. $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} n^2 t(1 - nt)\mathrm{d}t = n^2 \int_0^{1/n} t\mathrm{d}t - n^3 \int_0^{1/n} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

3. Si la suite de fonctions continues (f_n) convergeait uniformément vers la fonction continue f, on aurait :
$\displaystyle\int f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f$, or $\displaystyle\int f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{6}$ et $\displaystyle\int f = 0$...

La suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[\,0\,;\,1\,]$.

4. Soit $a \in \,]\,0\,;\,1\,]$. Dès que $n > \dfrac{1}{a}$, $\forall x \in [\,a\,;\,1\,]$, $\quad f_n(x) - f(x) = 0 - 0 = 0$.

Ainsi : $\forall n > \dfrac{1}{a}$, $\quad ||f_n - f||_{\infty,[\,a\,;\,1\,]} = 0$. A fortiori, $||f_n - f||_{\infty,[\,a\,;\,1\,]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La suite (f_n) converge uniforme sur $[\,a\,;\,1\,]$ (pour tout $a \in \,]\,0\,;\,1\,]$).

$\boxed{\textbf{Exercice 230}}$ *Réfuter une convergence uniforme*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [\,0\,;\,\pi/2\,] \to \mathbb{R}$ définie par : $\quad f_n(x) = n\sin(x)\cos^n(x)$.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).

2. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$:

a) – en calculant $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$;

b) – en montrant que $(||f_n - 0||_\infty)_n$ ne tend pas vers 0.

3. Étudier la convergence uniforme sur $[\,a\,;\,\pi/2\,]$ avec $a > 0$.

Solution (**Ex.230** – *Réfuter une convergence uniforme*)

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [\,0\,;\,\pi/2\,] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n\sin(x)\cos^n(x).$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).

- Pour $x = 0$ ou $x = \pi/2$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Soit $x \in \,]\,0\,;\,\pi/2\,[$. Alors $\cos(x) \in \,]\,0\,;\,1\,[$.

Or pour tout $q \in \,]\,0\,;\,1\,[$, $nq^n = n\exp(n\ln q) = \dfrac{n}{\mathrm{e}^{(-\ln q)n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $-\ln(q) > 0$.

Donc : $n\cos^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc : $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$.

2. a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\left[-\cos^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Si la convergence était uniforme, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n$ tendrait vers $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 0 = 0$.

Donc la convergence n'est pas uniforme.

b) En analysant la preuve de la convergence simple, on peut remarquer que si $q = 1$, $nq^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Débrouillons-nous pour que $\cos(x) \simeq 1$...

Soit $(x_n)_n$ une suite tendant vers 0, par exemple $x_n \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{n}$ ($\forall n \geqslant 1$).

$n\ln\big(\cos(x_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\big(\cos(x_n) - 1\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{-x_n^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Alors : $\cos^n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1$ et $n\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [\,0\,;\,\pi/2\,]$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1$ donc : $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geqslant \mathrm{N}, f_n(x_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Alors : $\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad ||f_n - f_0||_\infty \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $(||f_n - 0||_\infty)_n$ ne tend pas vers 0.
Donc la convergence n'est pas uniforme.

3. Avec l'étude précédente, on pressent que le problème est en 0. Soit $a \in \,]\,0\,;\,\pi/2\,[$.
Par croissance de sin et décroissance de cos :
$\forall x \in [\,a\,;\,\pi/2\,], \quad f_n(x) = n\sin(\pi/2)\cos^n a = n\cos^n a$ donc $||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,\pi/2\,]} \leqslant n\cos^n a$.
Et comme $\cos a \in [\,0\,;\,1\,[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos^n a = 0$.
Par encadrement : $||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,\pi/2\,]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\,a\,;\,\pi/2\,]$.

Exercice 231 *Permutation limite/intégrale : les 3 méthodes usuelles*

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [\,0\,;\,\pi\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n\sin x}{n+x}$.
On se propose de montrer par trois méthodes à maîtriser que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad (\sharp)$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers $f \overset{\text{déf.}}{=} \sin$ sur $[\,0\,;\,\pi\,]$ et calculer $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

2. *Comme en première année.*
En majorant $\left|\displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right|$, montrer $(\sharp)$.

3. *Par convergence uniforme.*
Montrer que la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme et justifier $(\sharp)$.

4. *Par convergence dominée.*
Proposer une fonction intégrable dominant toutes les f_n et conclure par le théorème de convergence dominée.

Solution (**Ex.231** – *Permutation limite/intégrale : les 3 méthodes usuelles*)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [\,0\,;\,\pi\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n\sin x}{n+x}$.
On se propose de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad (\sharp)$$

par les trois méthodes à maîtriser.

1. Soit $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$.

$f_n(x) = \dfrac{n \sin x}{n+x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\sin x}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin x$,
donc (f_n) converge simplement vers $f \stackrel{\text{déf.}}{=} \sin$ sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.
$\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 2$... si !

2. *Comme en première année.*
En majorant
$$\left|\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^\pi |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi \frac{x\sin x}{n+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi}{n}\mathrm{d}x$$
$$\left|\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\pi^2}{n},$$
donc par encadrement : $\displaystyle\left|\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui démontre ($\sharp$).

3. *Par convergence uniforme.*
$\forall x \in [\,0\,;\,\pi\,]\, |f_n(x)-f(x)| \leqslant \dfrac{x\sin x}{n+x} \leqslant \dfrac{\pi}{n}$, donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{\pi}{n}$ et par encadrement : $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme. Comme toutes ces fonctions f_n sont continues sur le segment $[\,0\,;\,\pi\,]$, la permutation intégrale/limite est licite, ce qui justifie ($\sharp$).

4. *Par convergence dominée.*
$\forall x \in [\,0\,;\,\pi\,], \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |f_n(x)| \leqslant \dfrac{n}{n+x} \leqslant 1$ donc $x \mapsto 1$ est une fonction intégrable dominant toutes les f_n.
Puisque les f_n et f sont continues, le théorème de convergence dominée s'applique et autorise la permutation intégrale/limite, ce qui justifie ($\sharp$).

Exercice 232 *CVU d'une suite fonction d'une autre*
Soit $a \in]\,0\,;\,+\infty\,[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *définies et positives sur* R, et convergeant uniformément vers une fonction f.

On pose : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad g_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \dfrac{f_n}{a+f_n}$.

1. Montrer que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g à préciser.

2. On suppose *de plus* que toutes les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, et que la suite (f_n') converge uniformément.
Montrer que les g_n et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Solution (**Ex.232** – *CVU d'une suite fonction d'une autre*)
Soit $a \in]\,0\,;\,+\infty\,[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *définies et positives sur* R, et convergeant uniformément vers une fonction f.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{f_n}{a+f_n}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{a+f_n(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{f(x)}{a+f(x)}$ car $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f$.

Posons : $g \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{f}{a+f}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$|g_n(x) - g(x)| = \left| \dfrac{f_n(x)}{a+f_n(x)} - \dfrac{f(x)}{a+f(x)} \right| = \left| \dfrac{af_n(x) - af(x)}{(a+f_n(x))(a+f(x))} \right|$

$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{a\,|f_n(x) - f(x)|}{a^2} \leqslant \dfrac{|f_n(x) - f(x)|}{a}$ par positivité.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||g_n - g||_\infty \leqslant \dfrac{1}{a}\,||f_n - f||_\infty$.

Comme $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} f$, par encadrement $||g_n - g||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} g$.

2. • Puisque pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$, $g_n = \dfrac{f_n}{a+f_n}$ est aussi $\mathcal{C}^1$ par les théorèmes habituels.

• (i) Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$; (ii) $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f$;
(iii) (f_n') converge uniformément
donc par le théorème de régularité, f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$.

Et comme $g = \dfrac{f}{a+f}$, g est aussi $\mathcal{C}^1$ avec $g' = \dfrac{af'}{(a+f)^2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 233}}$ *Quelques limites d'intégrales*

Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^{1} \cos\frac{t}{3^n}\mathrm{d}t$;

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan^n t\mathrm{d}t$;

3. $\forall n \geqslant 3, \qquad w_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}$.

Solution (**Ex.233** – *Quelques limites d'intégrales*)

Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. Les u_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[-1\,;1]$.

Soit, pour tout n, $f_n : t \mapsto \cos\dfrac{t}{3^n}$, qui est continue.

(f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto 1$.

Par convergence uniforme :

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à cos avec $|\cos'| \leqslant 1$, on a :
$\forall t \in [-1\,;\,1] \left|\cos \dfrac{t}{3^n} - 1\right| \leqslant 1 \times \left|\dfrac{t}{3^n} - 0\right|$, donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.
Par encadrement : $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$.
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t = 2.$
Par le théorème de convergence dominée :
Pour tout n, est dominée par la fonction constante f, intégrable. Par le théorème de convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t = 2.$$

2. Les v_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[0\,;\,\pi/4]$.
Pour tout n, $f_n : t \mapsto \tan^n t$ est continue et dominée par la fonction constante intégrable sur $[0\,;\,\pi/4]$ $\varphi : t \mapsto 1$. De plus (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0\,;\,1[\\ 1 & \end{cases}$. Par le théorème de convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{\pi/4} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi/4} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

La convergence n'est pas uniforme [0,π/4] ...
En effet, soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad t_n = \mathrm{Arctan}\big(2^{-1/n}\big)$ (obtenu en résolvant $\tan^n t = 1/2$).
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad t_n \in \,]0\,;\,\pi/4[$ car $2^{-1/n} \in \,]0\,;\,1[$ et $f_n(t) - f(t) = 1/2$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad ||f_n - f||_\infty \geqslant 1/2$... et $(||f_n - f||_\infty)$ ne tend pas vers 0.

3. $\forall n \geqslant 3, \qquad w_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}.$

- *Existence*

$f_n :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t^n + t^{-n}}$ est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ car $t^n + t^{-n} \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f_n$ existe.

$f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n/2}$. Par équivalence de fonctions positives, sachant que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n/2}}$ converge car $\dfrac{n}{2} > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n$ converge.
Donc w_n existe pour tout $n \geqslant 3$.

- *Limite simple des f_n*

Si $t > 1$, $t^n + t^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Si $t < 1$, $t^n + t^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{t}\right)^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Si $t = 1$, $f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 1 \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

- *Domination*

$\forall t \geqslant 1$, $t^n + t^{-n} \geqslant t^n$ donc $|f_n(t)| \leqslant t^{-n/2}$,
$\forall t < 1$, $t^n + t^{-n} \geqslant t^{-n}$ donc $|f_n(t)| \leqslant t^{n/2}$.

Soit : $\varphi :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} t^{3/2} & \text{si } t < 1 \\ t^{-3/2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

φ est continue et intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ (faussement impropre sur $]\,0\,;\,1\,]$ et comme intégrale de Riemann sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ car $n/2 > 1$).

- *Par le théorème de convergence dominée*

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = 0.$$

Exercice 234 *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales impropres*

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sous réserve d'existence,

$$\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x.$$

1. a) Vérifier l'existence de J_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que la suite $(\mathrm{J}_n)_n$ converge, vers 0.

2. Déterminer un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.234** – *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales impropres*)

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la majoration classique : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant x$, on tire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ existe (et vaut $\dfrac{\pi}{2}$), J_n est absolument convergente, donc convergente.

b) De la majoration précédente découle par l'inégalité triangulaire : $|\mathrm{J}_n| \leqslant \dfrac{\pi}{2n}$.

Par encadrement, $(\mathrm{J}_n)_n$ est une suite convergente, de limite nulle.

2. Déterminer un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Heuristique : comme $\sin(x/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x/n$, $\dfrac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(1+x^2)}$, et on peut penser que $\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$... Établissons $n\mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)}{\dfrac{x}{n}(1+x^2)}$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue.
- $\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+x^2}$, donc (f_n) converge simplement vers

la fonction continue $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

- De la majoration $|\sin(x)| \leqslant |x|$ vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad |f_n(x)| \leqslant f(x),$$

avec f continue et intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{J}_n = \frac{\pi}{2}$, donc $\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

Exercice 235 *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales*

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}\mathrm{d}t$$

Solution (**Ex.235** – *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales*)

Commençons par poser $x = 1 - \dfrac{t}{n}$, changement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,n\,]$:

$$u_n = n\int_0^1 \sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Il s'ensuit que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Exercice 236 *Convergence uniforme ?*

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} x^n\ln(x) & \text{si } x \in]\,0\,;\,1\,] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[\,0\,;\,1\,]$.

2. Que dire de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n\ln(x)\mathrm{d}x$?

3. Retrouver cette limite en calculant explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x)\mathrm{d}x$.

Solution (**Ex.236** – *Convergence uniforme ?*)

1. Les f_n sont continues sur $[\,0\,;\,1\,]$, nulles en 0 et en 1, et dérivables sur $]\,0\,;\,1\,]$ avec $f_n' : x \mapsto x^{n-1}(n\ln(x)+1)$ donc décroissantes sur $\left[\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1/n}\,\right]$ et croissantes sur $\left[\,\mathrm{e}^{-1/n}\,;\,1\,\right]$.

Donc $||f_n||_\infty = -f_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \dfrac{1}{n\mathrm{e}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc : $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} 0$.

2. Les f_n sont toutes continues sur le segment $[\,0\,;\,1\,]$, le théorème de permutation en cas de convergence uniforme s'applique :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\mathrm{d}x$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$.

3. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 237 *CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?*

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $a \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[\,-a\,;\,a\,]$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment du type $[\,\alpha\,;\,\beta\,]$ où $\alpha < \beta$?

Solution (**Ex.237** – *CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?*)

1.
- $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sin(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

Donc $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} 0$.

- $f_n(x) - 0 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{nx} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$: $f_n - 0$ n'est pas bornée, il n'y a pas convergence uniforme.

2. De : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leqslant |u|$ (IAF par exemple), on tire :

$\forall x \in [\,-a\,;\,a\,]\, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{a}{n}$, donc $||f_n - 0||_{\infty,[\,-a\,;\,a\,]} \leqslant \dfrac{a}{n}$,

donc $||f_n - 0||_{\infty,[\,-a\,;\,a\,]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il y a convergence uniforme sur $[\,-a\,;\,a\,]$.

3. Soit $a = \max(|\alpha|\,, |\beta|)$ de sorte que $[\,\alpha\,;\,\beta\,] \subset [\,-a\,;\,a\,]$.

Alors, par définition d'un « *sup* », $||f_n - 0||_{\infty,[\,\alpha\,;\,\beta\,]} \leqslant ||f_n - 0||_{\infty,[\,-a\,;\,a\,]}$,

donc par encadrement $||f_n - 0||_{\infty,[\,\alpha\,;\,\beta\,]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il y a convergence uniforme sur tout segment.

Exercice 238 *CVU de fonctions de classe 1*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

1. Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$.

2. Montrer la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.

3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution (**Ex.238** – *CVU de fonctions de classe 1*)

1. Par opérations algébriques élémentaires, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{.}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{x^2} = |x|$, donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f avec $f(x) = |x|$.

En multipliant par la quantité conjuguée : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|fn(x) - f(x)| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{1/n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f = |.|$...

3. ...qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ car $|.|$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 239 *Convergence uniforme ?*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2. a) Établir, pour tout $\alpha \in \,]\,0\,;1\,]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$.

b) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme ?

Solution (**Ex.239** – *Convergence uniforme ?*)

1. Soit $x \geqslant 0$. $\dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{1+x}$, la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

2. a) Soit $\alpha > 0$. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 1+\alpha x-(1+x)^\alpha$. $g'(x) = \alpha\big(1-(1+x)^{\alpha-1}\big) \geqslant 0$ car $\alpha - 1 \leqslant 0$. g est croissante et nulle en 0, donc positive sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \left|\dfrac{1-(1+x)^{1/n}}{(1+x)^{1+1/n}}\right| \leqslant \dfrac{(1+x)^{1/n} - 1}{(1+x)^{1+1/n}} \leqslant$

$\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}^+} \leqslant \dfrac{1}{n}$,

et par encadrement $||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}^+} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 240 *Convergence uniforme ?*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Et sur $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a > 0$?

Solution (**Ex.240** – *Convergence uniforme ?*)

1. Observons que chaque f_n est impaire. $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Chaque f_n est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n'(x) = \dfrac{2^n(1+n2^n x^2) - 2^n x(n2^{n+1}x}{(1+n2^n x^2)^2}$,
   $f_n'(x)$ est du signe de $1 - n2^n x^2$. Soit $x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n2^n}}$. Donc f_n est strictement croissante sur $[\,0\,;\,x_n\,]$ et strictement décroissante sur $[\,x_n\,;+\infty\,[$. Comme $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n(x_n) = \dfrac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}$. Par symétrie, puisque f_n est impaire,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad ||f_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$
   et il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_0, \quad x_n \leqslant a$.
   Par l'étude précédente, pour tout $n \geqslant n_0$, f_n est strictement décroissante sur $[\,a\,;+\infty\,[$ (et positive) donc $||f_n - 0||_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = f_n(a)$. Or $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par convergence simple de 1.).
   Donc $||f_n - 0||_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la convergence est uniforme sur $[\,a\,;+\infty\,[$.

Exercice 241 *Limite d'une suite d'intégrales*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2. Cette convergence est-elle uniforme ?

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

Solution (**Ex.241** – *Limite d'une suite d'intégrales*)

1. Soit $x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \in [\,0\,;\,1\,[\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \,]\,1\,;\,+\infty\,[\end{cases}$

2. Toutes les f_n sont continues mais leur limite simple ne l'est pas dons la convergence n'est pas uniforme.

3.
- $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f$,
- Les f_n et f sont continues par morceaux
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\quad |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 242}}$ *Limite et équivalent d'une suite d'intégrales*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : [\,0\,;\,\pi\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{x+n} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

1. a) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n).

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

2. Montrer que $\mathrm{I}_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution (**Ex.242** – *Limite et équivalent d'une suite d'intégrales*)

1. a) $\forall n \geqslant 1, \forall x \in [\,0\,;\,\pi\,]\,, \left|\dfrac{\cos x}{x+n} \leqslant \dfrac{1}{n}\right|$, donc : $\forall n \geqslant 1, ||f_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty = 0$, donc $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} 0$.

b) Par **convergence uniforme sur un segment de fonctions continues**, le théorème de permutation donne :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} 0\mathrm{d}x = 0.$

2. Il s'agit de monter que $n\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On pose : $\forall n \geqslant 1, g_n = nf_n : [\,0\,;\,\pi\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n\cos(x)}{n+x}$.

On a : $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} \cos$, et on peut montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(x)\mathrm{d}x = 0$ soit :

- parce que $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \cos$ (par exemple $||g_n - \cos||_\infty \leqslant \dfrac{\pi}{n}$) ;
- parce que le théorème de convergence dominée s'applique (par exemple $\forall n \geqslant 1, \forall x \in [\,0\,;\,\pi\,], |g_n(x)| \leqslant 1$... intégrable sur $[\,0\,;\,1\,]$).

Ainsi : $n\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^\pi g_n \xrightarrow[n\to 0]{}$, i.e. $\mathrm{I}_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 243}}$ *Limite d'une suite d'intégrales*

Déterminer, si elle existe, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Solution (**Ex.243** – *Limite d'une suite d'intégrales*)

Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n : [\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+x^2}$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue.
- $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f : [\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
- f est c.p.m.
- $\forall n \geqslant 1, \forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

Par le théorème de convergence dominée,

☞ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ existe ;

☞ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\textbf{Exercice 244}}$ *Limite d'une suite d'intégrales*

Déterminer, si elle existe, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^n(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

Solution (**Ex.244** – *Limite d'une suite d'intégrales*)

Notons que $\dfrac{\sin^n x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n-2}$ donc l'intégrale n'existe qu'à partir de $n \geqslant 2$ (pas de souci sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ car $\left|\dfrac{\sin^n x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ assure l'intégrabilité).

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin^n(x)}{x^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x = 2k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{N}, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x = (2k+1)\pi + \pi/2, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas.

Aïe, la suite (f_n) ne converge pas simplement.

Posons : $g_n = |f_n|$. Alors :

$$g_n \xrightarrow{\mathcal{cvs}} g :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = k\pi + \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(g vaut presque toujours nulle, sauf en des points isolés...)

- Pour tout $n \geqslant 2$, g_n est continue.
- $g_n \xrightarrow{\mathcal{cvs}} g$.
- g est continue par morceaux.
- $\forall n \geqslant 2, \forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[\,, |g_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]\,0\,;\,1\,] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in]\,1\,;\,+\infty\,[\end{cases}$.

(Détail sur $]\,0\,;\,1\,]$: l'inégalité $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leqslant |u|$ assure $\forall x \in]\,0\,;\,1\,]\,, g_n(x) \leqslant x^{n-2} \leqslant 1$.)

φ étant intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, par convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Détail en cas de doute (calcul de l'intégrale d'une fonction c.p.m avec une infinité de morceaux) :

$$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 0\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi+\pi/2} 0\mathrm{d}x = 0$$

Revenons aux intégrales initiales grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \geqslant 2, \left| \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{}$, donc par encadrement : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 245 *Équivalent d'une suite d'intégrales*

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

Solution (**Ex.245** – *Équivalent d'une suite d'intégrales*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$.

- Pour tout n, f_n est continue.
- $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto 0$.
- f est continue.
- De $0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \in \mathbb{R}^+$, on tire $\forall n \forall x, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$, fonction intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Par convergence dominée, $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En prenant ensuite $f_n = ng_n$, $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ avec les g_n et g continues, et $\forall n, |g_n| \leqslant g$ et g intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Par convergence dominée, $n\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

Exercice 246 *Limite d'une suite d'intégrale*

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\mathrm{d}t$.

Solution (**Ex.246** – *Limite d'une suite d'intégrale*)

Limite nulle, convergence dominée avec domination par exemple par $\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]\,0 \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t > \pi \end{cases}$

en exploitant $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leqslant |u|$.

Exercice 247 *Équivalent d'une suite d'intégrales*

1. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$.
2. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$.
   On pourra commencer par effectuer le changement de variable $u = nx$.

Solution (**Ex.247** – *Équivalent d'une suite d'intégrales*)

1. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x)}{1+n^2x^2}$.
   - Pour tout $n \geqslant 1$, g_n est continue.
   - $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
   - g est continue par morceaux.

- $\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, |g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

  Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ existe et vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. Soit $n \geqslant 1$. $x \mapsto nx$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif sur $\mathbb{R}$.

$\mathrm{I}_n \overset{u=nx}{=} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/n^2}\cos(u/n)}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/n^2}\cos(u/n)}{1+u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \pi$

Avec, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u^2/n^2}\cos(u/n)}{1+u^2}$, on a :

- pour tout $n \geqslant 1$, f_n continue ;
- $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$;
- f est continue ;
- $\forall n \geqslant 1, \forall u \in \mathbb{R}, |f_n(u)| \leqslant f(u)$ avec f intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de convergence dominée,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi.$

Du coup : $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$.

Exercice 248 *Permutation limite/intégrale même sans convergence simple*

L'objectif de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)$.

1. Justifier que la suite (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}^+$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = |f_n|$.

2. Montrer que (g_n) converge simplement mais non uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. a) Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = 0$.

Solution (**Ex.248** – *Permutation limite/intégrale même sans convergence simple*)

1. Pour $t = 3\pi/2$, $\sin(t) = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n(t) = \mathrm{e}^{-3\pi/2}(-1)^n$ donc $(f_n(t))_n$ diverge. Il n'y a pas convergence simple (en tout $t = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$...)

2. • Soit $t \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}$.

- Soit $t \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\left|\sin(t)\right|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|\sin(t)| \in [\,0\,;\,1\,[$.
- Donc $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} g : t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable, Donc par domination $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$ existe.

b) Les g_n sont continues, et leur limite simple est continue par morceaux. Les g_n sont uniformément dominée par φ intégrable. Par le théorème de convergence dominée, g est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0.$$

Exercice 249 *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*

Soit α un paramètre réel quelconque et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : [\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto x\big(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}\big).$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite de fonctions (f_n) converge uniformément.

2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\big(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x.$$

3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\big(1+n^2\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.249** – *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*)

1. $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f : [\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.
Par étude de $f_n - f$, $||f_n - f||_\infty = (f_n - f)(1/n) = n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}$.
Il y a donc convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2. $\alpha = 1/2$ donc il y a convergence uniforme sur le segment $[\,0\,;\,1\,]$ et le théorème de permutation s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\big(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

3. $\alpha = 2$ et il n'y a pas convergence uniforme.
Un calcul explicite par intégration par parties donne :

$$\int_0^1 x\big(1+n^2\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - n\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$$

Exercice 250 *Bon sang mais c'est bien sûr !*

Soit $a \in]0\,;\,+\infty[$.

1. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx+\sin(nx)}{n(a+x)}\mathrm{d}x$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{nx+\sin(nx)}{n(a+x)}$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f à préciser.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

2. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n+t\sin(n/t)}{n(at^3+t^2)}\mathrm{d}t$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : [1\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n+t\sin(n/t)}{n(at^3+t^2)}$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ J_n existe.

b) Montrer que la suite (g_n) converge simplement vers une fonction g à préciser.

c) Monter que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$.

d) Déterminer trois constantes α, β et γ telles que

$$\forall t \geqslant 1, \quad g(t) = \frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta}{t} + \frac{\gamma}{at+1}.$$

e) En déduire la valeur exacte de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ (sans intégrale).

3. Observer les résultats des questions 1) et 2), puis justifier cette observation.

Solution (**Ex.250** – *Bon sang mais c'est bien sûr !*)

1. a) $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour $x \in]0\,;\,1]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{x}{a+x}$,

donc $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{a+x}$.

$\forall x \in [0\,;\,1], |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{|\sin(nx)|}{n(x+a)} \leqslant \dfrac{1}{na}$, donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{1}{na}$.

Par encadrement, $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} f$.

b) Par convergence uniforme de fonctions continues sur un segment, le théorème de permutation s'applique et :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [x - a\ln(|x+a|)]_0^1 = 1 - a\ln(1+a) + a\ln a = 1 + a\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)$

2. a) g_n est continue sur $[1\,;\,+\infty[$, J_n est impropre en $+\infty$ et $g_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{at^3}$.

Par équivalence de fonctions positives au voisinage de $+\infty$ et intégrabilité de $t \mapsto 1/t^3$ $(3 > 1)$, J_n existe.

b) Pour tout $t \geqslant 1$, $t\sin(n/t) = o(n)$ donc $n + t\sin(n/t) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $g_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{at^3+t^2}$.

Donc $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} g : [\,1\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{at^3+t^2}$.

c)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue.
- $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} g$.
- g est continue.
- De l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$ (IAF par exemple), on tire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [\,1\,;+\infty\,[\,, |g_n(t)| \leqslant \left|\dfrac{2n}{n(at^3+t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{at^3},$

or $t \mapsto \dfrac{2}{at^3}$ est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

Par le théorème de convergence dominée, ☞ pour tout n, J_n existe, mais ça on nous l'a déjà fait remarquer ;

☞ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ existe ;

☞ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$

d) $\forall t \geqslant 1, \quad g(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{a}{t} + \dfrac{a^2}{at+1}.$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \left[-\dfrac{1}{t} + a\ln\dfrac{at+1}{a}\right]_1^{+\infty} = 1 + a\ln\left(\dfrac{a}{a+1}\right).$

3. Il se pourrait bien que le changement $x = 1/t$ donne $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n$, ce qui expliquerait TOUT !

$\boxed{\textbf{Exercice 251}}$ *L'intégrale se concentre sur f(0)*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$.

1. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$ où $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

4. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[\,0\,;+\infty\,[$?

Solution (**Ex.251** – *L'intégrale se concentre sur f(0)*)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$.

1. Soit $n \geqslant 1$. f_n est continue, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$, et il existe une constante M telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(x)| \leqslant \dfrac{n\mathrm{M}}{n^2x^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{nx^2}$.
Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ (Riemann $2 > 1$) donc I_n existe.

2. Posons $u : x \mapsto nx$, $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ (car $n > 0$), donc :
$\mathrm{I}_n \overset{u=nx}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$ avec $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}$.

3.
- Pour tout n, g_n est continue ;
- $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} g : [\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, u \mapsto \dfrac{f(0)}{1+u^2}$;
- g est continue ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [\,0\,;\,+\infty\,[, |g_n(u)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{1+u^2}$ avec $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ intégrable.

Par convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}f(0)$.

4. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$?
À x fixé dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$,
- si $f(x) \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(x)}{nx^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
- si $f(x) = 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = nf(0)$,
- si $f(0) = 0$, $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
- si $f(0) \neq 0$, $f_n(0)$ diverge vers $\pm\infty$ (précisément $sign(f(0)) \times \infty$).

Bilan : il y convergence simple sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ si, et seulement si, $f(0) = 0$. Dans ce cas, la limite simple est la fonction nulle.

Chapitre 10

Séries de fonctions

Exercice 252 *Modes de convergence*

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2} \quad (n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R})$ **2.** $g_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + x^2} \quad (n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.252** – *Modes de convergence*)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc $||f_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, donc simplement.

2. $g_n(x) = \dfrac{1}{n + x^2} \quad (n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ avec $|g_n(0)| = \dfrac{1}{n}$ donc $||g_n||_\infty = \dfrac{1}{n}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ ne converge pas normalement.

Comme à x fixé dans $\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n(x)$ vérifie le théorème des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{n + x^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement.

De plus, le théorème donne la majoration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\mathrm{R}_n(x)| \overset{\text{déf.}}{=} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, $(||\mathrm{R}_n||_\infty)_n$ tend vers 0 et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément, donc simplement.

3. $h_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}$ $\quad (n \geqslant 0,\ x \in [\,0\,;\,+\infty\,[)$ ... $\quad$ **5.** ... puis $h_n'(x)$ (*cf.* **4.**)

$\boxed{\textbf{Exercice 253}}$ *CVN sur les segments*

Étudier la convergence normale sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, puis sur $[\,0\,;\,a\,]$ (où $a > 0$) de :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!} \qquad (\textit{Rappel : } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)$$

Solution (**Ex.253** – *CVN sur les segments*)

1. Soit : $h_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$ $\quad (n \geqslant 0,\ x \in [\,0\,;\,+\infty\,[)$

Par croissance comparée : $\forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[,\quad h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par convergence de la série exponentielle, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x)$ existe et vaut $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = 1$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge simplement vers la fonction constante $h : x \mapsto 1$.

Évaluons $||h_n||_\infty$.

$\forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[,\quad h_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{n!}(n-x)$: h_n est croissante sur $[\,0\,;\,n\,]$ et décroissante sur $[\,n\,;\,+\infty\,[$, avec $h_n(0) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} h_n(x) = 0$, donc $||h_n||_\infty = h_n(n) = \dfrac{n^n\mathrm{e}^{-n}}{n!}$.

Par l'équivalent de Stirling : $||h_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, donc puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, par le critère des équivalents pour ces termes généraux positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} ||h_n||_\infty$ diverge et il n'y a pas convergence normale sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

Cependant, il y a convergence normale sur tout segment $[\,0\,;\,a\,]$ car dès que $n \geqslant a$, $||h_n||_{\infty,[\,0\,;\,a\,]} = h_n(a) = \dfrac{a^n\mathrm{e}^{-a}}{n!}$, qui est le terme général d'une série exponentielle convergente.

$\boxed{\textbf{Exercice 254}}$ *Intégrale et somme*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x \in \,]\,0\,;\,1\,], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Soit $x \in [\,0\,;\,1\,]$. Justifier l'existence, puis calculer : $\quad f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$

2. Montrer que la convergence de la série des f_n est uniforme sur $[0\,;\,1]$.

3. En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Solution (**Ex.254** – *Intégrale et somme*)
Remarque préalable :

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x \in\,]0\,;\,1]\,, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

définit une fonction continue sur $[0\,;\,1]$.

1. • Pour $x = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n(x) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et vaut 0.

• Pour $x \in [0\,;\,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n(x) = (-x^2)^{n+1}$ donc, puisque $-x^2 \in\,]-1\,;\,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et vaut $-x^2 \times \dfrac{1}{1-(-x^2)}\ln n = \dfrac{-x^2\ln x}{1+x^2}$.

Finalement : pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{-x^2\ln x}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.
Notons que $\mathrm{R_N}(0) = 0$.
Par le critère spécial des séries alternées, pour $x \in\,]0\,;\,1]$,
$|\mathrm{R_N}(x)| = \left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x\right| \leqslant x^{2\mathrm{N}+4}\,|\ln x|$
Étudions $\varphi :]0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{2\mathrm{N}+4}\,|\ln x| = -x^{2\mathrm{N}+4}\ln x$.
$\varphi(1) = 0 = \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$, et $\forall x \in\,]0\,;\,1]$,
$\varphi'(x) = -(2\mathrm{N}+4)x^{2\mathrm{N}+3}\ln x - x^{2\mathrm{N}+3} = -x^{2\mathrm{N}+3}((2\mathrm{N}+4)\ln x + 1)$, donc φ atteint son maximum en $\exp\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right)$.
Il vaut $-\exp\left(-\dfrac{2\mathrm{N}+4}{2\mathrm{N}+4}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$
Donc $||\mathrm{R_N}||_\infty \leqslant \dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$, et par encadrement $||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$: la convergence est bien uniforme sur $[0\,;\,1]$.

3. Rappelons que $\displaystyle\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ converge car $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^1 \ln x\mathrm{d}x = -1 - \mathrm{A}\ln\mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow[\mathrm{A}\to 0^+]{} -1$, ainsi que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par équivalence à la première, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ qui est faussement impropre puisque $\dfrac{x^2\ln x}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par linéarité.

Chaque f_n étant continue sur $[\,0\,;\,1\,]$ et la convergence étant uniforme, la permutation somme/intégrale est licite :

$$\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x\mathrm{d}x$$

Une intégration par parties permettra de conclure :

$$\int_0^1 x^{2n+2}\ln x\mathrm{d}x \overset{\text{IPP.}}{=} \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n+3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2},\text{ et enfin}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 255 *Harmoniquement*

On pose : $\quad \forall \in\,]-1\,;\,+\infty\,[,\quad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$

1. Montrer que S est définie, continue et croissante sur $]-1\,;\,+\infty\,[$.

2. Calculer $\mathrm{S}(x+1)-\mathrm{S}(x)$ et en déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en -1.

3. a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{S}(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$

b) En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$.

Solution (**Ex.255** – *Harmoniquement*)

1. Montrer que S est définie et continue sur $]-1\,;\,+\infty\,[$.

Surtout ne pas séparer la série en deux séries divergentes !!!

- Je note : $f_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ pour $n\geqslant 1,\ x>-1$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\,]-1\,;\,+\infty\,[,\quad |f_n(x)| \overset{\text{déf.}}{=} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right| = \dfrac{|x|}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}.$

Par convergence de la série de Riemann de paramètre 2, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement sur $]-1\,;\,+\infty\,[$.

S est définie sur $]-1\,;\,+\infty\,[$.

- Soit a et b tels que $-1<a<0$ et $1<b$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,b\,]} = \displaystyle\sup_{x\in[\,a\,;\,b\,]}\frac{|x|}{n(n+x)} \leqslant \frac{b}{n(n+a)}$, or $\dfrac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^2}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant +}\frac{b}{n(n+a)}$

converge équivalence, et par comparaison $\sum_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,b\,]}$ converge.

La convergence est normale, donc uniforme, sur $[\,a\,;\,b\,]$. Comme chaque f_n est continue sur $[\,a\,;\,b\,]$, S est continue sur $[\,a\,;\,b\,]$. Et comme ceci est valable pour tout a et b tels que $-1 < a < 0 < 1 < b$, S est continue sur $]\,-1\,;\,+\infty\,[$.

- Chaque f_n est croissante ($f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} > 0$...), donc par sommation S est croissante.

2. • Soit $x > -1$. Je note $\mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(x)$.

$\mathrm{S_N}(x+1) - \mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n+1+x} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{\mathrm{N}+1+x}$.

Passons à la limite lorsque $\mathrm{N} \longrightarrow +\infty$: $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

- Dans $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(x+1) - \dfrac{1}{1+x}$, faisons tendre x vers -1^+ : $\lim\limits_{x\to -1^+} \mathrm{S}(x+1) = \mathrm{S}(0)$ par continuité, or $\mathrm{S}(0) = 0$. Donc $\mathrm{S}(x+1) = o\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$, donc $\mathrm{S}(x+1) - \dfrac{1}{1+x} \underset{x\to -1}{\sim} \dfrac{-1}{x+1}$.

Ainsi : $\quad \mathrm{S}(x) \underset{x\to -1}{\sim} \dfrac{-1}{x+1}$.

3. a) $\mathrm{S}(0) = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{S}(n+1) - \mathrm{S}(n) = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\mathrm{S}(n+1) = \mathrm{S}(n) + \dfrac{1}{n+1}$... d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

b) *Culture nécessaire :* $\mathrm{S}(n) \underset{n\to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Par croissance de S : $\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor + 1)$

donc $\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor) + \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}$

donc $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \leqslant \dfrac{\mathrm{S}(x)}{\ln x} \leqslant \dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} + \dfrac{1}{(\ln x)(\lfloor x \rfloor + 1)}$.

- $\dfrac{1}{(\ln x)(\lfloor x \rfloor + 1)} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ sans souci,
- $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} = \dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln \lfloor x \rfloor} \times \dfrac{\ln \lfloor x \rfloor}{\ln x}$ or $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln \lfloor x \rfloor} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$ (culture !)
- $\ln \lfloor x \rfloor = \ln\big(x + (\lfloor x \rfloor - x)\big) = \ln\big(x(1 + \dfrac{\lfloor x \rfloor - x}{x})\big)$

$\ln\lfloor x\rfloor = \ln x + \ln\left(1 + \dfrac{\lfloor x\rfloor - x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ car $\ln\left(1 + \dfrac{\lfloor x\rfloor - x}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $\dfrac{\lfloor x\rfloor - x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ouf ! On a bien : $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc par encadrement $\dfrac{\mathrm{S}(x)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$,

$$\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 256}}$ *Étude d'une fonction définie par une somme*

Soit, sous réserve d'existence, $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

2. Montrer que f est décroissante.

3. a) Montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$

b) En posant $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale précédente, déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution (**Ex.256** – *Étude d'une fonction définie par une somme*)

Soit, sous réserve d'existence, $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

- Si $x < 0$, $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série diverge grossièrement. De même si $x = 0$ car alors $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$.

  Si $x > 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^4}{(\mathrm{e}^x)^m} = 0$ par croissance comparée (car $\mathrm{e}^x > 1$). Donc $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = o\left(1/n^2\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann.

$$\mathcal{D} = \left]\,0\,;\,+\infty\,\right[.$$

- Soit $a \in \left]\,0\,;\,+\infty\,\right[$.

  $\forall x \in \left[\,a\,;\,+\infty\,\right[,\ \left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ or par ce qui précède $f(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ converge.

  Donc la série converge normalement donc uniformément sur $\left[\,a\,;\,+\infty\,\right[$. Comme chaque f_n est continue sur $\left[\,a\,;\,+\infty\,\right[$, f est continue sur $\left[\,a\,;\,+\infty\,\right[$.
  Ceci étant valable pour tout $a \in \left]\,0\,;\,+\infty\,\right[$, f est continue sur $\mathcal{D}$.

2. Chaque f_n est décroissante sur $\mathcal{D}$, donc par sommation f est décroissante sur $\mathcal{D}$.

3. a) Soit $x \in \mathcal{D}$.

Par décroissance de $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$,
$$\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
En sommant de $k=0$ à N la minoration et en passant à $\mathrm{N} \longrightarrow +\infty$:
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant f(x).$$
En sommant de $k=1$ à N la majoration et en passant à $\mathrm{N} \longrightarrow +\infty$:
$$f(x) - \mathrm{e}^0 \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
Ainsi : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$

b) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u \overset{\text{IPP.}}{=} \left[2u\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u = \frac{2}{x^2}.$

On déduit alors de a)
$$1 \leqslant \frac{x^2}{2}f(x) \leqslant \frac{x^2}{2} + 1,$$
donc par encadrement $\dfrac{x^2}{2}f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

c) a) et le calcul initial de b) donne
$$\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}.$$
Or $\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \geqslant 1,$

donc par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$

Exercice 257 *Domaine de définition troué*

Pour $x \geqslant 0$, on pose : $\qquad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1. Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}^+$, $\mathrm{S}(x)$ est-elle définie ?

2. Former une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(1/x)$ pour $x \neq 0$.

3. Étudier la continuité de S sur $[\,0\,;\,1\,[$ puis sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

4. Dresser le tableau de variation de S en précisant ses limites.

Solution (**Ex.257** – *Domaine de définition troué*)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, soit $f_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Pour $x \geqslant 0$, on pose : $\qquad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1. Si $x \in [\,0\,;\,1\,[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$ donc $\mathrm{S}(x)$ existe par comparaison à la série géométrique.

Si $x = 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ donc la série diverge grossièrement et $\mathrm{S}(x)$ n'existe pas.

Si $x > 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ donc $\mathrm{S}(x)$ existe par comparaison à la série géométrique de raison $\dfrac{1}{x} \in \,]\,0\,;\,1\,[$.

Donc S est définie sur $\mathcal{D} = [\,0\,;\,1\,[\,\cup\,]\,1\,;\,+\infty\,[$.

2. $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(1/x) = \dfrac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \dfrac{x^{2n}}{x^n(x^{2n}+1)} = f_n(x)$, donc

$$\forall x \neq 0, \quad \mathrm{S}(1/x) = \mathrm{S}(x).$$

3. Étudier la continuité de S sur $[\,0\,;\,1\,[$ puis sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

Soit $a \in \,]\,0\,;\,1\,[$. La majoration précédente donne $\|f_n\|_{\infty,[\,0\,;\,a\,]} \leqslant a^n$. Or la série géométrique $\displaystyle\sum_n a^n$ converge. Donc S converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;\,a\,]$. Comme chaque f_n est continue, S est continue sur $[\,0\,;\,a\,]$. Comme a est arbitraire dans $[\,0\,;\,1\,[$, S est continue sur $[\,0\,;\,1\,[$.

Comme sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$, $\mathrm{S} : x \mapsto \mathrm{S}(1/x)$, S est continue sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par composition.

4.
- Pour tout n, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$ donc f_n est croissante sur $[\,0\,;\,1\,]$ et décroissante sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.

  Par sommation, S est croissante sur $[\,0\,;\,1\,[$ et décroissante sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.
- Par continuité, $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{S}(0) = 0$.
- $\forall x \in [\,0\,;\,1\,[, \quad \mathrm{S}(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{x}{2(1-x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$,

  donc par comparaison $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.
- De $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(1/x)$ on tire par composition avec les limites précédentes

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty \text{ et } \mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 258 *Non dérivable en 0*

On pose, pour tout x de $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. Montrer que $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. La convergence de la série des f_n est-elle uniforme ? normale ?

3. Justifier que S est continue $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

4. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad \dfrac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} \geqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)}$.

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Solution (**Ex.258** – *Non dérivable en 0*)

On pose, pour tout x de $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. Montrer que $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

$\forall n \geqslant 1, f_n(0) = 0$ donc $\mathrm{S}(0)$ existe.

$\forall x \neq 0, |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3\,|x|}$ assure la convergence simple de $\mathrm{S}(x)$ par équivalence à la série de Riemann de paramètre 3.

2. De $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant (1-n\,|x|)^2 = 1+n^2x^2-2n\,|x|$ on tire $2n\,|x| \leqslant 1+n^2x^2$ puis $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

D'où $||f_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$, ce qui assure la convergence normale, donc uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

3. • La convergence uniforme et la continuité de chaque f_n assure la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

• Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_n'(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$

Soit $a > 0$ et x tel que $|x| \geqslant a$. Alors

$|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} \leqslant \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)} \leqslant \dfrac{1}{n(1+n^2a^2)} \leqslant \dfrac{1}{n^3a^2}$

Donc $||f_n||_{\infty,]-\infty\,;\,a\,]\cup[\,a\,;\,+\infty\,[} \leqslant \dfrac{1}{n^3a^2}$. Ceci assure la convergence normale donc uniforme sur tout $]\,-\infty\,;\,a\,] \cup [\,a\,;\,+\infty\,[$ où $a > 0$. Donc que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. a) Soit $x > 0$.

$$\frac{S(x)-S(0)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par comparaison à une intégrale :

$$\frac{S(x)-S(0)}{x} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2x^2)}\mathrm{d}t$$

Par le changement $u = tx$!

$$\frac{S(x)-S(0)}{x} \geqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)}.$$

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Comme $\dfrac{1}{u(1+u^2)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u}$, par équivalence de fonctions positives avec $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ non intégrable sur $]\,0\,;\,1\,]$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$: S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 259 *Une permutation série/intégrale*

1. Justifier l'existence et calculer la valeur de : $\quad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$f_n :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto 2x\exp\big(-(2n+1)x\big).$$

2. a) Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on exprimera à l'aide de la fonction sh.

b) Montrer que : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$

3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}.$

Exercice 260 *Série de fonctions dépendant d'une suite numérique*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite positive décroissante, et $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite de fonctions définies par : $\quad \forall x \in [\,0\,;\,1\,], \quad f_n(x) = a_n x^n(1-x).$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[\,0\,;\,1\,]$.

2. Étudier le mode de convergence dans le cas $n_0 = 1$ et $a_n = 1/n$, puis dans le cas $n_0 = 2$ et $a_n = 1/\ln(n)$.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ converge normalement si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n/n$ converge.

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ converge uniformément si, et seulement si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Solution (**Ex.260** – *Série de fonctions dépendant d'une suite numérique*)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, décroissante et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,]$, $\quad f_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

1. • Pour $x=1$, $f_n(x)=0$ $(\forall n)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

• Pour $x \in [\,0\,;\,1\,[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant a_0 x^n$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge par comparaison à la série géométrique de raison $x \in [\,0\,;\,1\,[$.

Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement.

2. Soit $g_n : [\,0\,;\,1\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n(1-x)$. Alors :

• $g_n(0) = g_n(1) = 0$;

• $\forall x \in [\,0\,;\,1\,], g_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$, donc g_n est maximale en $x = \dfrac{n}{n+1}$,

et ainsi $||g_n||_\infty = g_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$.

De $n\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{-1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$ on tire $||g_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}n}$.

• Pour $a_n = \dfrac{1}{n}$, on a : $||f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}n^2}$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ converge normalement (par équivalence au terme général de la série de Riemann). Donc elle converge aussi uniformément.

• Pour $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$, on a : $||f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}n\ln n}$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ diverge. En effet, c'est une série de Bertrand dont on établit la divergence par le théorème de comparaison série/intégrale :

$\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue, positive et décroissante donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} \varphi(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or $\displaystyle\int_2^{\mathrm{A}} \varphi(t)\mathrm{d}t = \ln\big(\ln \mathrm{A}\big) - \ln\big(\ln 2\big) \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} +\infty$...

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement.

Cependant, pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,[$:

$$|\mathrm{R_N}(x)| = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} a_n x^n(1-x) \leqslant a_{\mathrm{N}+1}x^{\mathrm{N}+1}(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \leqslant a_{\mathrm{N}+1}x^{\mathrm{N}+1} \leqslant a_{\mathrm{N}+1}$$

et pour $x=1$, $\mathrm{R_N}(x) = 0$,

donc $||\mathrm{R_N}||_\infty \leqslant a_{\mathrm{N}+1} \leqslant \dfrac{1}{\ln(\mathrm{N}+1)}$, donc $||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;\,1\,]$.

3. L'équivalent $||f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \dfrac{a_n}{n}$ justifie, par le critère des équivalents pour les termes généraux positifs que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement si, et seulement si, $\sum_{n\geqslant 0} a_n/n$ converge.

4. • Le raisonnement de la fin de 2. montre que

$$\forall \mathrm{N} \geqslant 0, \quad ||\mathrm{R_N}||_\infty \leqslant a_{\mathrm{N}+1},$$

donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément si (a_n) converge vers 0.

• Réciproquement, supposons que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément, donc que $||f_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ 0.
Comme (a_n) est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \ell$.
Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.
On a : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,[\,, \mathrm{R_N}(x) \geqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \ell x^n(1-x) \geqslant \ell x^{\mathrm{N}+1}$, donc $||\mathrm{R_N}||_\infty \geqslant \ell x^{\mathrm{N}+1}$.
En faisant tendre x vers 1 : $||\mathrm{R_N}||_\infty \geqslant \ell$.
Ainsi : $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad ||\mathrm{R_N}||_\infty \geqslant \ell$.
Comme $||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$, on en déduit $\ell \leqslant 0$, donc $\ell = 0$...

Exercice 261 *Équivalent au bord du domaine de définition*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, si cela à un sens, $\quad f :]\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n x^a \mathrm{e}^{-nx^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Justifier que la convergence est normale sur $\mathcal{D}_f$ si, et seulement si, $a > 4$.

3. On admet que : $\mathrm{S} :]\,0\,;\,1\,[\, \to \mathbb{R}, q \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ est dérivable et peut être dérivée terme à terme.
Sans hypothèse sur a, expliciter f et déterminer un équivalent de f en 0^+.

Solution (**Ex.261** – *Équivalent au bord du domaine de définition*)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, si cela à un sens, $f :]\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n x^a \mathrm{e}^{-nx^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto nx^a e^{-nx^2}$.

1. Pour $x > 0$, $n^2 g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $g_n(x) = o\left(1/n^2\right)$

Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n^2$, $f(x)$ existe par domination : $\mathcal{D}_f =]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. g_n est dérivable pour tout $n \geqslant 1$ et :
$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[, \quad g_n'(x) = nx^{a-1}(a-2nx^2)e^{-nx^2}$, donc g_n, qui est positive, atteint un maximum sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ en $\sqrt{a/(2n)}$.

$||g_n||_\infty = g\big(\sqrt{a/(2n)}\big) = \left(\dfrac{a}{2e}\right)^{a/2} \times \dfrac{1}{n^{a/2-1}}$, donc la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||g_n||_\infty$ converge si, et seulement si, $a/2 - 1 > 1$, i.e. $a > 4$.

3. $\mathrm{S} :]\,0\,;\,1\,[\to \mathbb{R}, q \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ est dérivable et peut être dérivée terme à terme donc :

$$\forall q \in]\,0\,;\,+\infty\,[, \mathrm{S}'(q) = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (q^n)' \text{ i.e. } \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}.$$

Avec $x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, $q = e^{-x^2} \in]\,0\,;\,1\,[$,

$$f(x) = x^a e^{-x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(e^{-x^2}\right)^{n-1} = \frac{x^a e^{-x^2}}{\left(1-e^{-x^2}\right)^2}$$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^a}{(x^2)^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^{a-4}$

On peut remarquer, en lien avec la question précédente que, pour $a < 4$, $f(x)$ explose au voisinage de 0 : $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

Exercice 262 *Étude de dérivabilité*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$, $\qquad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2} e^{-nx}$,

et, sous réserve d'existence, $\qquad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Justifier que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

4. a) La convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'(x)$ est-elle normale sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$?

b) Et sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$ pour $a > 0$ quelconque ?

Solution (**Ex.262** – *Étude de dérivabilité*)

1. Si $x < 0$, $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

Si $x \geqslant 0$, $\left(\dfrac{1}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx}\right)_n$ est une suite décroissante de limite nulle donc par le théorème de Leibniz, la série converge.

Donc $\mathcal{D}_f = [\,0\,; +\infty\,[$.

2. D'après le théorème de Leibniz,

$\forall x \in [\,0\,; +\infty\,[\,, |\mathrm{R_N}(x)| = \left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant |f_{\mathrm{N}+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+(\mathrm{N}+1)^2}$, donc

$||\mathrm{R_N}||_\infty \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{N}^2}$ donc $||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$.

La convergence est uniforme et pour tout n, f_n est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$ donc f est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

3. Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,; +\infty\,[$ et on peut raisonner de même pour la majoration du reste :

$\left|\left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f'_n\right|\right|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{N}}$, donc $\left|\left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f'_n\right|\right|_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$.

La convergence étant uniforme, la somme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

4. a) $||f'_n||_\infty \geqslant |f'_n(0)| \geqslant \dfrac{n}{1+n^2}$ or $\dfrac{n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, donc par équivalence de termes généraux positifs, puis par minoration, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ||f'_n||_\infty$ diverge. La convergence n'est pas normale sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

b) Soit $a > 0$. Alors (*attention à la place des valeurs absolues !*) :

$\forall x \geqslant a, |f'_n(x)|' = -\dfrac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx} < 0$ donc :

$||f'_n||_\infty = |f'_n(a)| = \dfrac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{-a}\right)^n$,

et comme $\mathrm{e}^{-a} \in\,]\,0\,; 1\,[$, la série géométrique de raison e^{-a} converge, donc par équivalence de termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ||f'_n||_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[}$ converge.

Il y a convergence normale sur tout intervalle $[\,a\,; +\infty\,[$ avec $a > 0$... ce qui n'entraîne pas la convergence normale sur $]\,0\,; +\infty\,[$.

Exercice 263 *Série géométrique dérivée – I*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$.

1. Rappeler le domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

2. Soit $\mathrm{I} =]-1\,;\,1[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Montrer que $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = 1$. La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est-elle normale ?

b) Soit $a \in]0\,;\,1[$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[-a\,;\,a]$.

3. a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\mathrm{S}' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

b) Finalement, que vaut, pour $x \in]-1\,;\,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$?

4. En s'inspirant de ce qui précède, déterminer, pour tout $x \in]-1\,;\,1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

Solution (**Ex.263** – *Série géométrique dérivée – I*)

1. Le domaine de convergence de la série *géométrique* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est $]-1\,;\,1[$.

2. a) $\forall x \in \mathrm{I}, |f_n(x)| \leqslant 1$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant 1$.
$\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = 1$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant 1$.
Donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = 1$.
La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas normale puisque $\sum_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$ diverge (grossièrement).

b) $\forall x \in [-a\,;\,a], |f_n(x)| \leqslant a^n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant a^n$.
$\lim_{x\to a^-} f_n(x) = a^n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant a^n$.
Donc $||f_n||_{\infty,[-a\,;\,a]} = a^n$.
La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normale sur $[-a\,;\,a]$ puisque $\sum_{n\geqslant 1} a^n$ converge d'après la question 1 ($a \in \mathrm{I}$).

3. a) La convergence n'étant pas normale sur I, mais normale sur tout $[-a\,;\,a] \subset \mathrm{I}$, raisonnons d'abord sur $\mathrm{I}_a = [-a\,;\,a]$ où $a \in]0\,;\,1[$.

- Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I_a.
- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers S sur I_a.

- $\forall x \in \mathrm{I}_a, |f_n'(x)| = n\,|x|^{n-1} \leqslant na^{n-1}$ et $|f_n'(a)| = na^{n-1}$ donc $||f_n'||_{\infty,\mathrm{I}_a} = na^{n-1}$.

  Par le critère de D'Alembert :
  $\left|\dfrac{(n+1)a^n}{na^{n-1}}\right| = \dfrac{n+1}{n}a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a < 1$ donc $\sum_{n\geqslant 0} na^{n-1}$ converge.

  Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur I_a. Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur I_a.

  Par ces trois points, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[\,-a\,;\,a\,] \subset \,]\,-1\,;\,1\,[$ et $\mathrm{S}' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$,

  donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{S}' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ sur $]\,-1\,;\,1\,[$

b) D'une part : $\forall x \in \,]\,-1\,;\,1\,[\,, \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

D'autre part : $\forall x \in \,]\,-1\,;\,1\,[\,, \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (série géométrique !) donc $\mathrm{S}'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$$\forall x \in \,]\,-1\,;\,1\,[\,, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

4. En montrant que $\sum_{n\geqslant 0} f_n''$ converge normalement sur tout $\mathrm{I}_a = [\,-a\,;\,a\,] \subset \,]\,-1\,;\,1\,[$, on montre de même que S est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,-1\,;\,1\,[$ et $\mathrm{S}''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$.

Techniquement : $||f_n''||_{\infty,\mathrm{I}_a} = n(n-1)a^{n-2}$ et la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a^{n-2}$ relève du critère de D'Alembert.

$\boxed{\textbf{Exercice 264}}$ *Série géométrique dérivée – II*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto nx^{n-1}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

2. Soit $\mathrm{I} = \,]\,-1\,;\,1\,[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Déterminer $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$. La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est-elle normale ?

b) Soit $a \in \left]0\,;\,1\right[$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[-a\,;\,a]$.

3. a) Montrer que S est continue sur I.

b) Déterminer la primitive de S sur I s'annulant en 0.

4. Finalement, que vaut, pour $x \in \left]-1\,;\,1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$?

Solution (**Ex.264** – *Série géométrique dérivée – II*)

1. Si $x = 0$, $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} 0$ converge, vers 0.

Si $x \neq 0$:

$\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \dfrac{n+1}{n}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$.

Par le critère de D'Alembert, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

Si $|x| = 1$, $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ($\neq 0\,!$) donc la série diverge grossièrement.

Le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est $\left]-1\,;\,1\right[$.

2. Soit $\mathrm{I} = \left]-1\,;\,1\right[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) $\forall x \in \mathrm{I}, |f_n(x)| \leqslant n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant n$.

$\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant n$.

Donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = n$.

La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas normale puisque $\sum_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$ diverge grossièrement.

b) $\forall x \in [-a\,;\,a]\,, |f_n(x)| \leqslant na^{n-1}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant na^{n-1}$.

$\lim_{x\to a^-} f_n(x) = na^{n-1}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant na^{n-1}$.

Donc $||f_n||_{\infty,[-a\,;\,a]} = na^{n-1}$.

La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normale puisque $\sum_{n\geqslant 1} na^{n-1}$ converge d'après la question 1 ($a \in \mathrm{I}$).

3. a) La série converge normalement sur tout $[-a\,;\,a] \subset \mathrm{I}$ donc S est continue sur I.

b) La primitive F de S sur I s'annulant en 0 est définie par

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathrm{I}$. Par convergence normale donc uniforme sur le segment $[\,0\,;\,x\,]$ – ou le segment $[\,x\,;\,0\,]$ si $x < 0$ –, et continuité des fonctions f_n, on peut permuter somme et intégrale :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

4. Pour $x \in \,]-1\,;\,1\,[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \mathrm{S}(x) = \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Exercice 265 *Série géométrique primitivée*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $\quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^n}{n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

2. Soit $\mathrm{I} = \,]-1\,;\,1\,[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Déterminer $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est-elle normale ?

b) Soit $a \in \,]\,0\,;\,1\,[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[\,-a\,;\,a\,]$.

3. a) Justifier que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\mathrm{S}' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$.

b) En déduire une expression explicite de S.

4. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$?

Solution (**Ex.265** – *Série géométrique primitivée*)

1. Si $x = 0$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} 0$ converge, vers 0.

Si $x = 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ donc la série diverge (harmonique).

Si $x = -1$, $f_n(-1) = \dfrac{(-1)^n}{n}$ donc la série converge par la théorème de Leibniz car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.

Si $x \notin \{-1, 0, 1\}$:
$\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \dfrac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$.
Par le critère de D'Alembert, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.
Le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est $[-1\,;\,1[$.

2. a) $\forall x \in \mathrm{I}, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant \dfrac{1}{n}$.
Donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = \dfrac{1}{n}$.
La convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas normale puisque $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$ diverge (série harmonique).

b) $\forall x \in [-a\,;\,a], |f_n(x)| \leqslant \dfrac{a^n}{n}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant \dfrac{a^n}{n}$.
$\lim\limits_{x\to a^-} f_n(x) = \dfrac{a^n}{n}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant \dfrac{a^n}{n}$.
Donc $||f_n||_{\infty,[-a\,;\,a]} = \dfrac{a^n}{n}$.
La convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est normale sur $[-a\,;\,a]$ puisque $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n}{n}$ converge d'après la question 1 ($a \in \mathrm{I}$).

3. a) La convergence n'étant pas normale sur I, mais normale sur tout $[-a\,;\,a] \subset \mathrm{I}$, raisonnons d'abord sur $\mathrm{I}_a = [-a\,;\,a]$ où $a \in\,]0\,;\,1[$.

- Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I_a.
- $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers S sur I_a.
- $\forall x \in \mathrm{I}_a, |f'_n(x)| = |x|^{n-1} \leqslant a^{n-1}$ et $|f'_n(a)| = a^{n-1}$ donc $||f'_n||_{\infty,\mathrm{I}_a} = a^{n-1}$.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ converge normalement sur I_a car la série géométrique de raison $a \in\,]0\,;\,1[$ converge. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ converge uniformément sur I_a.

Par ces trois points, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[-a\,;\,a] \subset\,]-1\,;\,1[$ et $\mathrm{S}' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n$,

donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{S}' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n$ sur $]-1\,;\,1[$

b) $\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[, \mathrm{S}'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ (série géométrique !).

En primitivant sur $\left]-1\,;\,1\right[$, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[, \mathrm{S}(x) = -\ln(1-x) + k$ (Remarque : $1 - x > 0$).

Or $\mathrm{S}(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n}{n} = 0$ et $-\ln(1-0) = 0$, donc $k = 0$.

$$\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[, \mathrm{S}(x) = -\ln(1-x)$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \mathrm{S}(1/2) = -\ln(1/2) = \ln(2)$

Exercice 266 *Une intégrale somme de série*

Pour tout u de $\left]0\,;\,1\right]$, on pose : $\quad f(u) = \dfrac{\exp(u) - 1}{u}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore $f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}$ le prolongement obtenu.

2. a) Exprimer, pour tout u de $[0\,;\,1]$, $f(u)$ sous forme d'une somme d'une série de fonctions.

b) Montrer finalement que $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

Solution (**Ex.266** – *Une intégrale somme de série*)

1. $\mathrm{e}^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $f(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 1 \in \mathbb{R}$.

2. a) $\forall u \in [0\,;\,1], f(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n!}$.

b)
- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : u \mapsto u^{n-1}/n!$ est continue sur $[0\,;\,1]$.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f$ sur $[0\,;\,1]$.
- f est continue sur $[0\,;\,1]$.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n(u)|\,\mathrm{d}u = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n \times n!}$ converge car $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant \dfrac{1}{n.n!} \leqslant \dfrac{1}{n!}$ et la

série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$ converge.

Par le théorème d'interversion,

$\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(u)\mathrm{d}u$, i.e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

Exercice 267 *Une intégrale somme de série*

1. Montrer l'existence de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1\big)\mathrm{d}x.$

2. a) Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de la fonction S définie par

$$\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n!}.$$

b) Expliciter, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\mathrm{S}(x)$ en fonction de x.

3. Montrer que : $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$

Solution (**Ex.267** – *Une intégrale somme de série*)

1. $f : x \mapsto \exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$ avec $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ intégrable.
Donc f est intégrable par équivalence de fonctions positives.

2. a) $\dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{\mathrm{e}^{-nx}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ d'après le critère de D'Alembert.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-x})^n}{n!} = \exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1 = f(x).$

3. Montrer que : $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$

- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}/n!$ est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} \mathrm{S}$ sur $[\,0\,; +\infty\,[$.
- S est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n \times n!}$ converge car $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant \dfrac{1}{n.n!} \leqslant \dfrac{1}{n!}$ et la

série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$ converge.

Par le théorème d'interversion,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x, \text{ i.e. } \mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}.$$

Exercice 268 *Intégrale se ramenant à ζ(2)*

1. a) Montrer que le domaine $\mathcal{D}$ de définition de la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ est $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

c) Calculer explicitement $\mathrm{S}'(x)$ en fonction de x.

2. a) Justifier que : $\forall x > 0, 0 < \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire la limite de S en $+\infty$.

3. Déduire des questions précédentes une expression explicite de S.

4. a) Montrer la convergence de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} -\ln\big(1-\mathrm{e}^{-t}\big)\mathrm{d}t$.

b) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer I.

Solution (**Ex.268** – *Intégrale se ramenant à $\zeta(2)$*)

1. a) Pour $x < 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série diverge grossièrement.

Pour $x = 0$, la série est une série de Riemann divergente.

Pour $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} = O\left((\mathrm{e}^{-x})^n\right)$ montre la convergence.

$\mathcal{D} =]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b) Posons pour $n \geqslant 0$, $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ avec $f_n' : x \mapsto -\mathrm{e}^{-nx}$.

(f_n) converge simplement vers S.

Soit $a > 0$. $\forall n \geqslant 1, ||f_n'||_{\infty,[\,a\,;\,+\infty\,[} = \big(\mathrm{e}^{-a}\big)^n$ donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$ (car série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-a} \in]\,0\,;\,1\,[$).

Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D} =]\,0\,;\,+\infty\,[$.

c) D'après ce qui précède,

$$\forall x > 0, \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

2. a) Soit $x > 0$.

$\mathrm{S}(x)$ est strictement positif comme somme de termes strictement positifs.

$\forall n \geqslant 1, \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$, donc en sommant ces inégalités, $\mathrm{S}(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\mathrm{e}^{-x}\big)^n = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

b) Par encadrement : $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. Par primitivation, il existe K tel que : $\forall x > 0, \mathrm{S}(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{K}$.
Comme $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\mathrm{K} = 0$. Donc $\forall x \in \mathcal{D}, \mathrm{S}(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$.

4. a) S est continue positive sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ avec :

- $\mathrm{S}(t) = -\ln\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) - \ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente de référence. Par équivalence de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t$ existe.
- $\mathrm{S}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente de référence. Par équivalence de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t$ existe.
- Donc $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t$ existe.

b)
- Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
- S est continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
- $\forall n \geqslant 0, \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$ (intégrale fr référence) et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$.

Le théorème d'interversion s'applique :
$\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Chapitre 11

Séries entières

Exercice 269 *Détermination de rayon de convergence*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} u_n(z)$ dans les cas suivants :

1. $u_n(z) = \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$ **2.** $u_n(z) = \mathrm{e}^{-n^2} z^n$ **3.** $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{n^2} z^n$

4. $u_n(z) = n! z^n$ **5.** $u_n(z) = \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$ **6.** $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^n} z^{2n+1}$

Solution (**Ex.269** – *Détermination de rayon de convergence*)
Je note a_n le coefficient de z^n dans $u_n(z)$.

1. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3n^2}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}|z|$ donc $\mathrm{R} = 3$.

2. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \mathrm{e}^{-2n-1}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{R} = +\infty$.

3. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$ car $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}$, donc $\mathrm{R} = 1$.

4. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{R} = 0$ (divergence grossière dès que $z \neq 0$).

5. $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}|z|^3 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n |z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}\,|z|^3$ donc $\mathrm{R} = \mathrm{e}^{-1/3}$.

6. $|u_{n+1}(z)u_n(z)| = \dfrac{\ln(n+1)\mathrm{e}^n}{\ln(n)\mathrm{e}^{n+1}}|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{|z|^2}{\mathrm{e}}$ donc $\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 270 *Rayons de convergence abstraits*

On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $\mathrm{R} \in \left]\, 0\,;\, +\infty\, \right[$.

Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$? Et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$?

Solution (**Ex.270** – *Rayons de convergence abstraits*)

- Si $|z| < \sqrt{\mathrm{R}}$, alors $\left|z^2\right| < \mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ converge.

Si $|z| > \sqrt{\mathrm{R}}$, alors $\left|z^2\right| > \mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ diverge.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{\mathrm{R}}$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Soit $r \in \left]\, 0\,;\, \mathrm{R}\, \right[$.

$\dfrac{a_n z^n}{n!} = a_n r^n \dfrac{1}{n!} \left(\dfrac{z}{r}\right)^n = o\left(a_n r^n\right)$ car $\dfrac{1}{n!} \left(\dfrac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge puisque $0 < r < \mathrm{R}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Exercice 271 *Autour du logarithme - I*

Soit f définie, sous réserve d'existence, par : $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Former son développement en série entière en 0 en donnant le rayon de convergence **a)** en factorisant $x^2 - 5x + 6$; **b)** en décomposant f' sous la forme $\dfrac{\alpha}{2-x} + \dfrac{\beta}{3-x}$.

Solution (**Ex.271** – *Autour du logarithme - I*)

1. $x^2 - 5x + 6 = (2-x)(3-x)$ est strictement positif sur $\left]\, -\infty\,;\, 2\, \right[\cup \left]\, 3\,;\, +\infty\, \right[$ donc l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \left]\, -\infty\,;\, 2\, \right[\cup \left]\, 3\,;\, +\infty\, \right[$.

2. a) $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$f(x) = \ln(2-x) + \ln(3-x) = \ln\left(2(1 - \dfrac{x}{2})\right) + \ln\left(3(1 - \dfrac{x}{3})\right) = \ln(6) + \ln\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$.

Du développement : $\forall t \in \left]-1\,;\,1\right[, \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$, on tire

$\forall x \in \left]-2\,;\,2\right[$ (de sorte que $\frac{x}{2} \in \left]-1\,;\,1\right[$ et $\frac{x}{3} \in \left]-1\,;\,1\right[$) :

$$f(x) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \begin{cases} \ln 6 & \text{si } n = 0 \\ -\dfrac{1}{2^n n} - \dfrac{1}{3^n n} = -\dfrac{3^n + 2^n}{6^n n} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Comme ce développement est obtenu en sommant une série entière de rayon 2 et une série entière de rayon 3, son rayon 2. (d'ailleurs il ne saurait dépasser 2 vu $\mathcal{D}_f$.

On peut aussi le vérifier par la règle de D'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^{n+1}}{6 \times 3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \text{ donc R} = 2...$$

b) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$$

et $\dfrac{\alpha}{2-x} + \dfrac{\beta}{3-x} = \dfrac{\alpha(3-x)+\beta(2-x)}{(2-x)(3-x)} = \dfrac{-(\alpha+\beta)x + 3\alpha + 2\beta}{x^2-5x+6}$

d'où : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = -\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{3-x} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-(x/2)} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-(x/3)}$.

Par la série géométrique, de rayon 1,

$$\forall x \in \left]-2\,;\,2\right[, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = -\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$$

Comme ce développement est obtenu en sommant une série entière de rayon 2 et une série entière de rayon 3, son rayon 2. (d'ailleurs il ne saurait dépasser 2 vu $\mathcal{D}_f$.

On peut aussi le vérifier par la règle de D'Alembert...

Primitivons, en observant que $f(0) = \ln(6)$.

$$\forall x \in \left]-2\,;\,2\right[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \begin{cases} \ln 6 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{b_{n-1}}{n} = -\dfrac{1}{2^n n} - \dfrac{1}{3^n n} = -\dfrac{3^n + 2^n}{6^n n} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 272 *Autour du logarithme - II*

Former le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ en précisant le rayon de convergence de la série obtenue.

Solution (**Ex.272** – *Autour du logarithme - II*)
Le trinôme $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ ne s'annulant pas, f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \neq 1$, $x^2 + x + 1 = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$ (somme géométrique), donc :

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[, \quad f(x) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\text{avec } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{3k} = -\dfrac{2}{n} & \text{si } n = 3k \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n = 3k+1 \text{ ou } n = 3k+2 \end{cases}.$$

Par différence de séries entières de même rayon 1, ce développement est au moins de rayon 1.
Mais ceci n'est qu'un minimum...
Cependant, si $x > 1$,$(a_n x^n)$ ne converge pas vers 0 et la série diverge grossièrement, donc le rayon vaut exactement 1.

$\boxed{\textbf{Exercice 273}}$ *T.g. exponentiel du type P(n)x*^{n}*/n !*

Rayon de convergence et somme de : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} z^n$.

Solution (**Ex.273** – *T.g. exponentiel du type P(n)x*^{n}*/n !*)
On a : $(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2$ donc :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(n+1)(n-2)z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(n^2 - n - 2)z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n(n-1)z^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{z^n}{(n-2)!} - 2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{z^n}{n!} = z^2 \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-2} \frac{z^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{z^n}{n!}$$

On reconnaît deux séries exponentielles convergentes pour tout z de $\mathbb{C}$, donc :

- le rayon de convergence est infini,
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{S}(z) = (z^2 - 2)\mathrm{e}^z$.

$\boxed{\textbf{Exercice 274}}$ *Indéfiniment dérivable*

Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.274** – *Indéfiniment dérivable*)

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!}x^n$. Cette expression est encore valable pour $x = 0$. Donc f est la somme d'une série entière de rayon infini. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 275 *Somme d'une série numérique par les S.E.*

Existence et valeur de $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)3^n}$.

Solution (**Ex.275** – *Somme d'une série numérique par les S.E.*)

On observe que $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1/3)^n}{n(n+1)}$ si elle existe. On s'intéresse donc à cette série entière.

$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ donc la série converge pour tout x tel que $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$, donc $\mathrm{R} = 1$.

$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\setminus \{0\}, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $\mathrm{S} = 1 - 2\ln\dfrac{3}{2}$.

Exercice 276 *Autour de* $(1+x)^\alpha$

1. Déterminer le développement en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On donnera une expression explicite à l'aide de factorielles de ses coefficients a_n.
2. En déduire que $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est développable en série entière en 0 en précisant le rayon de convergence et les coefficients de ce développement en fonction des a_n.

Solution (**Ex.276** – *Autour de* $(1+x)^\alpha$)

1. En prenant $\alpha = -1/2$ et $-x^2 \to x$ dans le DSE de $(1+x)^\alpha$:

   $\forall x \in \left]-1\,;1\right[, \quad \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ (Rappel : produit des pairs de 2 à $2n$: $2^n n!$, produit des impairs de 1 à $2n-1$: $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$...)

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $a_{2n+1} = 0$.

2. $\forall x \in \left]-1\,;1\right[, f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec

$b_0 = a_0$ et $\forall n \geqslant 1, b_n = a_n + a_{n-1} = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ pair} \\ a_{n-1} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, cette dernière écriture étant valable pour $n = 0$...

Exercice 277 *Séries entières et primitives*

1. Former le développement en série entière en 0 de
$$f :]-1\,;\,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}.$$

2. Former le développement en série entière e, 0 de
$$g :]-1\,;\,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto 2\mathrm{Arctan}(x) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. Établir le lien entre les deux questions précédentes.

Solution (**Ex.277** – *Séries entières et primitives*)

1. Par la série géométrique :
$\forall t \in]-1\,;\,1[, \dfrac{1}{1-t^4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{4n}.$
Par primitivation, qui conserve le rayon :
$\forall x \in]-1\,;\,1[, f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$

2. Grâce aux séries usuelles, $\forall x \in]-1\,;\,1[$:
$g(x) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$
Cherchons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Clairement : $a_0 = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ pair : $n = 2k$. Alors :

$a_n = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{1}{n} = 0.$
On pouvait aussi remarquer que g est une fonction impaire...

- Soit $n \in \mathbb{N}$ impair : $n = 2k+1$. Alors :

$a_n = 2 \times \dfrac{(-1)^k}{2k+1} + 2 \times \dfrac{1}{2k+1}.$

(i) Si k est pair, $k = 2p$ (et $n = 4p+1$) $a_n = \dfrac{4}{4p+1} = \dfrac{4}{n}.$

(ii) Si k est impair, $k = 2p+1$ (et $n = 4p+3$) $a_n = 0.$

- Bilan : si $n \equiv 1 \mod 4$ (i.e. n peut s'écrire $n = 4p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$), alors $a_n = \dfrac{4}{n}$, et sinon, $a_n = 0$.

  Donc $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{4n+1} x^{4n+1}$.

3. Manifestement $g = 4f$, ce qui s'explique par

- $\dfrac{1}{1-\mathrm{X}^4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+\mathrm{X}^2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\mathrm{X}^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+\mathrm{X}^2} + \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{X}} + \dfrac{1}{1-\mathrm{X}}\right)$

  se primitive sur $]-1\,;1\,[$ en $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(\mathrm{X}) + \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}} = \dfrac{1}{4} g(\mathrm{X})$...

- ou encore en dérivant g : $g'(x) = ... = \dfrac{4}{1-x^4}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 278}}$ *Expressions fonctionnelles de séries entières*

Déterminer le rayon de convergence et donner une expression fonctionnelle de

1. $f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$,

2. $g(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n} \quad (x \in \mathbb{R})$,

3. $h(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (2^n + 3^n) x^{n} \quad (x \in \mathbb{R})$,

4. $j_p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$ où $p \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
On commencera par calculer $(1-x)j_p(x)$.

Solution (**Ex.278** – *Expressions fonctionnelles de séries entières*)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u_n = \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de f est 1.

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

Par primitivation de série entière :

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[, \quad \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

donc $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in \,]-1\,;0\,[\, \cup \,]\,0\,;1\,[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^n$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de f est 1.

- On a : $\forall x \in \,]-1\,;1\,[, x g(x^2) = \mathrm{Arctan}(x)$ (développement de référence).

Donc pour $x \in \left]0\,;1\right[,\quad g(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$

- Par 1. : $\forall x \in \left]-1\,;1\right[, xg(-x^2) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Donc pour $x \in \left]-1\,;0\right[, g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right).$

- Pour $x = 0$: $g(0) = 1$.

3. Pour $x \neq 0$, $a_n x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n x^n$ donc $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3|x|$: la série converge si $|x| < 1/3$ et diverge si $|x| > 1/3$: $\mathrm{R} = \dfrac{1}{3}$.
Pour $x \in \left]-1/3\,;1/3\right[$,
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n$ car ces deux séries converge puisque $|2x| < 1$ et $|3x| < 1$.
$f(x) = \dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1-3x}.$

4. $\dfrac{\binom{n+p+1}{p}}{\binom{n+p}{p}} = \dfrac{n+p+1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc le rayon de convergence vaut 1.
Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$ et $p \in \mathbb{N}^*$,
$(1-x)f_p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p}x^n$
$1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\binom{n+p}{p} - \binom{n+p-1}{p}\right)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n$ par la formule de Pascal.
$(1-x)f_p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n = f_{p-1}(x).$
On obtient la formule de récurrence :
$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-1\,;1\right[, f_{p+1}(x) = \dfrac{1}{1-x}f_p(x).$
Comme $f_0(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-1\,;1\right[,\quad f_p(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}.$$

Remarque : on peut aussi procéder en dérivant f_p...

Exercice 279 *Fonctions DSE solutions d'équations différentielles*

1. Déterminer les fonctions f DSE sur un intervalle du type $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$ solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \qquad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Préciser R et donner une expression explicite de f.

2. Même question pour

$$(\mathrm{E}') : \qquad x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1.$$

Solution (**Ex.279** – *Fonctions DSE solutions d'équations différentielles*)

1. • Supposons que f est une fonction DSE solution de (E) sur un intervalle $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$.

Écrivons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En substituant le développement en série entière de f dans (E) et par unicité du développement, on obtient :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 0, (n+2)(n+3)a_{n+2} = a_n \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

On obtient : $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_0$ et $a_{2p+1} = 0$.

Le rayon de convergence de cette série est infini, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}a_0 & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• Réciproquement, soit $k \in \mathbb{R}$ quelconque fixé et $f_k : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}k & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f_k étant DSE sur $\mathbb{R}$, f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On vérifie par le calcul que f satisfait l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier (en séparant $\mathbb{R}^*$ et 0).

• Bilan : les fonctions DSE solutions de (E) sont toutes les fonctions :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}k & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (\textit{quelconque}).$$

2. • Supposons que f est une fonction DSE solution de (E′) sur un intervalle $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$.

Écrivons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En substituant le développement en série entière de f dans (E′) et par unicité du développement, on obtient :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 2, (n+1)(n+2)a_n = a_{n-2} \\ 6a_1 = 0 \\ 2a_0 = 1 \end{cases}$$

On obtient : $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \dfrac{1}{(2p+2)!}$ et $a_{2p+1} = 0$.
Le rayon de convergence de cette série est infini, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Réciproquement, soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f étant DSE sur $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On vérifie par le calcul que f satisfait l'équation (E′) sur $\mathbb{R}$ tout entier (en séparant $\mathbb{R}^*$ et 0).
- Bilan : l'unique fonction DSE solution de (E′) est la fonction :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 280 *En passant par l'exponentielle complexe*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.

Solution (**Ex.280** – *En passant par l'exponentielle complexe*)

$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|x|}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout x et $\mathrm{R} = +\infty$.

Pour $x = 0$, $f(x) = 1$.

Pour $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Pour $x < 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$

Exercice 281 *Convergence et valeur au bord du domaine*

1. Montrer l'existence de $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\,0\,;\,1\,], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

a) Justifier l'existence, pour $x \in [\,0\,;\,1\,]$, de $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Que vaut, pour $x \in [\,0\,;\,1\,[$, $\mathrm{S}(x)$?

c) On note $\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Montrer que $||\mathrm{R}_n||_{\infty,[\,0\,;\,1\,]} \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

d) En déduire la continuité de S sur $[\,0\,;\,1\,]$.

3. Déterminer S.

Solution (**Ex.281** – *Convergence et valeur au bord du domaine*)

1. Théorème de Leibniz : $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.

2. a) Sur $[\,0\,;\,1\,[$, S.E. de Arctan. En 1, voir 1).

b) S.E. de R.C. 1 : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,[\,, \mathrm{S}(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

c) Leibniz : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,], |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$. Donc $||\mathrm{R}_n||_{\infty,[\,0\,;\,1\,]} \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

d) La convergence de $\sum_n f_n$ est uniforme sur $[\,0\,;\,1\,]$ donc la somme est continue sur $[\,0\,;\,1\,]$.

3. $\mathrm{S} = \mathrm{S}(1) = \lim_{x\to1^-} \mathrm{S}(x) = \lim_{x\to1^-} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 282 *Indéfiniment dérivable*

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$ est continue, et prolongeable par continuité en 0.

2. On note encore f le prolongement obtenu. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Que vaut $f^{(2018)}(0)$? Et $f^{(2019)}(0)$?

Solution (**Ex.282** – *Indéfiniment dérivable*)

1. $1-\cos(2x) \underset{x\to0}{\sim} 2x^2$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 2$: $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 2$ donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 2$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$, donc
$\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}$
Pour $x = 0$, cette dernière série converge et sa somme est $2 = f(0)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}$.
f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. En écrivant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Comme f est paire, $a_{2019} = 0$ donc $f^{(2017)}(0) = 0$.
Et $f^{(2018)}(0) = 2018! a_{2018} = 2018! a_{2\times 1009} = 2018! \times \frac{(-1)^{1009} 4^{1010}}{(2020)!} = -\frac{4^{1010}}{2019 \times 2020}$.

Exercice 283 *Une majoration*
Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad |e^z - 1 - z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|} - 1 - |z|$.

Solution (**Ex.283** – *Une majoration*)
$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z - 1 - z| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|z|} - 1 - |z|$...

Exercice 284 *Différence de S.E.*
Soit $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est développable en série entière, en précisant le rayon de convergence du développement obtenu.

Solution (**Ex.284** – *Différence de S.E.*)

1. $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) = (1-z)(2-z)$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$.

2. $\forall z \in \mathcal{D}_f$,
$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - z/2}$. Pour z tel que $|z/2| < 1$ et $|z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 1$, par convergence de la série géométrique,

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} z^n$$

f étant la somme de deux séries entières de rayons distincts 1 et 2, le rayon de convergence de cette somme est $\min(1,2) = 1$. Sinon, on peut réveiller M. D'Alembert pour s'en convaincre.

Exercice 285 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(n+1)!} z^n$.

2. Calculer sa somme sur le disque de convergence.

Solution (**Ex.285** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

1. $\forall z \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \dfrac{(n+1)}{(n+2)n}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout z et $\mathrm{R} = +\infty$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)!} z^n$ ont un rayon de convergence infini (série exponentielle).

Pour $z \neq 0$,

$$\mathrm{S}(z) = \mathrm{e}^z - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^z - \frac{1}{z}\left(\mathrm{e}^z - 1\right).$$

Pour $z = 0$, $\mathrm{S}(z) = 0$.

Exercice 286 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \cos(n) x^n$.

Solution (**Ex.286** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

$|\cos(n)x^n| \leqslant |x|^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |x|^n$ converge pour $|x| < 1$ donc par comparaison $\mathrm{R} \geqslant 1$.

$(\cos(n))_n$ diverge en $+\infty$ donc la série diverge grossièrement lorsque $x = 1$. Donc $\mathrm{R} = 1$.

Soit $x \in \,]-1\,;1\,[$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{in} + \mathrm{e}^{-in}) x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{i} x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-i} x)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i}x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-i}x} = \frac{1}{2}\frac{2 - \mathrm{e}^{-i}x - \mathrm{e}^{i}x}{(1-\mathrm{e}^{i}x)(1-\mathrm{e}^{-i}x)}$$

$$f(x) = \frac{1-\cos(1)x}{1-2\cos(1)x+x^2}$$

Exercice 287 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.

Solution (**Ex.287** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|x|}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout x et $\mathrm{R} = +\infty$.

Pour $x = 0$, $f(x) = 1$.

Pour $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Pour $x < 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$

Exercice 288 *Étude au bord du domaine*

Pour x réel, on pose sous réserve d'existence

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

2. a) f est-elle définie en -1 ?

b) Montrer que la série définissant f converge uniformément sur $[-1\,;\,0]$.

c) f est-elle continue sur $[-1\,;\,1[$?

On se propose de déterminer la limite de f en 1 par deux méthodes.

3. *Première méthode –*

a) Comparer, pour tout $x \in [0\,;\,1[$, $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{x^n}{n}$.

b) En déduire la limite de f en 1.

4. *Seconde méthode –*

a) Justifier que f est dérivable sur $[0\,;\,-1[$. Quelle est sa variation ?

b) En déduire la limite de f en 1.

Solution (**Ex.288** – *Étude au bord du domaine*)

Pour x réel, on pose sous réserve d'existence

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. $\mathrm{R} = 1$.

2. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge en appliquant le théorème de Leibniz car $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle : f est définie en -1.

b) Soit $x \in [\,-1\,;\,0\,]$. $\mathrm{R_N}(x) = \displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-x)^n}{\sqrt{n}}$.

- Si $x = 0$, $\big(\dfrac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\big)$ est décroissante, de limite nulle... car c'est la suite nulle.
- Si $x \in [\,-1\,;\,0\,[$, $(u_n) = \big(\dfrac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\big)$ est strictement positive, décroissante car

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (-x)\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < 1$, de limite nulle car $0 < u_n \leqslant 1/\sqrt{n}$.

Par le théorème de Leibniz : $|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \left|\dfrac{(-x)^{\mathrm{N}+1}}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}$.

Ainsi : $\forall x \in [\,-1\,;\,0\,], |\mathrm{R_N}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}$, donc $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[\,-1\,;\,0\,]} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}$, et $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[\,-1\,;\,0\,]} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ par encadrement. La convergence est uniforme sur $[\,-1\,;\,1\,]$.

c) f est somme d'une série entière de domaine de convergence $]\,-1\,;\,1\,[$ donc est $\mathcal{C}^\infty$, donc continue, sur $]\,-1\,;\,1\,[$.

Par convergence uniforme sur $[\,-1\,;\,0\,]$, puisque chaque $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ est continue, f est continue sur $[\,-1\,;\,1\,]$.

Donc f est continue sur $[\,-1\,;\,1\,[$.

On se propose de déterminer la limite de f en 1 par deux méthodes.

3. *Première méthode –*

a) $\forall x \in [\,0\,;\,1\,[$, $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{x^n}{n}$.

b) On en déduit par sommation : $\forall x \in [\,0\,;\,-1\,[$, $\quad f(x) \geqslant -\ln(1-x)$. Or : $-\ln(1-x) \xrightarrow[x\to1]{} +\infty$. Par comparaison : $f(x) \xrightarrow[x\to1]{} +\infty$.

4. *Seconde méthode –*

a) f est la somme d'une série entière sur $]\,-1\,;\,1\,[$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ donc dérivable sur cet intervalle, et on peut dériver terme à terme :

$\forall x \in [\,0\,;\,1\,[\,, f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+1})x^n \geqslant 0$. f est croissante dur

$[0\,;1\,[$.

b) Puisque f est croissante, soit elle est majorée et converge en 1, soit elle ne l'est pas et diverge vers $+\infty$ en 1.
Supposons f majorée par une constante M.
$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [\,0\,;1\,[, \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{M}$.
En passant à la limite lorsque $x \to 1^-$: $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{M}$. Ceci est impossible car la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, vers $+\infty$ car son terme général est positif.
Donc f n'est pas majorée, donc diverge vers $+\infty$ en 1.

Exercice 289 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{ch}(n)x^n$.

2. Déterminer sa somme sur le domaine de convergence.

Solution (**Ex.289** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

1. $\mathrm{ch}(n) = \dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$, donc $\dfrac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$. On obtient finalement $\mathrm{R} = 1/\mathrm{e}$.

2. Pour $|x| < 1/\mathrm{e}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}x)^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}x}$,
pour $|x| < \mathrm{e}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-1}x)^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}x}$,
et par combinaison linéaire, pour $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n)x^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}x} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}x}\right)$.

Exercice 290 *Somme d'une série entière et étude aux bords*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1+(n-2)!}{n!} x^n.$$

2. On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous-réserve de convergence,

$$\mathrm{S}(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+(n-2)!}{n!}x^n.$$

a) Déterminer $\mathrm{S}(x)$ pour $x\in\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}\,[$.
b) Montrer que $\mathrm{S}(\mathrm{R})$ est définie, en précisant sa valeur, et que S est continue sur $[\,0\,;\,\mathrm{R}\,]$.
c) Montrer que $\mathrm{S}(-\mathrm{R})$ est définie et que S est continue sur $[\,-\mathrm{R}\,;\,0\,]$.

Solution (**Ex.290** – *Somme d'une série entière et étude aux bords*)

1. $a_n=\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{n(n-1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}$ donc pour $x\neq 0$,
$\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}|x|$.
Par le théorème de D'Alembert, la série converge absolument si $|x|<1$ et diverge grossièrement si $|x|>1$, donc $\mathrm{R}=1$.

2. a) Pour $|x|<1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=\mathrm{e}^x-1-x$.
De plus, $\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$ donc
$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n=x\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$ (ces deux sommes existent !)
$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n=x(-\ln(1-x))-(-\ln(1-x)-x)=(1-x)\ln(1-x)+x.$
Donc pour $|x|<1$,
$\mathrm{S}(x)=\mathrm{e}^x+(1-x)\ln(1-x)-1$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}-2$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$ par télescopage. Donc $\mathrm{S}(1)$ existe et vaut $\mathrm{e}-1$.
S est continue sur $[\,0\,;\,1\,[$ car somme d'une série entière (ou par l'expression précédent). De plus, $(1-x)\ln(1-x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ donc $\mathrm{S}(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\mathrm{e}-1=\mathrm{S}(1)$, donc S est continue sur $[\,0\,;\,1\,]$.

c) Pour $x=-1$, la série est absolument convergente car $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}$.
On va montrer que S est continue sur $[\,-1\,;\,0\,]$ pour trouver sa valeur en -1.
Soit $x\in[\,-1\,;\,0\,]$. $a_nx^n=a_n\,|x|^n\,(-1)^n$ avec $\left(a_n\,|x|^n\right)_n$ décroissante (car (a_n) et $(|x|^n)$ sont décroissantes) de limite nulle (car $a_n\,|x|^n\leqslant a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$).
En appliquant le théorème des séries alternées :

$$|\mathrm{R_N}(x)| = \left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \left|a_{\mathrm{N}+1}\,|x|^{\mathrm{N}+1}\right| \leqslant a_{\mathrm{N}+1}.$$

Ceci pour tout $x \in [\,-1\,;\,0\,]$, donc $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[\,-1\,;\,0\,]} \leqslant a_{\mathrm{N}+1}$.

Comme $a_{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$, $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[\,-1\,;\,0\,]} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ par encadrement.

La convergence de la série est uniforme sur $[\,-1\,;\,0\,]$ et chaque $x \mapsto a_n x^n$ est continue, donc S est continue sur $[\,-1\,;\,0\,]$.

Donc $\mathrm{S}(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^{-1} + 2\ln(2) - 1$.

Exercice 291 *Cyclicité d'ordre 4*

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \mathrm{R}$ la somme

$$\mathrm{S}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

dont le coefficient a_n vaut 1, si $n = 4k$ ou $n = 4k+1$, et vaut -1 si $n = 4k+2$ ou $4k+3$.

Que se passe-t-il si $|z| = \mathrm{R}$?

Solution (**Ex.291** – *Cyclicité d'ordre 4*)

Comme $|a_n| = 1$, pour $z \neq 0$, on a :

$\left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$.

Par le théorème de D'Alembert, la série converge absolument si $|z| < 1$ et diverge grossièrement si $|z| > 1$, donc $\mathrm{R} = 1$.

Soit z tel que $|z| < 1$, donc $\left|z^4\right| < 1$.

$\mathrm{S}(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z^{4n}+z^{4n+1}-z^{4n+2}-z^{4n+3}) = (1+z-z^2-z^3)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z^4)^n = \dfrac{1+z-z^2-z^3}{1-z^4} = \dfrac{(1-z^2)(1+z)}{(1-z^2)(1+z^2)} = \dfrac{1+z}{1+z^2}$.

Pour $|z| = 1$, $|a_n z^n| = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0 et il y a divergence grossière de la série.

Exercice 292 *Sommation d'une série entière*

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < \mathrm{R}$ la somme

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} + (-2)^n\right) x^n.$$

Que se passe-t-il si $|x| = \mathrm{R}$?

Solution (**Ex.292** – *Sommation d'une série entière*)
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (-2x)^n$ est la somme de deux séries entières de rayon respectif 1 et $1/2$ ($|-2x| < 1 \Leftrightarrow x < 1/2$), donc S est une série entière de rayon $\min(1, 1/2) = 1/2$.
De plus, pour $|x| < 1/2$,
$\mathrm{S}(x) = -\ln(1-x) + \left(\dfrac{1}{1-(-2x)} - 1\right) = -\ln(1-x) - \dfrac{2x}{1+2x}$.
Enfin, pour $|x| = 1$, $\left|\left(\dfrac{1}{n} + (-2)^n\right) x^n\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc le terme général $\left(\dfrac{1}{n} + (-2)^n\right) x^n$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

Exercice 293 *Sommation d'une série entière*
Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < \mathrm{R}$ la somme

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n.$$

Que se passe-t-il si $|x| = \mathrm{R}$?

Solution (**Ex.293** – *Sommation d'une série entière*)
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2n) x^{2n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n (x^2)^n$ est une série entière de rayon 1 car $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n x^n$ est une série entière de rayon 1 (et : $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$).
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ est une série entière de rayon 1.
Donc S est de rayon au moins 1.
De plus, pour $\rho = 1$, $(n^{(-1)^n} \rho^n)_n$ n'est pas bornée : $(2n)^{(-1)^{2n}} \rho^{2n} = 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Donc $\mathrm{R} \leqslant 1$.
Finalement, $\mathrm{R} = 1$.
Soit x tel que $|x| < 1$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$,
d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2n) x^{2n} = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ est la partie impaire de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{2}\big(-\ln(1-x)+\ln(1+x)\big) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On peut aussi partir de

$\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$ dont la primitive nulle en 0 est : $\displaystyle\frac{1}{2}\big(-\ln(1-x)+\ln(1+x)\big) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Finalement : $\displaystyle \mathrm{S}(x) = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 294 *En commençant par une dérivation*

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

et préciser le rayon de convergence R.

Indication : on pourra commencer par dériver f...

Solution (**Ex.294** – *En commençant par une dérivation*)

Commençons par dériver f qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes classiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2} = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Or par la série géométrique de rayon 1, et comme $\left|-x^4\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, on peut écrire, toujours avec un rayon 1 :

$\displaystyle\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$.

Donc pour tout $x \in \,]-1\,;1\,[$, $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} x^{4n+1}$.

En primitivant, ce qui conserve le rayon,

$\forall x \in \,]-1\,;1\,[$,

$\displaystyle f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{4n+2} x^{4n+2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{4n+1}$.

Exercice 295 *En commençant par une primitivation*
Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$$

et préciser le rayon de convergence R.
Indication : on pourra commencer par primitiver f...

Solution (**Ex.295** – *En commençant par une primitivation*)
Notons que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$, donc le rayon ne pourra excéder 3/2.
Commençons par primitiver f (une primitive suffit) : $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$\mathrm{F}(x) = \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{-1}{6} \times \dfrac{1}{1+2x/3}$.
En utilisant la série géométrique, avec $|2x/3| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3/2$,
$\forall x \in \left]-3/2\,;\,3/2\right[$, $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-1}{6}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{3^{n+1}}x^n$.
Alors, par dérivation terme à terme qui conserve le rayon,
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{3^{n+1}}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n (n+1)}{3^{n+2}}x^n$ avec un rayon de convergence $\mathrm{R} = \dfrac{3}{2}$.
Méthode alternative :
on peut partir du développement de $\dfrac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum \ldots$.

Exercice 296 *En formant une équation différentielle*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.
Indication : on pourra commencer par former une équation différentielle dont f est solution...

Solution (**Ex.296** – *En formant une équation différentielle*)

1. $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à $-x^2$.
$x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à x^2, donc sa primitive nulle en 0 aussi.

Donc f est développable en série entière de rayon infini comme produit de série qui le sont.

2. f est par conséquent $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Commençons par dériver f.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = -2xf(x) + 1.$
Utilisons cette équation différentielle pour développer f.
J'écris :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = -2x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = -2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = -2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 1$$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul et, avec la valeur de f en 0,

$$\begin{cases} a_0 = f(0) = 0, \\ a_1 = 1, \\ \forall n \geqslant 1, (n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1}. \end{cases}$$

Ceci détermine la suite (a_n) de façon unique :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2}a_n.$$

On a immédiatement :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{-2}{2n+1}a_{2n-1} = \frac{(-2)^2}{(2n+1)(2n-1)}a_{2n-3} = \dots$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1}a_1 = \frac{(-2)^n 2^n (n!)}{(2n+1)!}$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$

$\boxed{\textbf{Exercice 297}}$ *DSE en passant par une équation différentielle*
Soit $f : x \mapsto \mathrm{sh}\big(\mathrm{Arcsin}(x)\big)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Quelle est la classe de dérivabilité de f sur cet ensemble ?

2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0.$$

3. En déduire que f est développable en série entière, en exprimant les coefficients du développement à l'aide de produits et en précisant le rayon du développement obtenu.

Solution (**Ex.297** – *DSE en passant par une équation différentielle*)

1. f est définie sur $[-1\,;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ par composition car Arcsin définie sur $[-1\,;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et sh est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $]-1\,;1[$, $f' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{ch}(\mathrm{Arcsin}(x))$, $f'' : x \mapsto \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{ch}(\mathrm{Arcsin}(x)) + \dfrac{1}{1-x^2}f(x)$, et effectivement : $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0$.

3. Supposons que f soit développable en série entière de rayon de convergence non nul R et écrivons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient la relation : $\forall n, a_{n+2} = \dfrac{n^2+1}{(n+2)(n+1)}a_{2n}$,

avec les conditions initiales : $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = 1$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = 0$ et $\quad a_{2n+1} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left((2k-1)^2+1\right)}{(2n+1)!}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 298}}$ *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$.

Solution (**Ex.298** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

$\mathrm{R} = 1$.

$$\forall x \in\,]-1\,;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 299 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Solution (**Ex.299** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)
$\mathrm{R} = 1$.
$\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$, on primitive : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,
on divise par x pour $x \neq 0$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{si } x \in \left]-1\,;1\right[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 300 *Développement grâce à une équation différentielle*

Soit $f : \left]-1\,;1\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer la classe de dérivabilité de f.

2. Justifier que Arccos, puis f, sont développables en séries entières en 0 de rayon de convergence 1.

3. Former une équation différentielle du premier ordre à coefficients polynomiaux dont f solution.

4. En déduire le développement en série entière de f autour de 0. Faute de mieux et après avoir cherché, on pourra vérifier les formules suivantes par récurrence :
$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } a_{2n+1} = -\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Solution (**Ex.300** – *Développement grâce à une équation différentielle*)

1. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$ par composition puisque $x \mapsto 1-x^2$ prend ses valeurs dans $\left]0\,;1\right]$. Donc f est $\mathcal{C}^\infty$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

2. On a : $\forall x \in \left]-1\,;1\right[,\quad \operatorname{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-1/2}$. Or on sait que $x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ est développable en un série entière de rayon 1. Par substitution, $\operatorname{Arccos}'(x)$ est développable en série entière de rayon $\sqrt{1} = 1$. Par primitivation, Arccos est développable en série entière de rayon 1. Par produit des deux fonctions $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$ et $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$ développables en série entière de rayon 1, f est développable en série entière de rayon 1.

3. $\forall x \in \left]-1\,;1\right[,$

$f'(x) = \dfrac{-1 + \dfrac{x\mathrm{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-1+xf(x)}{1-x^2}$ donc f est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) + 1 = 0 \quad (\heartsuit).$$

4. Écrivons le développement en série entière de f :

$$\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors :

$(1-x^2)f'(x) - xf(x) + 1 = (1-x^2)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 1 =$

$a_1 + 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1}\right)x^n = a_1+1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} - na_{n-1}\right)x$

Par $(\heartsuit)$ et comme $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit :

$a_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $a_1 + 1 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0$, *i.e.*

$a_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $a_1 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_{n-1}$

d'où :

$a_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

$a_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \dfrac{2}{3} \times (-1) = -\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 301 *Calcul d'une somme de série*

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$$

de deux façons.

1. Justifier l'existence de S.

2. *Première méthode*

a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}.$$

b) Conclure.

3. *Seconde méthode*

a) Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{n}x^n.$$

b) Déterminer S en séparant les termes de rangs pairs et les termes de rangs impaires de cette somme.

Solution (**Ex.301** – *Calcul d'une somme de série*)

1. Par exemple, $\dfrac{1}{(2n+1)4^n} = o\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$, t.g. d'une série géométrique convergente.

2. $\mathrm{RC} = 1$, $\forall x \in \,]-1\,;\,1\,[$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

Par primitivation de série entière :

$\forall x \in \,]-1\,;\,1\,[$, $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$,

donc $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in \,]-1\,;\,0\,[\,\cup\,]\,0\,;\,1\,[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Pris en $x = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{S} = \ln(3)$.

3. Pour tout $x \in \,]-1\,;\,1\,[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n}x^n + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n}x^n$ conduit à

$-\ln(1-x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}$ d'où en $x = 1/2$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$, donc

$\mathrm{S} = 2\ln(2) + ln(3) - ln(4) = ln(3)$.

Exercice 302 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

Rayon de convergence et expression fonctionnelle de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}x^n$.

Solution (**Ex.302** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

On note, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

$\forall x \neq 0, \quad \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$, donc par le critère de D'Alembert, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$, donc $\mathrm{R} = 1$.

Méthode la plus expéditive –

$\forall x \in \left]-1\,;1\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)-1}{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^n = \frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^{n-1},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in \left]-1\,;0\right[\cup \left]0\,;1\right[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Et si l'on veut voir dans nx^n une dérivée –

$\forall x \in \left]-1\,;1\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n+1}\right)' = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}\right)' = xg'(x) \text{ où pour } x \neq 0 :$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\ln(1-x)}{x}.$$

Alors $g'(x) = \dfrac{1}{x(1-x)} + \dfrac{\ln(1-x)}{x^2}$ et $xg'(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x}$... gagné !

Exercice 303 *Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série*

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution (**Ex.303** – *Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série*)

Notons $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Comme $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$, f est continue en 0... et f est intégrable sur $[0\,;1]$.

$\forall t \in \left[0\,;1\right[$, $\dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}t^n$ et en primitivant terme à terme :

$\forall x \in \left[0\,;1\right[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}x^n$.

Quand $x \to 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$.

Reste à établir que lorsque $x \to 1$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}x^n \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = g(1)$, i.e. g est

continue en 1.
Or $\left\|x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}\right\|_{\infty,[\,0\,;\,1\,]} = \dfrac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions définissant g converge normalement donc uniformément, et comme chaque $x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$ est continue, donc g est continue sur $[\,0\,;\,1\,]$. Donc g est continue en 1. Gagné.

Chapitre 12

Intégrales à paramètre

Exercice 304 *Étude d'une fonction*

Soit : $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3} dt.$$

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donner sa parité.

2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, montrer que $2f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t + 1}$ puis calculer $f(0)$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.304** – *Étude d'une fonction*)

1. Soit $g : \mathbb{R} \times]\,0\,; +\infty\,] \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$.
- Pour $t \in [\,0\,; +\infty\,[$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [\,0\,; +\infty\,[\,, |g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^3} \overset{\text{déf.}}{=} \varphi(t)$.
- φ est intégrable $[\,0\,; +\infty\,[$ car continue par morceaux avec $\forall t \in [\,1\,; +\infty\,[\,, 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Donc f est définie ($f(x)$ est absolument convergente pour tout x) et continue sur tout $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$ car $g(-x, \bullet) = g(x, \bullet)$, donc f est paire.

2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, montrer que $2f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t + 1}$ puis calculer $f(0)$.
Le changement $t \mapsto 1/t$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]\,0\,;\,+\infty\,[$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ donc admissible.
$f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t \overset{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{u^3+1} \times \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^3+1}\mathrm{d}u$. Donc :
$2f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^3+1}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-1/2)\right)^2+1}$
$\overset{u=\frac{2}{\sqrt{3}}(t-1/2)}{=} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}(u)\right]_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$
D'où : $f(0) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [\,0\,;\,+\infty\,[, \quad 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2 t}}{1+t^3} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2 t}$, donc par croissance de l'intégrale,
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$.
Par encadrement : $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

4. $\forall 0 \leqslant x \leqslant y, \quad \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2 t}}{1+t^3} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-y^2 t}}{1+t^3}$ donc par croissance de l'intégrale, f est décroissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, et par parité f est croissante sur $]\,-\infty\,;\,0\,]$.

Exercice 305 *Expression explicite d'une fonction intégrale*

Soit : $$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Donner une expression intégrale de f', puis la calculer.

3. En déduire une expression simple de f (*i.e.* sans intégrale).

Solution (**Ex.305** – *Expression explicite d'une fonction intégrale*)

1. Soit $g : \mathbb{R} \times]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}$.
$f(0)$ existe et vaut 0.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, prolongeable par continuité en 0 car $g(x,t) \underset{t \to 0}{\sim} x$, et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ car $t^2 g(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
Donc $f(x)$ existe.

f est définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour $t \in]\,0\,;+\infty\,[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}.$$
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]\,0\,;+\infty\,[, \quad \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t},$

or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. En dérivant sous l'intégrale (valide d'après 1.) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f'(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(ix-1)t}\mathrm{d}t\right) = \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{ix-1}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Comme $f(0) = 0 = \mathrm{Arctan}(0)$ et $f' = \mathrm{Arctan}'$, on a $f = \mathrm{Arctan}$.

Exercice 306 *Un calcul de l'intégrale de Gauss*

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :
$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

1. Justifier que f de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer f'.

2. Déterminer $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que $x \mapsto g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire la valeur de l'*intégrale de Gauss* : $\mathrm{G} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Solution (**Ex.306** – *Un calcul de l'intégrale de Gauss*)

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :
$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

1. Soit $h : \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$.

À $t \in [\,0\,;1\,]$ fixé, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Comme aucune intégrale n'est impropre car nous travaillons avec des fonctions continues (de t) sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc bornées, le théorème de transfert de la classe s'applique.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2} \mathrm{d}t.$$

2. • $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$

• Soit $x \geqslant 0$. $\forall t \in [\,0\,;\,1\,]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, donc par croissance de l'intégrale $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Soit $j : x \mapsto g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^2$.

Par composition, j est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$j'(x) = 2xf'(x^2) - 2\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = 2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2} \mathrm{d}t - 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$

Posons $u = xt$ dans la première intégrale :

$j'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u - 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = 0$

Donc j est constante sur $\mathbb{R}$.

4. $j(x) \xrightarrow[x \to 0]{} g(0) = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$, donc j est constante égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

Or $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} j(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$, et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 307 *Fonction Gamma d'Euler*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

On appelle *fonction gamma d'Euler* la fonction définie par :

$$\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad \Gamma(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et exprimer ses dérivées successives.

3. a) Montrer que : $\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

4. a) Déterminer la valeur de $\Gamma(1/2)$ à l'aide de l'intégrale de Gauss (*cf.* exercice *Un calcul de l'intégrale de Gauss*).

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\Gamma\big(n + \dfrac{1}{2}\big)$ à l'aide de puissances et de factorielles.

5. Déduire de 3.a) un équivalent de $\Gamma(x)$ en lorsque x tend vers 0

Solution (**Ex.307** – *Fonction Gamma d'Euler*)

1. Soit $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R} \times \,]\,0\,;\,+\infty\,[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et positive sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$.
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x-1 > -1$, i.e. $x > 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
De plus : $t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $t^{x+1} = o\left(\mathrm{e}^t\right)$, donc $f(x,t) = o\left(1/t^2\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ converge.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe si, et seulement si, $x > 0$.

2. Pour $t \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ avec

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

- Soit $x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ car
(i) prenons $\alpha \in \,]\,1-x\,;\,1\,[$. $t^\alpha\big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \big(\ln(t)\big)^n t^{\alpha+x-1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$,
donc $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, ce qui assure l'intégrabilité sur $]\,0\,;\,1\,]$,
(ii) $t^2\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, ce qui assure l'intégrabilité sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
- Soit $[\,a\,;\,b\,] \subset \,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

$$\forall x \in [\,a\,;\,b\,], \forall t \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \big(\ln(t)\big)^n\big(t^{a-1}+t^{b-1}\big)\mathrm{e}^{-t} \overset{\text{déf.}}{=} \varphi_{[\,a\,;\,b\,]}(t)$$

et $\varphi_{[\,a\,;\,b\,]}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ (par intégrabilité de $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t)$ et $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(b,t)$)
Par domination, Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[\,a\,;\,b\,] \subset \,]\,0\,;\,+\infty\,[$, donc sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

3. a) Soit $x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$. $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Effectuons une intégration par parties avec : $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et

$$-t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } -t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

$$\Gamma(x+1) = \big[-t^x \mathrm{e}^{-t}\big]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

b) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$, et par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

4. a) L'exercice *Un calcul de l'intégrale de Gauss* donne

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \overset{u=t^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) \text{ donc } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

b) En itérant la formule de 3.a),

$$\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big) = \big(n-\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big) = \frac{2n-1}{2}\big(n-\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{3}{2}\big)$$

$$\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big) = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2}\big(n-\frac{5}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{5}{2}\big) = \dots$$

$$\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big) = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2^n}\Gamma(1/2) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}$$

5. $\forall x > 0, \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, or $\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \Gamma(1) = 1$ par continuité de Γ en 1. Donc

$$\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Exercice 308 *Recherche de limites et d'équivalents*

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. Étudier les variations de f.

3. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

4. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

5. a) Justifier : $\forall t \in [\,0\,;\,\pi/2\,], \quad 1 - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1$.

b) En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0.

Solution (**Ex.308** – *Recherche de limites et d'équivalents*)

1. Pour $x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$, $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ donc $f(x)$ existe.

Remarque : $\dfrac{\cos t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ montre que $f(0)$ n'existe pas...

Soit $g :]\,0\,;\,+\infty\,[\,\times\,[\,0\,;\,\pi/2\,] \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{\cos t}{t+x}$.

- Pour $x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$.
- Pour $t \in [\,0\,;\,\pi/2\,]$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

- Soit $[\,a\,;\,b\,] \subset \mathrm{I}$.

$$\forall x \in [\,a\,;\,b\,]\,, \forall t \in [\,0\,;\,\pi/2\,]\,, |g(x,t)| \leqslant \frac{1}{t+a} \overset{\text{déf.}}{=} \varphi_{[\,a\,;\,b\,]}(t).$$

- $\varphi_{[\,a\,;\,b\,]}$ est intégrable $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ car continue.

Donc f est continue sur tout $[\,a\,;\,b\,] \subset \,]\,0\,;\,+\infty\,[$, donc continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. Pour $x \leqslant y$, $\forall t \in [\,0\,;\,\pi/2\,]\,, g(x,t) \geqslant g(y,t)$. Par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$. Donc f est décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
Remarque : on peut étudier la dérivabilité de f puis le signe de f' mais c'est bien lourd...

3. *Remarque :* la variation de f assure l'existence des limites de f en 0 et en $+\infty$.

- $\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, 0 \leqslant \dfrac{\cos t}{t+x} \leqslant \dfrac{1}{t+x}$,

donc par croissance de l'intégrale $0 \leqslant f(x) \leqslant \ln \dfrac{x+\pi/2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,
donc par encadrement : $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

- Comme g est positive, $\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\cos t}{t+x}\mathrm{d}t$.

Et par croissance de l'intégrale,
$\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\cos t}{t+x}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{t+x}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\ln x + \pi/3x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$
Donc par minoration : $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

4. De $\dfrac{1}{x+\pi/2} \leqslant \dfrac{1}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ on tire $\dfrac{1}{x+\pi/2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\pi/2} \cos t\mathrm{d}t$
donc $\dfrac{x}{x+\pi/2} \leqslant xf(x) \leqslant 1$ donc par encadrement $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$
Ainsi : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

5. a) La majoration est claire.
La formule de Taylor avec reste intégrale pour cos à l'ordre 2 en 0 donne :
$\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \displaystyle\int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}(-\cos u)\mathrm{d}u$
or $\displaystyle\int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}(-\cos u)\mathrm{d}u \leqslant 0$ pour $t \in [\,0\,;\,\pi/2\,]$.
D'où : $\forall t \in [\,0\,;\,\pi/2\,]\,, \quad 1 - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1.$

b) Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{x+t}\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t = \ln\frac{x+\pi/2}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x,$

et $0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{x+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} t\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$ donc $\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{x+t}\mathrm{d}t = o\left(\ln(x)\right)$,

donc $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{x+t}\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

En divisant l'encadrement de $f(x)$ par $-\ln(x)$, on obtient $\frac{f(x)}{-\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Donc : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

$\boxed{\textbf{Exercice 309}}$ *Exemple de fonction indéfiniment dérivable*

On pose, sous réserve d'existence, $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathrm{F}^{(n)}(0)$?

Solution (**Ex.309** – *Exemple de fonction indéfiniment dérivable*)
On pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\mathrm{d}t.$$

1. Soit $f : [\,0\,;\,+\infty\,[^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}$.

Soit $x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$. $\forall t \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,, |f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge. Donc l'intégrale $\mathrm{F}(x)$ converge : F est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. Soit $t \in [\,0\,;\,+\infty\,[$. $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et on vérifie par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}} t^n \mathrm{e}^{-t}.$$

$x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$,

$t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$,

et : $\quad \forall (x,t) \in [\,0\,;\,+\infty\,[^2, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant t^n \mathrm{e}^{-t} \overset{\text{déf.}}{=} \varphi_n(t)$

où φ_n est continue par morceaux et intégrable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ car $t^2\varphi_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (donc $\varphi_n(t) = o\left(1/t^2\right)$).

Par conséquent, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, et on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$,

$$\mathrm{F}^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\mathrm{d}t = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+tx)^{n+1}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

3. $\mathrm{F}^{(n)}(0) = (-1)^n n! \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (-1)^n (n!)^2$

... l'intégrale se calculant par récurrence, ou en utilisant $n! = \Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ (à limite extérieure du programme).

Exercice 310 *Un calcul de l'intégrale de Dirichlet*

Soit $f : [\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ définie sous réserve d'existence par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est définie et continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. Déterminer sa limite en $+\infty$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et calculer f''.

4. En déduire f sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, puis $f(0)$.

5. En déduire la valeur de l'*intégrale de Dirichlet* : $\mathrm{D} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Solution (**Ex.310** – *Un calcul de l'intégrale de Dirichlet*)

1. Soit $g : [\,0\,;\,+\infty\,[\times]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ et $h :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$.

- Pour $x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
- Pour $t \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
- $\forall (x,t) \in [\,0\,;\,+\infty\,[\times]\,0\,;\,+\infty\,[, \quad |g(x,t)| \leqslant h(t)$,

où h est continue par morceaux sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, avec

(i) $\displaystyle\lim_{t\to 0} h(t) = \frac{1}{2}$ car $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, donc $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ converge (faussement impropre),

(ii) $\forall t \geqslant 1, 0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ converge,

donc h est continue par morceaux et intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Ainsi, f est définie et continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$, il existe T tel que $\forall t \geqslant \mathrm{T}, \quad h(t) \leqslant 1$.

Comme h est continue sur $]\,0\,;\,\mathrm{T}\,]$ et est prolongeable en une fonction continue sur $[\,0\,;\,\mathrm{T}\,]$, h est majorée sur $[\,0\,;\,\mathrm{T}\,]$.

Donc h est majorée sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \left]0\,;+\infty\right[, 0 \leqslant h(t) \leqslant \mathrm{M}$.
$\forall x \in \left[0\,;+\infty\right[, \forall t \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad 0 \leqslant g(x,t) \leqslant \mathrm{M}\mathrm{e}^{-xt}$.
Par croissance de l'intégrale, $\forall x \in \left[0\,;+\infty\right[, 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{x}$.
Par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. Pour $t \in \left]0\,;+\infty\right[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
Regardons les dérivées par rapport à x de g :

- $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{\cos t - 1}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| = \dfrac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-xt} \overset{\text{déf.}}{=} h_1(t)$

h_1 est prolongeable par continuité en 0 (limite nulle) et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc continue et intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

- $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 2\mathrm{e}^{-xt}$

Plaçons-nous sur $\left[a\,;+\infty\right[\subset \left]0\,;+\infty\right[$ afin de majorer par une quantité indépendante de x.
$\forall x \in \left[a\,;+\infty\right[, \quad \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 2\mathrm{e}^{-at}$
et $h_2 : t \mapsto 2\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable d'après le cours car $a > 0$.
Par le théorème de dérivation, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $\left[a\,;+\infty\right[\subset \left]0\,;+\infty\right[$.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et f'' se calcule par dérivation sous l'intégrale.
Soit $x \in \left]0\,;+\infty\right[$.

$$f''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty}\cos t\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-x+i)t}\mathrm{d}t\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

4. Pour $x \in \left]0\,;+\infty\right[$,

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + k \xrightarrow[x\to+\infty]{} k.$$

Or on démontre comme en 2. que f' est tend vers 0 en $+\infty$. Donc $k = 0$ et $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
En primitivant à nouveau grâce à des intégrations par parties,

$$f(x) = x\ln x - x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \operatorname{Arctan}(x) + \kappa$$

$$f(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \kappa$$

Déterminons κ grâce à la limite en $+\infty$:
$\ln(x^2+1) = \ln(x^2) + \ln(1+1/x^2) = 2\ln(x) + 1/x^2 + o\left(1/x^2\right)$
D'où : $f(x) = -\dfrac{1}{2x} + o(1/x) - \operatorname{Arctan}(x) + \kappa \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\dfrac{\pi}{2} + \kappa$
Or d'après 2., $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\kappa = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement : $f(x) = x\ln x - \dfrac{x}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2}$.

Comme f est continue en 0, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. $\dfrac{\pi}{2} = f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP.}}{=} \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 311 *Explicitation grâce à une équation différentielle*

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de définition, $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

3. On admet que l'intégrale de Gauβ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ vaut $\sqrt{\pi}$. Déterminer une expression explicite (i.e. sans intégrale) de f.

Solution (**Ex.311** – *Explicitation grâce à une équation différentielle*)

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par parité et car $\varphi(t) = o(\mathrm{e}^{-t})$ en $+\infty$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

① Pour $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

② Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue et dominée par φ.

③ Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

④ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |t|\,\varphi(t)$ or $t \mapsto |t|\,\varphi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, paire et vérifiant $|t|\,\varphi(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

En observant que $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t^2}}{\mathrm{d}t} = -2t\mathrm{e}^{-t^2}$, une intégration par parties s'impose.

$u : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}$ et $v : t \mapsto \sin(xt)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$ car $|u(t)v(t)| \leqslant u(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\dfrac{x}{2}f(x)$. f est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.

3. Les solutions de cette équation homogène sont les fonction $x \mapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-x^2/4}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ arbitraire.
L'énoncé donne la condition initiale $f(0) = \sqrt{\pi}$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

Exercice 312 *Recherche d'un équivalent*

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs de limite $+\infty$.
Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n f(x_n) = \frac{1}{2}$.

3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Solution (**Ex.312** – *Recherche d'un équivalent*)

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Soit $g :]\,0\,;+\infty\,[^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$.
L'énoncé peut laisser penser qu'on va rencontrer une difficulté en 0. Soit $a > 0$. Plaçons-nous sur $[\,a\,;+\infty\,[$.

① Pour $t \in]\,0\,;+\infty\,[$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[\,a\,;+\infty\,[$.

② Pour $x \in [\,a\,;+\infty\,[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

③ $\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times]\,0\,;+\infty\,[, \quad |g(x,t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{a}$ or $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Par le théorème de continuité, f est définie et continue sur $[\,a\,;+\infty\,[$.
Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, f est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs de limite $+\infty$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto x_n g(x_n,t) = \dfrac{x_n\mathrm{e}^{-2t}}{x_n+t}$.
Appliquons le théorème de convergence dominée.

① Pour tout $t \in]\,0\,;+\infty\,[$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-2t}$ car $\dfrac{x_n}{x_n+t} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

② $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

③ $\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;+\infty\,[$, $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-2t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est une fonction intégrable de référence sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Par le théorème de convergence dominée, pour toute n f_n est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

3. Pour toute suite (x_n) de limite $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n f(x_n) = \dfrac{1}{2}$. Par caractérisation séquentielle de la limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

Exercice 313 *Calcul d'une intégrale à deux paramètres*

1. Soit $0 < \alpha \leqslant \beta$. Montrer que $\mathrm{I}(\alpha,\beta) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\mathrm{d}t$ existe.

2. Dans cette question, on se propose de calculer $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ à l'aide d'une fonction définie par une intégrale.

On pose, pour tout $x \in [\,1\,;+\infty\,[$, $f(x) = \mathrm{I}(1,x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $[\,1\,;+\infty\,[$.

b) En déduire une expression explicite de f, puis de $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$.

Solution (**Ex.313** – *Calcul d'une intégrale à deux paramètres*)

1. Soit $0 < \alpha \leqslant \beta$.

- $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
- Au voisinage de 0, $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t} = \dfrac{1 - \alpha t + o(t) - 1 + \beta t - o(t)}{t} = \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow[t\to 0]{} \beta - \alpha$ donc $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ est faussement impropre donc convergente en 0.
- $t^2 \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t} = o\left(1/t^2\right)$ donc $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ converge en $+\infty$ par domination.

Donc pour $0 < \alpha \leqslant \beta$, $\mathrm{I}(\alpha,\beta) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\mathrm{d}t$ existe.

2. On pose, pour tout $x \in [\,1\,;+\infty\,[$, $f(x) = \mathrm{I}(1,x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$.

a) Soit $g : [\,1\,;+\infty\,[\times]\,0\,;+\infty\,[\,, (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}$.

C'est parti pour la dérivation $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale...

① Pour $t \in]\,0\,;+\infty\,[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

② Pour $x \in [1\,;+\infty[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue intégrable sur $]0\,;+\infty[$ par la première question (c'est $\mathrm{I}(x,1)$).

③ Pour $x \in [1\,;+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x} g(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}$ est continue (et même déjà intégrable).

④ $\forall (x,t) \in [1\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x} g(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable.

Par le théorème de dérivation, f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et : $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

b) En primitivant, et en observant que $f(1) = 0$, on a : $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) = \ln(x)$.
Soit $0 < \alpha \leqslant \beta$. Posons $u = \alpha t$, changement $\mathcal{C}^1$ strictement monotone dans $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$.
$\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\mathrm{d}t \overset{u=\alpha t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-\beta u/\alpha}}{u}\mathrm{d}u = f(\beta/\alpha) = \ln\frac{\beta}{\alpha} = \ln\beta - \ln\alpha$.

Exercice 314 *Étude d'une fonction*

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie, paire et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos y}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$. À l'aide du changement de variable $u = xt$, déterminer un équivalent de f en $\pm\infty$.

Solution (**Ex.314** – *Étude d'une fonction*)

1. $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$.
Commençons par remarquer que, si $f(x)$ existe, alors $f(-x)$ existe et vaut $f(x)$: f est paire sur son domaine de définition qui est forcément symétrique par rapport à 0.

- À t fixé, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- À x fixé, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et intégrable car prolongeable par continuité en 0 ($g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} x^2$) - d'où intégrale faussement impropre en 0 -, et $g(x,t) = o\left(1/t^2\right)$ en $+\infty$.
- À x fixé, $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- Grâce à la majoration usuelle : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leqslant |u|$, on a :

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \left|\dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leqslant |x|\,\mathrm{e}^{-t}.$

Plaçons nous sur $[\,-a\,;\,a\,]$ avec $a > 0$ quelconque. Alors :

$\forall (x,t) \in [\,-a\,;\,a\,] \times]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \left|\dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leqslant a\mathrm{e}^{-t}.$

Or $t \mapsto a\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable qur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Donc f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $[\,-a\,;\,a\,]$, ceci pour tout $a > 0$.

Donc f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Le changement $u = xt$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif tant que $x \neq 0$.

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[\,, f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \overset{u=xt}{=} x\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{e}^{-u/x}\mathrm{d}u$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de $[\,1\,;\,+\infty\,[$ tendant vers $+\infty$.

Soit, pour tout n, $h_n : t \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{e}^{-u/x_n}$. On a :

- pour tout n, h_n continue sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$,
- $h_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} h : u \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$,
- De l'inégalité classique : $\forall u \in \mathbb{R}, |1 - \cos u| \leqslant u^2$, on tire :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in]\,0\,;\,+\infty\,[\,, |h_n(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-u}$ (car $x_n \geqslant 1$)

avec $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ continue et intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u$,

i.e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} f(x_n) = \frac{\pi}{2}$.

Par caractérisation séquentielle de la limite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Autrement dit : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}x$. Et par parité, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{\pi}{2}x$.

Exercice 315 *Une famille d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, soit $\mathrm{I}_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Montrer que I_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3}$.

Solution (**Ex.315** – *Une famille d'intégrales*)

1. Soit deux réels a et A tels que $< a <$ A.

Soit $f_n : [\,a\,;\,\mathrm{A}\,] \times [\,0\,;\,+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

- Pour $t \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $x \mapsto f_n(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,\mathrm{A}\,]$.

- Pour $x \in [\,a\,;\,\mathrm{A}\,]$, $t \mapsto f_n(x,t)$ est continue et intégrable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ car $f_n(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ où $2n > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable et ces deux fonctions sont positives.
- Pour $x \in [\,a\,;\,\mathrm{A}\,]$, $t \mapsto \dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
- $\forall (x,t) \in [\,a\,;\,\mathrm{A}\,] \times [\,0\,;\,+\infty\,[$, $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2n\mathrm{A}}{(t^2+a^2)^{n+1}}$,

or $\varphi : t \mapsto \dfrac{2n\mathrm{A}}{(t^2+a^2)^{n+1}} = 2n\mathrm{A} f_{n+1}(a,t)$ est continue et intégrable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ d'après le second point.

Donc I_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,\mathrm{A}\,]$, et ceci pour tout $[\,a\,;\,\mathrm{A}\,] \subset \,]\,0\,;\,+\infty\,[$, donc I_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \mathrm{I}'_n(x) = -2nx\mathrm{I}_{n+1}(x)$.

Pour $x > 0$, $\mathrm{I}_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \left[\frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$.

Puis $\mathrm{I}_2(x) = -\dfrac{1}{2x}\mathrm{I}'_1(x) = \dfrac{\pi}{4x^3}$, puis $\mathrm{I}_3(x) = -\dfrac{1}{4x}\mathrm{I}'_2(x) = \dfrac{3\pi}{16x^5}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \mathrm{I}_3(1) = \frac{3\pi}{16}$.

Exercice 316 *Étude d'une fonction*

Soit, sous réserve d'existence, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]\,-1\,;\,+\infty\,[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,-1\,;\,+\infty\,[$.

3. Montrer que $h : \,]\,0\,;\,1\,[\, \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. En déduire $f(x)$ pour tout $x > -1$.

Solution (**Ex.316** – *Étude d'une fonction*)

1. Soit $g : \,]\,-1\,;\,+\infty\,[\, \times \,]\,0\,;\,1\,[\, \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t} t^x$.

Soit $x \in \,]\,-1\,;\,+\infty\,[$. $t \mapsto g(x,t)$ est continue et positive sur $]\,0\,;\,1\,[$.

De plus, $g(x,t) \underset{t\to1}{\sim} 1$ donc l'intégrale définissant $f(x)$ est faussment impropre donc convergente en 1.

Enfin, $g(x,t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{-t^x}{\ln t}$ donc $g(x,t) = o(t^x)$ en 0, donc $g(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$, or $-x < 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^{-x}}$ est intégrable sur $]\,0\,;\,1/2\,]$, donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable

sur $]\,0\,;\,1/2\,]$.
Ceci assure l'existence de $f(x)$.

2. • Pour $t \in]\,0\,;\,1\,[$, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,-1\,;\,+\infty\,[$.
• Pour $x > -1$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]\,0\,;\,1\,[$ (d'après 1)).
• Pour $x > -1$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x$ est continue.
• $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t}\right.$ n'étant pas intégrable sur $]\,0\,;\,1\,[$, on va devoir éviter $-1\,!\,!\,!\left.\right]$
Soit a tel que $-1 < a < 0$.
$\forall (x,t) \in [\,a\,;\,+\infty\,[\times]\,0\,;\,1\,[\,,\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = (1-t)t^x \leqslant t^x \leqslant t^a$
(car $t \in]\,0\,;\,1\,[\Rightarrow \ln(t) < 0 \Rightarrow a\ln(t) \geqslant x\ln(t) \Rightarrow t^a \geqslant t^x$)
or $\varphi : t \mapsto t^a = \dfrac{1}{t^{-a}}$ est intégrable sur $]\,0\,;\,1\,[$ (car $a > -1$ donc $-a < 1$).
Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$, et ceci pour tout $a \in]\,-1\,;\,0\,[$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,-1\,;\,+\infty\,[$.

3. h est continue sur $]\,0\,;\,1\,[$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus : $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $h(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 1$, donc h est prolongeable en fonction continue sur le *segment* $[\,0\,;\,1\,]$, donc h est bornée sur $]\,0\,;\,1\,[$.
Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]\,0\,;\,1\,[\,, |h(t)| \leqslant \mathrm{M}$.
Alors : $\forall x > -1, \forall t \in]\,0\,;\,1\,[\,, |f(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 h(t)t^x \mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |\mathrm{M}t^x|\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{x+1}$.
Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. On a par dérivation sous l'intégrable :
$\forall x > -1, f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x+1} - t^x \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$.
Donc : $\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}, \forall x > -1, f(x) = \ln \dfrac{x+2}{x+1} + \mathrm{K}$
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln \dfrac{x+2}{x+1} = 0$ donc $\mathrm{K} = 0$.
Ainsi : $\forall x > -1, f(x) = \ln \dfrac{x+2}{x+1}$.

Exercice 317 *Fonction de Bessel*

Soit, pour tout $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$, $\mathrm{J}(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

1. Montrer que J est une bijection de$[\,0\,;\,\pi\,]$ sur $[\,\mathrm{J}(\pi)\,;\,\mathrm{J}(0)\,]$.

2. Justifier que l'équation $\mathrm{J}(x) = 0$ admet une unique solution dans $]\,0\,;\,\pi\,[$.
On pourra montrer successivement que :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(\pi) &= 2\int_0^{\pi/2} \cos(\pi\sin(z))\mathrm{d}z = 2\int_0^1 \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{1/2} \cos(\pi u)\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\right)\mathrm{d}u < 0\end{aligned}$$

Solution (**Ex.317** – *Fonction de Bessel*) Soit $\mathrm{I} = [\,0\,;\,\pi\,]$, domaine commun des « x » et des « t ».

1. Soit $g : \mathrm{I}^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \cos(x\sin(t))$.

- Pour $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.
- Pour $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I et intégrable (nous sommes sur un segment !).
- Pour $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t))$ est continue sur I.
- $\forall (x,t) \in \mathrm{I}^2, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$, et $t \mapsto 1$ est évidemment continue et intégrable sur I.

Donc J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :
$\forall x \in \mathrm{I}, \mathrm{J}'(x) = -\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t.$
Pour $x \neq 0$, l'intégrande étant strictement négative sur $]\,0\,;\,\pi\,[$, donc pour tout $x \in\,]\,0\,;\,\pi\,]$, $\mathrm{J}'(x) < 0$.
Ainsi, J est continue strictement décroissante sur I, c'est une bijection de I sur $\mathrm{J(I)} = [\,\mathrm{J}(\pi)\,;\,\mathrm{J}(0)\,]$.

2. • $\mathrm{J}(0) = \pi > 0$.
Il suffit (bon, ce ne sera pas immédiat...) de prouver $\mathrm{J}(\pi) < 0$ pour avoir la conclusion.

• $\mathrm{J}(\pi) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(\pi\sin(t))\mathrm{d}t.$

Je coupe cette intégrale en $\pi/2$ et utilise la symétrie $\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(\pi\sin(t))\mathrm{d}t \overset{z=\pi-t}{=} -\int_{\pi/2}^{0} \cos(\pi\sin(\pi-z))\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \cos(\pi\sin(z))\mathrm{d}z$$

D'où : $\mathrm{J}(\pi) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(\pi\sin(z))\mathrm{d}z$

Puis : $\mathrm{J}(\pi) \overset{y=\sin z}{=} 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$

Recoupons l'intégrale en $1/2$ et rabattons la partie de $1/2$ à 1 sur $[\,0\,;\,1/2\,]$:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \overset{u=1-y}{=} -\int_{1/2}^{0} \frac{\cos(\pi(1-u))}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\mathrm{d}u = \int_0^{1/2} \frac{-\cos(\pi u)}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\mathrm{d}u$$

Ainsi : $\mathrm{J}(\pi) = 2\displaystyle\int_0^{1/2} \cos(\pi u)\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\right)\mathrm{d}u$

Or : $\forall u \in \,]\,0\,;\,1/2\,[$, on a : $1-u \in \,]\,1/2\,;\,1\,[$,

donc $1-u^2 > \dfrac{1}{4} > 1-(1-u)^2$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-u)^2}} < 0$

Comme $\cos(\pi u) > 0$, $\mathrm{J}(\pi) < 0$.

Chapitre 13

Fonctions vectorielles de la variable réelle

Exercice 318 *Rotations et dérivations*

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On choisit l'orientation de $\mathbb{R}^2$ donnée par $\mathcal{B}$.
Soit $r : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), t \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(rot(t))$ où $rot(t)$ désigne la rotation vectorielle d'angle t.

1. Montrer que r est dérivable et expliciter r'.

2. En déduire que r est $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter $r^{(n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (**Ex.318** – *Rotations et dérivations*)

1. $r : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$: les 4 fonctions coordonnées (dans la base canonique que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) sont dérivables donc r est dérivable, et par dérivation par coordonnées :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad r'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} = r\big(t + \frac{\pi}{2}\big).$$

2. Par récurrence immédiate, r est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad r^{(n)}(t) = r\big(t + n\frac{\pi}{2}\big) = \begin{cases} r(t) & \text{si } n \equiv 0 \mod (4), \\ r'(t) & \text{si } n \equiv 1 \mod (4), \\ r^{(2)}(t) = -r(t) & \text{si } n \equiv 2 \mod (4), \\ r^{(3)}(t) = -r'(t) & \text{si } n \equiv 3 \mod (4). \end{cases}$$

Exercice 319 *Prolongement de classe, version vectorielle*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([\,a\,;\,b\,[\,,\mathbb{R}^n)$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,b\,]$ si, et seulement si, f et f' admettent des limites finies en b.

Solution (**Ex.319** – *Prolongement de classe, version vectorielle*)
Cette propriété est vraie pour une fonction $f : [\,a\,;\,b\,[\to \mathbb{R}$. Comme la classe d'une fonction $f : [\,a\,;\,b\,[\to \mathbb{R}^n$ est la plus petite des classe de ses n fonctions coordonnées $f_i : [\,a\,;\,b\,[\to \mathbb{R}$, cette propriété s'étend aux fonctions $f : [\,a\,;\,b\,[\to \mathbb{R}^n$.

Exercice 320 *Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse*
Soit $t \mapsto f(t)$ une fonction vectorielle dérivable définissant un arc paramétré du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On suppose $\mathrm{N} : t \mapsto ||f(t)||$ constante.
Montrer que pour tout t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. *On pourra dériver* N^2*...*

Solution (**Ex.320** – *Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse*) On a $\forall t \in \mathrm{I}$;
$0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,||f(t)||^2 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\langle f(t), f(t)\rangle = \langle f'(t), f(t)\rangle + \langle f(t), f'(t)\rangle = 2\,\langle f'(t), f(t)\rangle$
donc $f'(t) \perp f(t)$.

Exercice 321 *Exemple d'une application à valeur matricielle*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

1. Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)$ est une matrice antisymétrique.
2. Montrer que, si n est impair, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t)$ n'est pas inversible.

Solution (**Ex.321** – *Exemple d'une application à valeur matricielle*)

1. Soit $g : t \mapsto f(t)^{\mathrm{T}} f(t)$.
   - Par bilinéarité du produit matriciel,
   $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = f'(t)^{\mathrm{T}} f(t) + f(t)^{\mathrm{T}} f'(t) = \left(f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)\right)^{\mathrm{T}} + f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)$
   - Mais comme $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $g(t) = \mathrm{I}_n$ donc $g'(t) = 0_n$.

   Donc pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)$ est une matrice antisymétrique.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons $\varepsilon = \det(f(t)) = \pm 1$.
   D'une part :
   $\det(f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)) = \det(f(t)^{\mathrm{T}}) \det(f'(t)) = \varepsilon \det(f'(t))$,
   d'autre part :
   $$\begin{aligned}\det(f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)) &= \det(-f'(t)^{\mathrm{T}} f(t)) = (-1)^n \det(f'(t) \det(f(t)) \\ &= (-1)^n \varepsilon \det(f'(t)) = -\varepsilon \det(f'(t)) \text{ (avec } n \text{ impair !)},\end{aligned}$$
   donc $\det(f'(t)) = 0$ et $f'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 322 *Dérivation, déterminant et trace*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(\mathrm{I}_n + t\mathrm{A})$.

Montrer que φ est dérivable et calculer $\varphi'(0)$. *On pourra utiliser le polynôme caractéristique de* $-\mathrm{A}$ *ou la multilinéarité du déterminant...*

Solution (**Ex.322** – *Dérivation, déterminant et trace*)
En utilisant le polynôme caractéristique de $-\mathrm{A}$ *:*
- $\varphi(t)$ est un polynôme en t donc φ est dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$).
- Notons que, pour $t \neq 0$,

$\varphi(t) = \det(t((1/t)\mathrm{I}_n - (-\mathrm{A}))) = t^n\chi_{-\mathrm{A}}(1/t) = 1 - \mathrm{tr}(-\mathrm{A})t + \mathrm{P}(t)$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 2$.
$\dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \dfrac{1}{t}\big(1+\mathrm{tr}(\mathrm{A})t+\mathrm{P}(t)-\det(\mathrm{I}_n)\big) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})+\dfrac{\mathrm{P}(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \mathrm{tr}(\mathrm{A})$ car $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{P}(t)}{t} \Rightarrow \deg\big(\dfrac{\mathrm{P}(t)}{t}\big) \geqslant 1 \Rightarrow \xrightarrow[t\to 0]{} 0$
En utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes
Je note $(\mathrm{C}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les colonnes de A et $(\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de sorte que :
$\varphi(t) = \det(\mathrm{E}_1 + t\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2 + t\mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n + t\mathrm{C}_n)$.
On a évidemment, $\forall i$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{E}_i + t\mathrm{C}_i) = \mathrm{C}_i$.
En dérivant, par $n-$linéarité,
$\varphi'(t) = \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2 + t\mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n + t\mathrm{C}_n) + \det(\mathrm{E}_1 + t\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n + t\mathrm{C}_n) + \cdots + \det(\mathrm{E}_1 + t\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2 + t\mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n)$, donc
$\varphi'(0) = \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n) + \det(\mathrm{E}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n) + \cdots + \det(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{C}_n)$.
Or un développement rapide montre que, $\forall i$,
$\det(\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_{i-1}, \mathrm{C}_i, \mathrm{E}_{i+1}, \ldots, \mathrm{E}_n) = a_i$.
D'où $\varphi'(0) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 323 *Un exemple de calcul de déterminant par dérivation*
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{D}_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \ldots & \ldots & x^2/2! & x \end{vmatrix}.$$

1. Monter que D_n est dérivable et calculer D_n'.
2. En déduire $\mathrm{D}_n(x)$.

Solution (**Ex.323** – *Un exemple de calcul de déterminant par dérivation*)
1. $\mathrm{D}_n(x)$ est polynomiale en x donc D_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Soit $n \geqslant 2$. Par multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes que je note $\mathrm{C}_1(x), \ldots, \mathrm{C}_n(x)$,

$\mathrm{D}'_n = \det(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_n) + \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}'_2, \dots, \mathrm{C}_n) + \cdots + \det(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_{n-1}, \mathrm{C}'_n)$.
Or pour $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $\mathrm{C}'_i = \mathrm{C}_{i+1}$, donc $\mathrm{D}'_n = 0 + \cdots + \det(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_{n-1}, \mathrm{C}'_n)$.
Et en développant suivant la dernière colonne, $\mathrm{D}'_n(x) = 1 \times \mathrm{D}_{n-1}(x)$ d'où $\mathrm{D}'_n = \mathrm{D}_{n-1}$.

2. $\mathrm{D}_1(x) = x$ d'où par primitivation successives en remarquant que $\mathrm{D}_n = (0) = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 324}}$ *Mouvement sur une sphère et accélération*

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{R} \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0, \mathrm{R})$ la sphère de centre 0 et de rayon R.
I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ deux fois dérivable.
On suppose que : $\forall t \in \mathrm{I}, f(t) \in \mathcal{S}$ (autrement dit, pour tout t, le point $f(t)$ est sur la sphère $\mathcal{S}$.

1. Montrer que : (i) $\forall t \in \mathrm{I}, f'(t) \perp f(t)$ et (ii) $\forall t \in \mathrm{I}, \langle f''(t), f(t)\rangle \leqslant 0$.

2. Interpréter cinématiquement ces résultats.

Solution (**Ex.324** – *Mouvement sur une sphère et accélération*)

1. Soit $\mathrm{N} : t \mapsto ||f(t)||^2 = \langle f(t), f(t)\rangle$. Alors :
$\forall t \in \mathrm{I}, \mathrm{N}'(t) = 2\,\langle f'(t), f(t)\rangle$, mais comme N est constante égale à R^2, $\mathrm{N}' = 0$.
Donc : $\forall t \in \mathrm{I}, \langle f'(t), f(t)\rangle = 0$ et $f'(t) \perp f(t)$.
Dérivons alors $\mathrm{P} : t \mapsto \langle f'(t), f(t)\rangle$, elle aussi constante.
$\forall t \in \mathrm{I}, \mathrm{P}'(t) = \langle f''(t), f(t)\rangle + \langle f'(t), f'(t)\rangle = 0$, donc $\langle f''(t), f(t)\rangle = -\,||f'(t)||^2 \leqslant 0$.

2. (i) dit qu'en tout point $f(t)$, le vecteur vitesse instantané est orthogonal au rayon $f(t)$... si ça n'était pas le cas, cela compromettrait que le point reste sur $\mathcal{S}$!
(ii) dit qu'à tout moment, l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la sphère : $\cos(f''(t), f(t)) \leqslant 0$, i.e. sens opposé au rayon $f(t)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 325}}$ *Une équation fonctionnelle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en 0 vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x).$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $f(x/2^n)$?

2. Montrer que f est linéaire.

Solution (**Ex.325** – *Une équation fonctionnelle*)

1. On peut réécrire l'égalité fonctionnelle en $f(y) = 2f\big(\dfrac{y}{2}\big)$, d'où par récurrence immédiate :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = 2^n f\big(\frac{x}{2^n}\big).$$

2. La relation fonctionnelle $f(2x) = 2f(x)$ entraîne $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.
On a alors pour $x \neq 0$:
$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(0)$ par dérivabilité de f en 0. Donc f est dérivable en x.
Bilan : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' = f'(0) = cte$ donc f est affine, et comme $f(0) = 0$, f est linéaire.

Chapitre 14

Équations différentielles

Exercice 326 *EDL : applications directes du cours*

Résoudre les équations différentielles suivantes, où y désigne une fonction de x suffisamment dérivable sur le domaine indiqué :

1. $y' = (1+y)\sin x, \qquad x \in \mathbb{R}$ **2.** $3xy' - 4y = x, \qquad x \in \left]0\,;+\infty\right[$

3. $xy' + y = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \left]0\,;+\infty\right[$ **4.** $y'' + y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$

5. $y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$ **6.** $y'' + 2y' + 2y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$

Solution (**Ex.326** – *EDL : applications directes du cours*)

Je note (E) l'équation différentielle à résoudre, éventuellement (H) l'équation homogène associée.

1. (H) $\Leftrightarrow y' - (\sin x)y = 0$.

Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}e^{-\cos x}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.

$x \mapsto -1$ est solution particulière évidente de (E).

Les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto \mathrm{C}e^{-\cos x} - 1 \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

2. (H) $\Leftrightarrow y' - \dfrac{4}{3x}y = 0$.

Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.

Recherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.

Soit $f : x \mapsto \mathrm{C}(x)x^{4/3}$ où $\mathrm{C} : x \mapsto \mathrm{C}(x)$ est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

$(\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad 3xf'(x) - 4f(x) = x) \Leftrightarrow$

$\left(\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad 3x\big(\mathrm{C}'(x)x^{4/3} + \mathrm{C}(x)\dfrac{4}{3}x^{1/3}\big) - 4\mathrm{C}(x)x^{4/3} = x\right) \Leftrightarrow$

$\big(\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad 3x^{7/3}\mathrm{C}'(x) = x\big) \Leftrightarrow$

$\left(\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad \mathrm{C}'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-4/3}\right) \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{R}, \big(\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad \mathrm{C}(x) = -x^{-1/3} + k\big)$
Donc $x \mapsto -x$ est solution particulière (évidente ? ? ? ? ? ?... si on avait retiré nos lunettes en contre-plaqué) de (E).
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3} - x \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

3. (H) $\Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{x}y = 0$.
Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \dfrac{\mathrm{C}}{x}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.
Recherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{C}(x)}{x}$ où $\mathrm{C} : x \mapsto \mathrm{C}(x)$ est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
$\left(\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad xf'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\right) \Leftrightarrow$
$\left(\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad x\Big(\dfrac{\mathrm{C}'(x)}{x} - \dfrac{\mathrm{C}(x)}{x^2}\Big) + \dfrac{\mathrm{C}(x)}{x} = \dfrac{1}{1+x^2}\right) \Leftrightarrow$
$\left(\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad \mathrm{C}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\right) \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{R}, (\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[,\quad \mathrm{C}(x) = \mathrm{Arctan}(x) + k)$
Donc $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ est solution particulière (évidente ? ? ? ? ? ?... si on avait retiré nos lunettes en contre-plaqué, bis) de (E).
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \frac{\mathrm{C}}{x} + \mathrm{Arctan}(x) \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

4. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, de solutions $r = \pm i$.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

5. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

6. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, de solutions $-1 \pm i$.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \big(\lambda \cos x + \mu \sin x\big)\mathrm{e}^{-x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Exercice 327 *Exemples d'EDL2 avec second membre exponentiel*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + y = xe^x$,
2. $y'' + y' - 2y = e^x$.

Solution (**Ex.327** – *Exemples d'EDL2 avec second membre exponentiel*)

1. Il s'agit d'une équation différentielle (E) du second ordre à coefficient constant, dont l'équation homogène (H) associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+1 = 0$, de solution double -1.
   Les solutions de (H) sont :
   $$x \mapsto \big(\lambda x + \mu\big)e^{-x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
   Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax + b)e^x$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^x\big((a + ax + a + b) + 2(ax + a + b) + ax + b\big)$
   $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^x\big(4ax + 4a + 4b\big)$
   Alors $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -a$ fournit une solution particulière $x \mapsto \dfrac{x-1}{4}e^x$.
   Les solutions de (E) sont :
   $$x \mapsto \big(\lambda x + \mu\big)e^{-x} + \frac{x-1}{4}e^x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
2. Il s'agit d'une équation différentielle (E) du second ordre à coefficient constant, dont l'équation homogène (H) associée a pour équation caractéristique $r^2+r-2 = 0$, de solution 1 et -2.
   Les solutions de (H) sont :
   $$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
   Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $f : x \mapsto axe^x$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = e^x\big((a + a + ax) + (a + ax) - 2ax\big)$
   $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = e^x\big(3a\big)$
   Alors $a = \dfrac{1}{3}$ fournit une solution particulière $x \mapsto \dfrac{1}{3}xe^x$.
   Les solutions de (H) sont :
   $$x \mapsto \big(\lambda + \frac{x}{3}\big)e^x + \mu e^{-2x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Exercice 328 *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$,
2. $y'' + y = 2\cos^2(x)$.

Solution (**Ex.328** – *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*)

1. L'équation différentielle homogène associée du second ordre à coefficient constant (H) a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, de solutions $-1 \pm i$.
Les solutions de (H) sont :

$$x \mapsto \big(\lambda \cos x + \mu \sin x\big)\mathrm{e}^{-x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Pour trouver une solution particulière, on s'intéresse alors l'équation (complexe) d'inconnue $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\text{(E)} \quad z'' + 2z' + 2z = \mathrm{e}^{ix}.$$

Si z est solution, alors $y = \mathfrak{Im}(z)$ sera solution de $y'' + 2y' + 2y = \sin x$...
Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $z : x \mapsto (a + ib)e^{ix}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$,
$z''(x) + 2z'(x) + 2z(x) = \mathrm{e}^{ix}\big((-a - ib) + (2ai - 2b) + (2a + 2ib)\big)$
$z''(x) + 2z'(x) + 2z(x) = \mathrm{e}^{ix}\big(a - 2b + i(2a + b))\big)$
Alors $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = \dfrac{-2}{5}$ fournit une solution particulière de (E) :

$$z : x \mapsto \frac{1}{5}(1 - 2i)\mathrm{e}^{ix}.$$

Et $y = \mathfrak{Im}(z) : x \mapsto \dfrac{1}{5}\sin(x) - \dfrac{2}{5}\cos(x)$ est une solution particulière de l'équation initiale.
Les solutions de cette équation différentielle sont finalement :

$$x \mapsto \big(\lambda \cos x + \mu \sin x\big)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

2. On procède de façon analogue.
Les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Pour trouver une solution particulière de $y'' + y = 2\cos^2(x)$, on observe que $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ et on s'intéresse alors aux équations d'inconnues $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{E}_1) \quad z'' + z = \mathrm{e}^{i2x} \text{ et } (\mathrm{E}_2) \quad w'' + w = 1.$$

Si z est solution de E_1 et w de (E_2), alors $y = \mathfrak{Re}(z)$ sera solution de $y'' + y = \cos(2x)$, et par superposition $y + w$ sera solution de l'équation initiale.
Tout calcul fait, $y : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\cos(2x)$ convient et $w : x \mapsto 1$ est solution évidente, donc
Les solutions de l'équation avec second membre sont :

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + 1 - \frac{1}{3}\cos(2x) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Exercice 329 *Système différentiel et diagonalisation*
Résoudre, en diagonalisant la matrice sous-jacente, le système différentiel suivant

$$(\text{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

où $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables.

Solution (**Ex.329** – *Système différentiel et diagonalisation*)

Ce système s'écrit $\text{X}' = \text{AX}$ où $\text{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Diagonalisons A :

$\chi_{\text{A}}(\lambda) = \det(\lambda \text{I}_3 - \text{A}) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$

$\chi_{\text{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)$.

Comme $\text{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

La recherche des 3 sous-espaces propres permet de déterminer une matrice de passage, par exemple $\text{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, telle que

$$\text{P}^{-1}\text{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} \text{D}.$$

Posons $\text{Y} = \text{P}^{-1}\text{X} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$$\text{X}' = \text{AX} \Leftrightarrow \text{PY}' = \text{PDP}^{-1}\text{PY} \Leftrightarrow \text{Y}' = \text{DY} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = 0 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

$$\text{X}' = \text{AX} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y_1 = \alpha \text{e}^{-t} \\ y_2 = \beta \\ y_3 = \gamma \text{e}^{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x(t) = \alpha \text{e}^{-t} + 2\gamma \text{e}^{2t} \\ y(t) = \alpha \text{e}^{-t} - \beta + \gamma \text{e}^{2t} \\ z(t) = \beta + 3\gamma \text{e}^{2t} \end{cases}$$

Exercice 330 *Système différentiel et trigonalisation*

On cheche à résoudre le système différentiel suivant

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

où $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables.
On note A la matrice sous-jacente.

1. Montrer que A est semblable à $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre (S).

Solution (**Ex.330** – *Système différentiel et trigonalisation*)

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 7 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} +$ $\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 10 & -5-\lambda \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 = -\lambda^2(1+\lambda)$

Sp(A) $= \{-1, 0\}$ et la recherche des sous-espaces propres par résolution de $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$ donne :

$$\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1) \text{ et } \mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_2) \text{ avec } \mathrm{C}_1 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{C}_2 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A n'est pas diagonalisable mais pour obtenir T on peut chercher un vecteur C_3 tel que $\mathrm{AC}_3 = \mathrm{C}_2$. Tout calcul fait,

$$\mathrm{C}_3 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

convient et

$$\text{avec } \mathrm{P} \overset{\text{déf.}}{=} (\mathrm{C}_1|\mathrm{C}_2|\mathrm{C}_3),\ \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : P n'est évidemment pas unique, mais j'ai fait des choix permettant que ses coefficients soient tous entier.

2. Posons $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \Leftrightarrow \mathrm{PY}' = \mathrm{PTP}^{-1}\mathrm{PY} \Leftrightarrow \mathrm{Y}' = \mathrm{TY} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y_1 = \alpha \mathrm{e}^{-t} \\ y_2 = \gamma t + \beta \\ y_3 = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x(t) = -\alpha \mathrm{e}^{-t} + 2\gamma t + 2\beta \\ y(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} + 4\gamma t + 4\beta + 2\gamma \\ z(t) = 2\alpha \mathrm{e}^{-t} + 2\gamma \end{cases}$$

Exercice 331 *Exemple à trajectoires circulaires*

On étudie le système différentiel suivant défini sur $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{S}) : \quad \begin{cases} x' = z - y \\ y' = x - z \\ z' = y - x \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0.$$

1. Ce système possède-t-il des solutions ? Si oui, combien ?

2. a) Soit (x, y, z) la solution de $(\mathcal{S})$. Montrer que $t \mapsto x + y + z$ et $t \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sont constantes.

b) Que peut-on en déduire pour les points $\mathrm{M}(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$?

3. Écrire le système (S) sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ et le résoudre par diagonalisation.

4. Résoudre (S) en formant une équation différentielle *scalaire* du second ordre dont x, y et z sont solutions.

Solution (**Ex.331** – *Exemple à trajectoires circulaires*)

1. D'après le théorème de Cauchy, ce système linéaire à condition initiale admet une unique solution.

2. • $x' + y' + z' = 0$ donc $t \mapsto x(t) + y(t) + z(t)$ est constante, et avec la condition initiale,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) + y(t) + z(t) = 1.$$

• $n : t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ est aussi constante car :
$\forall t \in \mathbb{R}, n'(t) = 2x(t)(z(t) - y(t)) + 2y(t)(x(t) - z(t)) + 2z(t)(y(t) - x(t)) = 0$,
donc avec la condition initiale,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1.$$

• Bilan : pour tout t de $\mathbb{R}$, $\mathrm{M}(t)$ appartient à l'intersection du plan d'équation $x+y+z = 1$ et de la sphère de centre O et de rayon 1, d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$.
Il s'agit du cercle de centre $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\sqrt{2/3}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} =$

$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + \lambda - 1 + 1 + \lambda = \lambda^3 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2+3)$,

d'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$.

Avec $C_1 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \overline{j} \end{pmatrix}$ et $C_3 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{j} \\ j \end{pmatrix}$, on a :

$$E_0 = \mathrm{Vect}(C_1),\ E_{i\sqrt{3}} = \mathrm{Vect}(C_2) \text{ et } E_{-i\sqrt{3}} = \mathrm{Vect}(C_2).$$

Soit $P \overset{\text{déf.}}{=} (C_1|C_2|C_3)$, on a : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Posons $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$X' = AX \Leftrightarrow PY' = PTP^{-1}PY \Leftrightarrow Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = i\sqrt{3}y_2 \\ y_3' = -i\sqrt{3}y_3 \end{cases}$

$X' = AX \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta e^{i\sqrt{3}t} \\ y_3 = \gamma e^{-i\sqrt{3}t} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{C}^3, X(t) = \lambda C_1 + \mu e^{i\sqrt{3}t} C_2 + \nu e^{-i\sqrt{3}t} C_3$

Avec la condition initiale en $t = 0$: $\lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $\lambda = \mu = \nu = \dfrac{1}{3}$.

D'où finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}(1 + e^{i\sqrt{3}t} + e^{-i\sqrt{3}t}) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ y(t) = \dfrac{1}{3}(1 + j e^{i\sqrt{3}t} + \overline{j} e^{-i\sqrt{3}t}) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\cos(\sqrt{3}t) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ z(t) = \dfrac{1}{3}(1 + \overline{j} e^{i\sqrt{3}t} + j e^{-i\sqrt{3}t}) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\cos(\sqrt{3}t) - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$$

4. Soit x, y et z les solutions (dont on est sûr de l'existence et de l'unicité depuis 1.),

alors
$x'' = z' - y' = -2x + y + z = -3x + 1$ puisque $y + z = 1 - x$ d'après 2.
De même, $y'' = x' - z' = -2y + z + x = -3y + 1$ et $z'' = y' - x' = -2z + x + y = -3z + 1$.
Donc x, y et z sont toutes solutions de (E) : $\quad \varphi'' + 3\varphi = 1$.
L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est
$$r^2 + 3r = 0 \text{ de solutions } r = \pm i\sqrt{3}.$$
Comme $t \mapsto 1/3$ est solution particulière de cette équation, les solutions de (E) sont
$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{3} + \lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t).$$
- Pour x, les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = z(0) - y(0) = 0$ fournissent $\lambda = \frac{2}{3}$ et $\mu = 0$, d'où nécessairement
$$x : t \mapsto \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}t).$$
- Pour y, les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = x(0) - y(0) = 1$ fournissent $\lambda = -\frac{1}{3}$ et $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où
$$y : t \mapsto \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}t).$$
- Pour z, on raisonne de même, ou on se souvient que $z = 1 - x - y$, d'où
$$z : t \mapsto \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}t).$$

Exercice 332 *Exemple de recherche de solutions polynomiales*

On considère l'équation différentielle
$$\text{(E)} : \qquad x(x^2 + 3)y'' - (4x^2 + 6)y' + 6xy = 0$$
où $y :]\,0\,; +\infty\,[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).

2. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution (**Ex.332** – *Exemple de recherche de solutions polynomiales*)

1. Soit P un polynôme non nul de degré d, de coefficient dominant a_d.
Le coefficient de degré $d+1$ de $x(x^2+3)\mathrm{P}'' - (4x^2+6)\mathrm{P}' + 6x\mathrm{P}$ est $d(d-1)a_d - 4da_d + 6a_d = (d^2 - 5d + 6)a_d$.
Comme a_d est non nul, si P vérifie (E) alors $d^2 - 5d + 6 = 0$, donc $d = 2$ ou $d = 3$.
Posons alors : $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$.
P vérifie (E) si, et seulement si,

$$\begin{cases} 6a - 12a + 6a = 0 & \text{(coeff. de degré 4)} \\ 2b - 8b + 6b = 0 & \text{(coeff. de degré 3)} \\ 18a - 4c - 18a + 6c = 0 & \text{(coeff. de degré 2)} \\ 6b - 12b + 6d = 0 & \text{(coeff. de degré 1)} \\ -6c = 0 & \text{terme constant} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = b \end{cases}$$

P est solution de (E) si, et seulement si, P s'écrit $a\mathrm{X}^3 + b(\mathrm{X}^2 + 1)$.
L'ensemble des solutions polynomiales de (E) est $\mathrm{Vect}(\mathrm{X}^3, \mathrm{X}^2 + 1)$.

2. En déduire toutes les solutions de (E). Comme l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus est un espace vectoriel de dimension 2 contenant l'espace précédent lui-même de dimension 2, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathrm{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^2 + 1).$$

Exercice 333 *Par les séries entières ou par un changement de variable*

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \qquad (1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

où $y :]-1\,;1[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières en 0.

2. Résoudre (E) en effectuant le changement de variable $t = \arcsin x$.

3. En déduire le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ en 0.

Solution (**Ex.333** – *Par les séries entières ou par un changement de variable*)

1. Soit $\mathrm{S}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} \in]0\,;1]$. On a :

S solution de (E) sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$ si, et seulement si,

$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad (1 - x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ ssi

$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ ssi, par identification des coefficients,

$$(\Sigma) \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ 6a_3 - a_1 + a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2, (n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2 - 1)a_n = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\dfrac{1}{2}a_0 \\ a_3 = 0 \\ \forall n \geqslant 2, a_{n+2} = \dfrac{n^2-1}{(n+1)(n+2)}a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_n \end{cases}$$
$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+2} = \dfrac{2p-1}{2p+2}a_{2p} \end{cases}$$
Cherchons une expression explicite des a_{2p}.
$a_{2p} = \dfrac{2p-3}{2p} \times \dfrac{2p-5}{2p-2} \times \cdots \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{-1}{2}a_0 = \dfrac{(2p-2)!/(2^{p-1}(p-1)!)}{2^p(p!)}a_0.$
$a_{2p} = \dfrac{(2p-2)!}{2^{2p-1}p(p-1)!^2}a_0.$

Cherchons le rayon de convergence de $\mathrm{S}(x) = a_1 x + \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}$.

$\left|\dfrac{a_{2p+2}x^{2p+2}}{a_{2p}x^{2p}}\right| = \dfrac{2p-1}{2p+2}x^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} x^2$, donc par la règle de d'Alembert, $\mathrm{S}(x)$ diverge grossièrement pour $|x| > 1$ et converge absolument pour $|x| < 1$: $\mathrm{R} = 1$.
Bilan : comme nous avons raisonné par équivalence, nous pouvons dire que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de (E) développables en séries entières est :
$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1) \text{ où } \mathrm{S}_0 : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-1}p(p-1)!^2}x^{2p} \text{ et } \mathrm{S}_1 : x \mapsto x.$$
Remarque : en raison de la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle scalaire linéaire homogène d'ordre 2 (à savoir un espace vectoriel de dimension 2), S est l'ensemble des solutions de (E), qui sont toutes développables en série entière de rayon 1.

2. Soit $y :]-1\,;1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et soit
$$z :]-\pi/2\,;\pi/2[, t \mapsto y(\sin t).$$
Alors :
$\forall t \in]-\pi/2\,;\pi/2[, \quad z'(t) = \cos(t)y'(\sin(t)),$
$\forall t \in]-\pi/2\,;\pi/2[, \quad z''(t) = -\sin(t)y'(\sin(t)) + \cos^2(t)y''(t).$
Comme $\sin :]-\pi/2\,;\pi/2[\to]-1\,;1[$ réalise une bijection, on observe que :
$$\forall x \in]-1\,;1[, (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t \in]-\pi/2\,;\pi/2[, \cos^2(t)y''(\sin(t)) - \sin(t)y'(\sin(t)) + y(\sin(t)) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t \in]-\pi/2\,;\pi/2[, z''(t) + z(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in]-\pi/2\,;\pi/2[, z(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$$
$$\Leftrightarrow$$

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall t\in\,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\,, y(\sin(t))=\lambda\cos(t)+\mu\sin(t)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall x\in\,]-1\,;\,1\,[\,, y(x)=\lambda\sqrt{1-x^2}+\mu x$$

Bilan : l'ensemble des solutions $\mathcal{S}'$ de (E) est
$$\mathcal{S}'=\mathrm{Vect}\big(x\mapsto x, x\mapsto\sqrt{1-x^2}\big).$$

3. En raison du théorème de structure (*cf* remarque en fin de première question), $\mathcal{S}'=\mathcal{S}$. Donc $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}$.
Donc : $\exists(a_0,a_1)\in\mathbb{R}^2$,
$$\forall x\in\,]-1\,;\,1\,[\,,\sqrt{1-x^2}=a_0\mathrm{S}_0(x)+a_1x=a_0\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2p-2)!}{2^{2p-1}p(p-1)!^2}x^{2p}+a_1x$$
Comme $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est paire, $a_1=0$, et comme $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ vaut 1 en $x=0$, $a_0=1$. D'où :
$$\forall x\in\,]-1\,;\,1\,[\,,\sqrt{1-x^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2p-2)!}{2^{2p-1}p(p-1)!^2}x^{2p}.$$
Remarque : On peut retrouver ce résultat par le développement $\sqrt{1+x}$ puis la substitution $-x^2\to x$...

Exercice 334 *Exemple de variation des constantes*

1. Quelles sont les solutions de : $\qquad y''+y=0$
où $y:\,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\,\to\mathbb{R}$ est deux fois dérivable ?

2. On considère l'équation différentielle
$$\text{(E)}:\qquad y''+y=\frac{1}{\cos x}$$
où $y:\,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\,\to\mathbb{R}$ est deux fois dérivable.
Résoudre (E) en cherchant une solution de la forme $x\mapsto\mathrm{A}(x)\cos x+\mathrm{B}(x)\sin x$ où A et B sont deux fois dérivables et vérifient $\mathrm{A}'(x)\cos x+\mathrm{B}'(x)\sin x=0$.

Solution (**Ex.334** – *Exemple de variation des constantes*)

1. $\mathcal{S}_\mathrm{H}=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)=\{x\mapsto\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$
Voir exercice *Applications directes du cours.*

2. On considère l'équation différentielle
$$\text{(E)}:\qquad y''+y=\frac{1}{\cos x}$$
où $y:\,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\,\to\mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

a) *Analyse –*
Soit A et B deux fonctions deux fois dérivables sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$ vérifiant
$$\forall x\in\,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\,,\quad \mathrm{A}'(x)\cos x+\mathrm{B}'(x)\sin x=0.$$
On suppose que $y:x\mapsto\mathrm{A}(x)\cos x+\mathrm{B}(x)\sin x$ vérifie (E).
$\forall x\in\,]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$,

$y(x) = \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$
$y'(x) = \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x - \mathrm{A}(x)\sin x + \mathrm{B}(x)\cos x = -\mathrm{A}(x)\sin x + \mathrm{B}(x)\cos x$ par les hypothèses sur A et B.
$y''(x) = -\mathrm{A}'(x)\sin x - \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\cos x - \mathrm{B}(x)\sin x$
$y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow -\mathrm{A}'(x)\sin x + \mathrm{B}'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$
Finalement, pour tout $x \in \left]-\pi/2\,;\,\pi/2\right[$, $\mathrm{A}'(x)$ et $\mathrm{B}'(x)$ sont solutions de

$$\begin{cases} -\mathrm{A}'(x)\sin x + \mathrm{B}'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \\ \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0 \end{cases}$$

donc $\mathrm{A}'(x) = -\tan x$ et $\mathrm{B}'(x) = 1$, et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{A} : x \mapsto \ln(\cos x) + \lambda$ et $\mathrm{B} : x \mapsto x + \mu$.
Synthèse –
Soit $y : x \mapsto \ln(\cos x)\cos x + x\sin x$. Alors :
$y' : x \mapsto -\sin x - \ln(\cos x)\sin x + \sin x + x\cos x = -\ln(\cos x)\sin x + x\cos x$
$y'' : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - \ln(\cos x)\cos x + \cos x - x\sin x.$
Et : $\forall x \in \left]-\pi/2\,;\,\pi/2\right[$,
$y''(x) + y(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}.$
y est une solution particulière de (E).
L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\left\{x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 335}}$ *Trois applications du cours*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $y'' - y = x^2 + 4\,;$

2. $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{2t}(t^2 + 1)\,;$

3. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x + \cos(x).$

Solution (**Ex.335** – *Trois applications du cours*)

1. Second membre du type $\mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{0x}$:
$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \alpha\mathrm{e}^x + \beta\mathrm{e}^{-x} - x^2 - 6, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$

2. Second membre du type $\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{2t}$:
$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \alpha\mathrm{e}^{2t} + \beta\mathrm{e}^{3t} - t\mathrm{e}^{2t}\left(\dfrac{1}{3}t^2 + t + 3\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$

3. On résout les équations :
$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$ et $y'' - 2y' + y = \cos(x)$
et on applique le principe de superposition :
$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\sin(x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 336 *Forme des solutions suggérées*
Résoudre sur $]-1/2\,;\,+\infty\,[$ l'équation différentielle

$$\text{(E)}: \qquad (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

en cherchant une solution polynomiale et une solution du type $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$.

Solution (**Ex.336** – *Forme des solutions suggérées*)
$x \mapsto 4x^2+1$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ sont solutions, et sur $]-1/2\,;\,+\infty\,[$, (E) est une équation linéaire homogène du second ordre, donc son ensemble de solutions est un espace vectoriel de dimension 2, donc :
$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(x \mapsto 4x^2+1, x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}) = \left\{x \mapsto \alpha(4x^2+1) + \beta\mathrm{e}^{-2x}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 337 *Changement de fonction inconnue*
Résoudre sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ l'équation

$$\text{(E)}: \qquad xy'' - (1+x)y' + y = 1$$

en posant $z = y' - y$.

Solution (**Ex.337** – *Changement de fonction inconnue*)
y vérifie (E) si, et seulement si, z vérifie $xz' - z = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $z : x \mapsto kx$.
On résout alors $y' - y = kx$. Finalement :
$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \alpha\mathrm{e}^{x} - k(x+1), (\alpha,k) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 338 *Système différentiel linéaire*
Résoudre le Système différentiel

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x' = y+z \\ y' = x \\ z' = x+y+z \end{cases}$$

Solution (**Ex.338** – *Système différentiel linéaire*)
Avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\mathcal{S} \Leftrightarrow \mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.
$\mathrm{Sp(A)} = \{-1,2,0\}$, et avec $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{D}$.

En posant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, $\mathcal{S} \Leftrightarrow \mathrm{Y}' = \mathrm{DY} \Leftrightarrow \mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu\, nu) \in \mathbb{K}^3$.

Comme $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, il vient :
$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 339}}$ *Problèmes se ramenant à une équation du second ordre*

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(2 - x).$$

Solution (**Ex.339** – *Problèmes se ramenant à une équation du second ordre*)

1. *Analyse* – Supposons f solution. Alors $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x - f(-x)$ est dérivable et
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \mathrm{e}^x + f'(-x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - f(x)$,
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.
Or les solutions de $y'' + y = 2\mathrm{ch}(x)$ sont $y : x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \mathrm{ch} x$.
Pour la solution particulière, on ouvre les yeux ou on résout $y'' + y = \mathrm{e}^x$ et $y'' + y = \mathrm{e}^{-x}$ et on superpose les solutions.
Synthèse – Une telle fonction est solution si, et seulement si,
$\forall x \in \mathbb{R}, -\alpha \sin x + \beta \cos x + \mathrm{sh} x + \alpha \cos x - \beta \sin x + \mathrm{ch} x = \mathrm{e}^x$
si, et seulement si, $\beta = -\alpha$ (car $(\sin, \cos)$ est libre et $\mathrm{sh} + \mathrm{ch} = \exp$).
Conclusion – Les solutions du problème sont :
$x \mapsto \mathrm{ch} x + \alpha(\cos x - \sin x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque.

2. *Analyse* – Supposons f solution. Alors f' est dérivable et
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(2 - x) = -f(x)$,
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) =$.
Or les solutions de $y'' + y =$ sont $y : x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$.
Synthèse – Une telle fonction est solution si, et seulement si,
$\forall x \in \mathbb{R}, -\alpha \sin x + \beta \cos x = \alpha \cos(2 - x) + \beta \sin(2 - x)$
si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$-\alpha \sin x + \beta \cos x = \alpha(\cos(2)\cos(x) + \sin(2)\sin(x)) + \beta(\sin(2)\cos(x) - \cos(2)\sin(x))$
si, et seulement si, $\begin{cases} (\sin(2) + 1)\alpha - \cos(2)\beta = 0 \\ \cos(2)\alpha + (\sin(2) - 1)\beta = 0 \end{cases}$ (car $(\sin, \cos)$ est libre)

si, et seulement si, $(1+\sin(2))\alpha = (\cos(2))\beta$.
Conclusion – En paramétrant par $k = \alpha/\cos(2)$ (pour éviter les fractions), les solutions du problème sont :
$x \mapsto \cos(2)k\cos(x) + ((1+\sin(2))k\sin x$ avec $k \in \mathbb{R}$ quelconque, soit encore
$$x \mapsto k\big(\sin(x) + \cos(2-x)\big) \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

Exercice 340 *Équation différentielle et changement de variable*

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$(\mathrm{E}_1) : \quad (1+x^2)^2y'' + 2(x-1)(1+x^2)y' + y = 0$$
en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{Arctan} x$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation
$$(\mathrm{E}_2) : \quad x^2y'' + xy' - y = x^2$$
en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

Solution (**Ex.340** – *Équation différentielle et changement de variable*)

1. Soit y 2 fois dérivable et $z : \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[\to \mathbb{R}, t \mapsto y(\tan t)$. Par composition, z est deux fois dérivable.
$\forall t \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[, z'(t) = (1+\tan^2 t)y'(\tan(t))$ et
$z''(t) = (1+\tan^2 t)^2y''(\tan t) + 2\tan(t)(1+\tan^2 t)y'(\tan t)$.
Comme $t \mapsto \tan t$ est une bijection de $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ sur $\mathbb{R}$, on a :
y est solution de (E_2) si, et seulement si,
$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)^2y''(x) + 2(x-1)(1+x^2)y'(x) + y(x) = 0$ ssi
$\forall t \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[, z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$.
D'après le cours, les solutions de cette équation homogène sont $z : t \mapsto (\alpha+\beta t)\mathrm{e}^t$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
Comme j'ai raisonné par équivalence, à l'aide de $t = \arctan x$, les solutions de (E_1) sont :
$$y : x \mapsto \big(\alpha + \beta \mathrm{Arctan} x\big)\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan} x} \text{ avec } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soit y 2 fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$. Par composition, z est deux fois dérivable.
$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t$ et $z''(t) = y''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t$.
Comme $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
y est solution de (E_2) si, et seulement si,
$\forall x > 0, x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2$ ssi
$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{2t}y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^ty'(\mathrm{e}^t) - y(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{2t}$ ssi
$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z(t) = \mathrm{e}^{2t}$.
D'après le cours :

- les solutions de l'équation homogène sont $z_0 : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;
- il existe une solution particulière du type $z_P : t \mapsto k e^{2t}$. En substituant, $4k - k = 1$ donc $k = 1/3$;
- les solutions sont les fonctions $z : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} + e^{2t}/3$.

Comme j'ai raisonné par équivalence, à l'aide de $t = \ln x$, les solutions de (E_2) sont :

$$y : x \mapsto \alpha x + \frac{\beta}{x} + \frac{x^2}{3} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 341 *Équation différentielle et changement de variable*

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_1) : \quad (1 + x^2)^2 y'' + 2(x - 1)(1 + x^2) y' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \text{Arctan} x$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(E_2) : \quad x^2 y'' + x y' - y = x^2$$

en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

Solution (**Ex.341** – *Équation différentielle et changement de variable*)

1. Soit y 2 fois dérivable et $z :]-\pi/2 ; \pi/2[\to \mathbb{R}, t \mapsto y(\tan t)$. Par composition, z est deux fois dérivable.
$\forall t \in]-\pi/2 ; \pi/2[, z'(t) = (1 + \tan^2 t) y'(\tan(t))$ et
$z''(t) = (1 + \tan^2 t)^2 y''(\tan t) + 2\tan(t)(1 + \tan^2 t) y'(\tan t)$.
Comme $t \mapsto \tan t$ est une bijection de $]-\pi/2 ; \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$, on a :
y est solution de (E_2) si, et seulement si,
$\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)^2 y''(x) + 2(x - 1)(1 + x^2) y'(x) + y(x) = 0$ ssi
$\forall t \in]-\pi/2 ; \pi/2[, z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$.
D'après le cours, les solutions de cette équation homogène sont $z : t \mapsto (\alpha + \beta t) e^t$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Comme j'ai raisonné par équivalence, à l'aide de $t = \arctan x$, les solutions de (E_1) sont :

$$y : x \mapsto \big(\alpha + \beta \text{Arctan} x\big) e^{\text{Arctan} x} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soit y 2 fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto y(e^t)$. Par composition, z est deux fois dérivable.
$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = y'(e^t) e^t$ et $z''(t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t$.
Comme $t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
y est solution de (E_2) si, et seulement si,
$\forall x > 0, x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = x^2$ ssi
$\forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t) - y(e^t) = e^{2t}$ ssi

$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z(t) = \mathrm{e}^{2t}$.
D'après le cours :
- les solutions de l'équation homogène sont $z_0 : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{-t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;
- il existe une solution particulière du type $z_{\mathrm{P}} : t \mapsto k\mathrm{e}^{2t}$. En substituant, $4k - k = 1$ donc $k = 1/3$;
- les solutions sont les fonctions $z : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t}/3$.

Comme j'ai raisonné par équivalence, à l'aide de $t = \ln x$, les solutions de (E_2) sont :

$$y : x \mapsto \alpha x + \frac{\beta}{x} + \frac{x^2}{3} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Chapitre 15

Calcul différentiel

Exercice 342 *Recherche de limites*

Déterminer les limites de fonctions suivantes en $(0,0)$:

1. $f:(x,y)\mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **2.** $g:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ **3.** $h:(x,y)\mapsto x^y$

4. $j:(x,y)\mapsto \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **5.** $k:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ **6.** $m:(x,y)\mapsto \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$

Solution (**Ex.342** – *Recherche de limites*)

1. $f(x,0)=0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x,x)=\dfrac{1}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}\dfrac{1}{2}$ donc f n'a pas de limite en $(0,0)$ (par unicité de la limite).

2. $|g(x,y)|\leqslant \dfrac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\leqslant x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ donc $\lim\limits_{(0,0)} g=0$.

3. $h(x,0)=1\xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $h(x,1/\ln(x))=\exp(1)\xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{e}$ donc h n'a pas de limite en $(0,0)$ (par unicité de la limite).

4. De $\forall t\in\mathbb{R}, |\sin(t)|\leqslant t$ (IAF pour sin en 0 par exemple...), on tire :

$$|j(x,y)|\leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant \sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \text{ donc } \lim_{(0,0)} j=0.$$

5. $|k(x,y)|\leqslant \dfrac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}\leqslant |x|+|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ donc $\lim\limits_{(0,0)} k=0$.

6. $m(x,y)=x\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$ or $\dfrac{1-\cos t}{t^2}=\dfrac{t^2/2+o\left(t^2/2\right)}{t^2}\xrightarrow[t\to 0]{}\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} m(x,y)=0$.

Exercice 343 *Fonctions définies par un taux de variation*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Soit $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{f(x^2+y^2) - f(0,0)}{x^2+y^2}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{F}(x, y)$.

2. Montrer que $\mathrm{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$ est continue.

Solution (**Ex.343** – *Fonctions définies par un taux de variation*)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. $\dfrac{f(t) - f(0)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} f'(0)$ par dérivabilité de f en 0, or $x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ par continuité des polynômes. Donc $\mathrm{F}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f'(0)$.

2. Soit $\mathrm{M} = (\alpha, \beta)$.
- Si $\alpha \neq \beta$, alors $\mathrm{G}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(\alpha,\beta)]{} \dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \mathrm{G}(\alpha, \beta) = \mathrm{G(M)}$.
- Si $\alpha = \beta$:
  Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y}$ entre x et y tel que :
  $\mathrm{G}(x, y) = f'(c_{x,y})$. Or lorsque $(x, y) \longrightarrow (\alpha, \alpha)$, $c_{x,y} \longrightarrow \alpha$, et f étant $\mathcal{C}^1$, $f'(c_{x,y}) \longrightarrow f'(\alpha)$. Donc $\mathrm{G}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(\alpha,\alpha)]{} f'(\alpha) = \mathrm{G(M)}$.
- Bilan : G est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 344 *Dérivabilité directionnelle et continuité*
Pour les deux fonctions suivantes, montrer qu'elles admettent des dérivées en $(0, 0)$ suivant toutes les directions, mais qu'elles ne sont pas continue en $(0, 0)$.

1. $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **2.** $g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Solution (**Ex.344** – *Dérivabilité directionnelle et continuité*)

1. Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
$\forall t \neq 0, \dfrac{f(tv) - f(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0.
Donc f admet des dérivées suivant toutes les directions en $(0, 0)$.
Mais $f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq f(0, 0)$ donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\forall t \neq 0, \dfrac{f(tv) - f(0)}{t} = \dfrac{t^3 a^2 b}{t^5 a^4 + t^3 b^2} = \dfrac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{a^2}{b}$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0.

Donc f admet des dérivées suivant toutes les directions en $(0,0)$.

Mais $f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \neq f(0,0)$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 345 *Continuité des dérivées*

Étudier si les deux fonctions suivantes sont continues, puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

1. $\forall (x,y) \neq 0, f(x,y) \overset{\text{déf.}}{=} (x^2 y^2) \ln\left(x^2 + y^2\right)$, et $f(0,0) = 0$,

2. $\forall (x,y) \neq 0, g(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$, et $g(0,0) = 0$

Solution (**Ex.345** – *Continuité des dérivées*)

1. • Par les théorèmes opératoires usuels, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En décomposant f pour lever les indéterminations :

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\left((x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)\right) \underset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$ car $\left|\dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\right| \leqslant x^2 + y^2 \underset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$ et $t \ln t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc f est continue en $(0,0)$ donc finalement sur $\mathbb{R}^2$.

• Par les théorèmes opératoires usuels, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^2} \underset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

L'application partielle $f_1 : x \mapsto f(x,0) = 0$ est dérivable en 0 de dérivée nulle donc $\dfrac{\partial x}{\partial f}(0,0)$ existe et vaut 0.

Comme $f(x,y) = f(y,x)$, il en est de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2. $\forall (x,y) \neq 0, g(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$, et $g(0,0) = 0$

• Par les théorèmes opératoires usuels, g est continue et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• Par la majoration classique $|\sin(t)| \leqslant |t| \quad (\forall t \in \mathbb{R})$,

$|g(x,y)| \leqslant \dfrac{|xy|}{|x| + |y|} \leqslant \dfrac{||(x,y)||_2^2}{||(x,y)||_2 / \sqrt{2}} \leqslant \sqrt{2}\, ||(x,y)||_2 \underset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$.

Donc g est continue en $(0,0)$.

• $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(t,0) - g(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} 0 = 0$, or

$$\forall x > 0, y > 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)(x+y) - \sin(xy)}{(x+y)^2}, \text{ et}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,x) = \frac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{4x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0$$

g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 346 *Une fonction définie par une intégrale*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \displaystyle\int_x^y \varphi(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner ses dérivées premières.

Solution (**Ex.346** – *Une fonction définie par une intégrale*)

Soit Φ la primitive de φ s'annulant en 0. Φ est $\mathcal{C}^1$ car $\Phi' = \phi$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \Phi(y) - \Phi(x)$ donc f admet des dérivées partielles premières :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\varphi(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y)$

Comme φ est continue, ces dérivées partielles sont continues donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 347 *Fonctions homogènes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ *homogène de degré* n, c'est-à-dire vérifiant : $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

1. Montrer que f vérifie : $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$.

2. Montrer que ses dérivées partielles sont elles aussi homogènes.

Solution (**Ex.347** – *Fonctions homogènes*)

1. Dérivons $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ par rapport à la variable t :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = nt^{n-1}f(x,y).$$
Il n'y a plus qu'à évaluer en $t = 1$...

2. Dérivons $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ par rapport à la variable x :
$$t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^n\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \text{ donc}$$
$$\forall t \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$
Cette relation demeure vraie pour $t = 0$ par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Donc $f\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction homogène de degré $n-1$.

Par symétrie du rôle de x et de y, il en est de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 348 *Exemple d'E.D.P. d'ordre 1*

En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$, trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\quad \partial_1 f(x,y) + \partial_2 f(x,y) = f(x,y).$

Solution (**Ex.348** – *Exemple d'E.D.P. d'ordre 1*)

- Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ solution de cette équation aux dérivées partielles.

On a : $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u + v \end{cases}$.

Soit $g : (u,v) \mapsto f(u, u+v)$: g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition. Par la règle de la chaîne :

$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u,u+v)\dfrac{\partial u}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u,u+v)\dfrac{\partial(u+v)}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u,u+v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u,u+v) =,$

et vue l'E.D.P.

$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(u,u+v) = g(u,v).$

Donc à v fixé, $u \mapsto g(u,v)$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$, il existe une $\mathrm{C}(v) \in \mathbb{R}$ telle que $g(u,v) = \mathrm{C}(v)\mathrm{e}^u$.

$\mathrm{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, v \mapsto \mathrm{C}(v) = g(0,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car g l'est.

Donc f s'écrit $f : (x,y) \mapsto g(u, y-x) = \mathrm{C}(y-x)\mathrm{e}^x$ où C est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Réciproquement, soit C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f : (x,y) \mapsto \mathrm{C}(y-x)\mathrm{e}^x$.

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par les théorèmes opératoires usuels et

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\mathrm{C}'(y-x)\mathrm{e}^x + \mathrm{C}(y-x)\mathrm{e}^x + \mathrm{C}'(y-x)\mathrm{e}^x = f(x,y).$

- Les solutions de cette E.D.P. sont exactement toutes les fonctions f s'écrivant $f : (x,y) \mapsto \mathrm{C}(y-x)\mathrm{e}^x$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 349 *Exemple d'E.D.P. d'ordre 2*

Soit $c \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$. En posant $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$, trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} f(x,t).$

Solution (**Ex.349** – *Exemple d'E.D.P. d'ordre 2*)

- Soit f une solution de cette équation aux dérivées partielle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ t = \dfrac{u-v}{2c} \end{cases}$

Soit $g : (u,v) \mapsto f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2c}\right)$. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) + \frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$$
$$-\frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) = 0.$$

Il existe deux fonctions C et D définies sur $\mathbb{R}$ telles que $g : (u,v) \mapsto \mathrm{C}(u) + \mathrm{D}(v)$. Et comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, C et D sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Alors $f : (x,t) \mapsto \mathrm{C}(x+ct) + \mathrm{D}(y - xt)$.

- Réciproquement, s'il existe deux fonctions C et D de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $f : (x,t) \mapsto \mathrm{C}(x+ct) + \mathrm{D}(x-ct)$, alors :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{C}'(x+ct) + \mathrm{D}'(x-ct)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \mathrm{C}''(x+ct) + \mathrm{D}''(x-ct)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = c\mathrm{C}'(x+ct) - c\mathrm{D}'(x-ct)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = c^2\mathrm{C}''(x+ct) + c^2\mathrm{D}''(x-ct)$,

et on a bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

- Bilan : les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ sont les fonctions f pour lesquels il existe deux fonctions C et D de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $f : (x,t) \mapsto \mathrm{C}(x+ct) + \mathrm{D}(x-ct)$.

Exercice 350 *Autre exemple d'E.D.P. d'ordre 2*

En posant $\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$, trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y) = 0.$$

Solution (**Ex.350** – *Autre exemple d'E.D.P. d'ordre 2*)

Analyse :

Soit f solution.

$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v - u \end{cases}$: on pose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto f(u, v-u)$ $\mathcal{C}^1$.

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, v-u) - \frac{\partial f}{\partial y}(u, v-u),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v-u) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v-u) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v-u) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v-u) = 0$$

Donc : $\exists \varphi, \psi$ $\mathcal{C}^2$ telles que $g(u,v) = u\varphi(v) + \psi(v)$.

Synthèse :

Soit $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ et $f : (x,y) \mapsto x\varphi(x+y) + \psi(x+y)$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(x+y) + x\varphi'(x+y) + \psi'(x+y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + \psi''(x+y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + \psi''(x+y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\varphi'(x+y) + \psi'(x+y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\varphi''(x+y) + \psi''(x+y),$$

et on a bien : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y) = 0$

Exercice 351 *Extrema sur un disque*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 + y^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les extrema globaux de f sur le disque $\mathrm{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$.

Solution (**Ex.351** – *Extrema sur un disque*)

1. f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$. $(0,0)$ est l'unique point critique, avec $f(0,0) = 0$, mais $f(x,0) = x^3$ est du signe de x donc
$\forall x > 0, f(x,0) > f(0,0)$ et $\forall x < 0, f(x,0) < f(0,0)$: pas d'extremum local en $(0,0)$.
Bilan : f n'a aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D le disque fermé de centre $\mathrm{O} = (0,0)$ et de rayon 2. Comme f est continue sur le fermé borné D, f y est bornée et atteint ses bornes. Ses bornes ne sont pas atteintes à l'intérieur du disque ouvert, car alors ces points constitueraient des extremums locaux (or il n'y en n'a pas).

Il faut donc chercher les extrema de f sur D sur le cercle frontière $\mathrm{C} \overset{\text{déf.}}{=} \{(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)/\alpha$
$[\,0\,;\,2\pi\,]\}$.
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$f(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) = 8\cos^3(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) = 8\cos^3(\alpha) + 4(1-\cos^2(\alpha)) = 4\mathrm{P}(\cos\alpha)$ où $\mathrm{P} = 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1$.
$\mathrm{P}' = 6\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = 2\mathrm{X}(3\mathrm{X}-1)$, P croît sur $[\,-1\,;\,0\,]$, décroît sur $[\,0\,;\,1/3\,]$ et croît sur $[\,1/3\,;\,1\,]$.
$\mathrm{P}(-1) = -2$, $\mathrm{P}(0) = 1$, $\mathrm{P}(1/3) = 26/27$ et $\mathrm{P}(1) = 2$.
Le maximum de P est 2, le minimum -2.
Sur la frontière, pour chaque point du cercle il existe $\alpha \in [\,0\,;\,2\pi\,[$ tel que $\mathrm{M} = (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$. Alors $f(\mathrm{M}) = 4\mathrm{P}(\cos(\alpha)) \in [\,-8\,;\,8\,]$ d'après 2.b)

De plus, $f(\mathrm{M}) = -8$ pour $\mathrm{P}(\cos(\alpha)) = -2$ donc pour $\cos(\alpha) = -1$, donc pour $\alpha = \pi$, donc pour $\mathrm{M} = (-2, 0)$.
De même, $f(\mathrm{M}) = 8$ pour $\mathrm{P}(\cos(\alpha)) = 2$ donc pour $\cos(\alpha) = 1$, donc pour $\alpha = 0$, donc pour $\mathrm{M} = (2, 0)$.
Les extremums de f sur D sont -8 et 8 atteints en $(-2, 0)$ et $(2, 0)$ respectivement.

Exercice 352 *Minimum suivant les droites et maximum suivant une parabole*
Soit f définie par $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$

1. Déterminer l'unique point critique de f.

2. a) Montrer que, pour (x, y) parcourant la droite d'équation $y = ax$, $f(x, y)$ atteint un minimum en $(0, 0)$.

b) Qu'en est-il lorsque (x, y) parcourt la parabole d'équation $y = 2x^2$?

3. a) Que peut-on en conclure ?

b) Réprésenter les régions du plan où f prend des valeurs positives (resp. négatives).

Solution (**Ex.352** – *Minimum suivant les droites et maximum suivant une parabole*)

1. f polynomiale donc $\mathcal{C}^1$.
$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (12x^3 - 8xy, -4x^2 + 2y) = (0, 0)$
$\Leftrightarrow (x(3x^2 - 2y), y - 4x^2) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$
Donc l'unique point critique de f est $(0, 0)$.

2. a) $f(x, ax) = x^2(3x^2 - 4ax + a^2)$ est positif au voisinage de 0. En effet :
- si $a = 0$, $f(x, ax) = 3x^4$;
- si $a \neq 0$, le trinôme $3x^2 - 4ax + a^2$ vaut $a^2 > 0$ en $x = 0$, donc est strictement positive au voisinage de 0. Ainsi lorsque (x, y) parcourt la droite Δ_a, $f(x, y)$ atteint un minimum local valant 0 en $(0, 0)$.

b) $f(x, 2x^2) = -x^4$ atteint un maximum valant 0 en $(0, 0)$.

3. a) f n'atteint pas d'extremum local en $(0, 0)$.

b) On vérifie que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$...
On trace les paraboles d'équation $\mathcal{P}_3 \ : \ y = 3x^2$ et $\mathcal{P}_1 \ : \ y = x^2$, lieux des points où f est nulle, puis on partitionne le plan suivant le signe de f dans chacune des zones délimitées.

Exercice 353 *Variance minimale, variance maximale*
Soit X une variable aléatoire telle que $\mathrm{X}(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. On pose $p_k \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ et on cherche pour quelles valeurs de p_1, p_2 et p_3 $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ est maximale, ou est minimale.

1. Montrer que ce problème se ramène à la recherche des extremums de
$$f : (p_1, p_2) \mapsto 4p_1 + p_2 - 4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2$$

sur le domaine fermé et borné $D = \{(p_1, p_2) \in [0\,;1]^2, p_1 + p_2 \leqslant 1\}$.

2. Résoudre le problème, et commenter les résultats.

Solution (**Ex.353** – *Variance minimale, variance maximale*)

1. En substituant $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ dans $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p_1 + 4p_2 + 9p_3 - (p_1 + 2p_2 + 3p_3)^2$, on obtient $\mathbb{V}(X) = 4p_1 + p_2 - 4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2 = f(p_1, p_2)$.
La condition $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ conduit au domaine D.

2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale sur l'intérieur de D.
$\nabla f(p_1, p_2) = (0, 0)$ conduit à un système linéaire sans solution. f n'a pas de point critique donc pas d'extremum à l'intérieur de D.
$g : x \mapsto x(1 - x)$ atteint son maximum sur $[0\,;1]$ qui vaut $1/4$ en $x = 1/2$, or $f(p_1, 0) = 4g(p_1)$, $f(0, p_2) = g(p_2)$ et $f(1 - p_2, p_2) = g(p_2)$ donc le maximum de f sur le bord de D est $4 \times \frac{1}{4} = 1$ obtenu pour $p_1 = 1/2$ et $p_2 = 0$.
$\mathbb{V}(X)$ est maximum pour $p_1 = p_3 = 1/2$ et $p_2 = 0$, c'est-à-dire $X \hookrightarrow \mathcal{U}\{1;3\}$: X prend équiprobablement les valeurs extrêmes, maximisant la variance.
$\mathbb{V}(X)$ est minimum pour $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0)$, $(p_1, p_2, p_3) = (0, 1, 0)$ ou $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$ c'est-à-dire lorsque X est constante, ce qui annule la variance.

Exercice 354 *Fonctions constantes dans une direction*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable.

1. On suppose

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y).$$

Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

2. Étudier la réciproque.

3. Déterminer toutes les fonctions vérifiant

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y).$$

On pourra poser $u = x$ et $v = y - x$.

Solution (**Ex.354** – *Fonctions constantes dans une direction*)

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque fixé et $g : t \mapsto f(x + t, y + t)$.
g est dérivable par composition et, d'après la relation supposée :
$\forall t \in \mathbb{R}, 0 = g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x + t, y + t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x + t, y + t)$.
En $t = 0$, on obtient la conclusion.

2. Soit (x, y) fixé et toujours $g : t \mapsto f(x+t, y+t)$.
Alors : $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) = 0$.
Donc g est constant et $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = g(0) = f(x, y)$... ce qui établit la réciproque.

3. Notons que $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u + v \end{cases}$ et ce changement est bijectif.
Analyse – Soit f solution, donc f est solution de l'EDP :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$
Soit $g : (u, v) \mapsto f(u, u+v)$, différentiable par composition.
$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u, u+v) \times 1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u, u+v) \times 1 = 0.$
Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $g(u, v) = \varphi(v)$.
Donc $f(x, y) = \varphi(y - x)$.
Synthèse – Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $f : (x, y) \mapsto \varphi(y - x)$.
Par composition, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et :
$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, f(x+t, y+t) = \varphi(y - t - x + t)\varphi(y - x) = f(x, y)$.
Conclusion – Les fonctions solutions sont les fonctions f telles qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(y - x)$.
On a déterminé les fonctions constantes suivant les parallèles de la première bissectrice.

Exercice 355 *Intégrale à paramètre ou E.D.P.*

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Montrer la constance de l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t.$$

2. a) À laide du changement de variables polaires, résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

b) En déduire que, si f est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t$ est constante.

Solution (**Ex.355** – *Intégrale à paramètre ou E.D.P.*)

1. Soit $g : \mathbb{R} \times [-\pi/2 ; \pi/2] \to \mathbb{R}, (r,t) \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$, $\mathcal{C}^1$ par composition.

- Pour tout $t \in [-\pi/2 ; \pi/2]$, $r \mapsto g(r,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition.
- Pour tout $r \in \mathbb{R}0+$, $t \mapsto g(r,t)$ est continue sur le segment $[-\pi/2 ; \pi/2]$, donc intégrable.
- Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = \cos t \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin t \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)$ est continue sur le segment $[-\pi/2 ; \pi/2]$.
- Pour $a > 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur le fermé borné $[-a ; a] \times [-\pi/2 ; \pi/2]$, donc est bornée. Donc il existe une constante M telle que :

$$\forall (r,t) \in [-a ; a] \times [-\pi/2 ; \pi/2] \leqslant \mathrm{M} = \varphi(t).$$

φ est continue et intégrable sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$, donc le théorème de dérivation sous l'intégrale assure que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a ; a]$, ceci pour tout $a > 0$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec :

$\forall r \in \mathbb{R}, \varphi'(r) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t,$

et par l'équation vérifiée par f :

$\forall r \in \mathbb{R}, r\varphi'(r) = 0.$

Ainsi : $\forall r \neq 0, \varphi'(r) = 0$, et comme φ' est continue, $\varphi'(0) = \lim\limits_{r \to 0} \varphi'(r) = 0$.

Bref, $\varphi' = 0$ et φ est constante, égale à $\varphi(0) = \pi f(0)$.

2. a) Utilisons le changement polaire bijectif :

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi/2 ; \pi/2[\\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ t = \operatorname{Arctan}(y/x) \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, et $g : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2 ; \pi/2[\to \mathbb{R}, (r,t) \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$, $\mathcal{C}^1$ par composition.

On a : $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\cos t + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\sin t$.

Donc f est solution de l'équation aux dérivées partielles si, et seulement si, $r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 0$, i.e. $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 0$, i.e. il existe g $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2 ; \pi/2[$ tel que $g(r,t) = g(r)$, i.e. $f(x,y) = g(\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x})$. En posant $\psi = g \circ \operatorname{Arctan}$ (ce qui équivaut à $\varphi = \psi \circ \tan$), f est solution de cette équation aux dérivées partielles si, et seulement si, il existe une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = \psi(y/x)$.

b) On a alors :

$\varphi(r) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi(\tan t)\mathrm{d}t$ qui ne dépend pas de r.

Exercice 356 *Fonctions harmoniques radiales*

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si, et seulement si, son laplacien

$$\Delta f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est nul.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^3$ et harmonique, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont aussi harmoniques.

2. On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varphi :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$.

a) Montrer que f est harmonique si, et seulement si, φ' est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

b) En résolvant cette équation, déterminer f.

Solution (**Ex.356** – *Fonctions harmoniques radiales*)

1. Remarquons que $\Delta\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial(\Delta f)}{\partial x}$. C'est une conséquence du théorème de Schwarz : $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

La linéarité de la dérivation donne bien $\Delta\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial(\Delta f)}{\partial x} = 0$.

Enfin :

$$\Delta\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= x\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \Delta f = 0.$$

2. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\varphi'(x^2+y^2)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2) + 2x^2\varphi''(x^2+y^2)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2) + 2y^2\varphi''(x^2+y^2)$,

donc :

$\Delta f = 0 \Leftrightarrow \forall (x,y) \neq (0,0), \varphi'(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\varphi''(x^2+y^2)$,

d'où :

$$\Delta f = 0 \Leftrightarrow \forall r > 0, r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0.$$

b) On résout sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle $xy'+y=0$.
Les solutions sont $y : x \mapsto \lambda/x$ où $k \in \mathbb{R}$.
Donc $\varphi(x) = \lambda \ln(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Donc les fonctions harmoniques radiales sont les fonctions

$$f(x, y) = \lambda \ln(x^2 + y^2) + \mu$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

Exercice 357 *EDP et changement polaire*
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonction $f :]0\,;+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Solution (**Ex.357** – *EDP et changement polaire*)
On utilise le changement $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0\,;+\infty[\times \mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[\times]-\pi/2\,;\pi/2[$.

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ t = \operatorname{Arctan}(y/x) \end{cases}$$

Soit f $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[\times \mathbb{R}$ et $g :]0\,;+\infty[\times]-\pi/2\,;\pi/2[\to \mathbb{R}, f(r\cos t, r\sin t)$.
g est $\mathcal{C}^1$ par composition et

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r, t) = r\cos t\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + r\sin t\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t).$$

Alors f est solution de (E) ssi $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, t) = 0$ ssi il existe h $\mathcal{C}^1$ telle que $g(r, t) = h(t)$.
Donc f est solution de (E) ssi il existe φ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \varphi(\operatorname{Arctan}(y/x))$.

Exercice 358 *EDP et changement polaire*
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonction $f :]0\,;+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Solution (**Ex.358** – *EDP et changement polaire*)
On utilise le changement $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0\,;+\infty[\times \mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[\times]-\pi/2\,;\pi/2[$.

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ t = \operatorname{Arctan}(y/x) \end{cases}$$

Soit f $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[\times\mathbb{R}$ et $g :]\,0\,;\,+\infty\,[\times]-\pi/2\,;\,\pi/2\,[\to\mathbb{R}, f(r\cos t, r\sin t)$. g est $\mathcal{C}^1$ par composition et

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) = r\cos t\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + r\sin t\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t).$$

Alors f est solution de (E) ssi $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 1$ ssi il existe h $\mathcal{C}^1$ telle que $g(r,t) = r + h(t)$. Donc f est solution de (E) ssi il existe φ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(\operatorname{Arctan}(y/x))$.

$\boxed{\textbf{Exercice 359}}$ *EDP du second ordre*

1. Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u = xy, v = x/y)$. Montrer que φ est une bijection de $]\,0\,;\,+\infty\,[^2$ dans lui-même.
2. Déterminer les fonctions $f :]\,0\,;\,+\infty\,[^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ vérifiant : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Solution (**Ex.359** – *EDP du second ordre*)

1. $\forall (u,v,x,y) \in]\,0\,;\,+\infty\,[^4, (u,v) = \varphi(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{cases}$

   donc φ est une bijection de $]\,0\,;\,+\infty\,[^2$ sur lui-même de bijection réciproque φ^{-1} : $(u,v) \mapsto \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\dfrac{u}{v}}\right)$.

2. • *Analyse* - Soit f une solution de cette équation aux dérivées partielles.
   Soit $g :]\,0\,;\,+\infty\,[^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) = f\circ\varphi^{-1}(u,v)$.
   Comme f et φ^{-1} sont $\mathcal{C}^2$, g l'est par composition.
   $\forall (u,v) \in]\,0\,;\,+\infty\,[^2$,

   $$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\partial_1 f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}}\partial_2 f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$$

   $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = &\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{uv}}\partial_1 f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) + \frac{1}{4}\partial_{1,1}^2 f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) \\ &-\frac{1}{4}\frac{1}{v\sqrt{uv}}\partial_2 f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) - \frac{1}{4}\frac{1}{v^2}\partial_{2,2}^2 f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})\end{aligned}$$

   car les dérivées $\partial_{1,2} f$ se simplifient.
   Comme f est solution de l'équation :

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$: à v fixé, $u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Les solutions de l'EDL homogène $y' - \dfrac{1}{2x}y = 0$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ étant les fonctions $x \mapsto k\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$, il existe $\varphi :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ telle que :
$\forall (u,v) \in]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \varphi(v)\sqrt{u}.$

Comme $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\cdot}}$ sont $\mathcal{C}^1$, φ est $\mathcal{C}^1$.

En primitivant par rapport à v, il existe $\psi :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ telle que :
$\forall (u,v) \in]\,0\,;\,+\infty\,[\,, g(u,v) = \Phi(v)\sqrt{u} + \psi(u),$
où Φ est une primitive de φ, donc de classe $\mathcal{C}^2$. Comme g, Φ et $\sqrt{\cdot}$ sont $\mathcal{C}^2$, ψ est $\mathcal{C}^2$.

- *Réciproquement,* si $\Phi, \psi :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, alors :
(i) $f :]\,0\,;\,+\infty\,[^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \Phi\big(\dfrac{x}{y}\big)\sqrt{xy} + \psi(xy)$ est de classe $\mathcal{C}^2$;
(ii) f vérifie $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

- Conclusion : les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ vérifiant $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sont toutes les fonctions telles qu'il existe $\Phi, \psi :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :
$\forall (x,y) \in]\,0\,;\,+\infty\,[^2\,, f(x,y) = \Phi\big(\dfrac{x}{y}\big)\sqrt{xy} + \psi(xy)$ (fastidieux, mais ça marche).

Exercice 360 *Minimum global sur un ouvert*

Soit $a > 0$. Soit $f :]\,0\,;\,+\infty\,[^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + y + \dfrac{a}{xy}$.

Montrer que f admet un minimum global strict sur $]\,0\,;\,+\infty\,[^2$.
f est-elle majorée ?

Solution (**Ex.360** – *Minimum global sur un ouvert*)

- Le seul point critique est (α, α) avec $\alpha = \sqrt[3]{a}$.
- $\forall (x,y) \in]\,0\,;\,+\infty\,[^2\,, f(x,y) - f(\alpha,\alpha) = \dfrac{x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy}{xy}.$

Soit (x,y) fixé. Soit $g :]\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto x^2y + xy^2 + t^3 - 3txy.$
$g'(t) = 3t^2 - 3xy$, donc g admet un minimum global, atteint en $t = \sqrt{xy}$, et valant :
$g(\sqrt{xy}) = xy(x + y - 2\sqrt{xy}) = xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$, donc :

$$\forall (x,y) \in]\,0\,;\,+\infty\,[^2\,, f(x,y) - f(\alpha,\alpha) = g(\alpha) \geqslant 0,$$

avec égalité si, et seulement si, $g(\alpha) = 0$, i.e. $\alpha = \sqrt{xy}$ et $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, i.e. $x = y = \alpha$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, y) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \dfrac{a}{x^2} = +\infty$ donc f n'est pas majorée.

$\boxed{\textbf{Exercice 361}}$ *Extremums sur un fermé borné*
Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$, $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ trois réels, et

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^a y^b (1 - x - y)^c.$$

1. Justifier que f est bornée sur $\mathcal{D}$, et atteint ses bornes.

2. Déterminer $\min\limits_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y)$ et $\max\limits_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y)$.

Solution (**Ex.361** – *Extremums sur un fermé borné*)

1. Comme $f_1 : (x, y) \mapsto x$, $f_2 : (x, y) \mapsto y$ et $f_3 : (x, y) \mapsto x + y$ sont continues, $\mathcal{D} = \{(x, y)/f_1(x, y) \geqslant 0\} \cap \{(x, y)/f_2(x, y) \geqslant 0\} \cap \{(x, y)/f_3(x, y) \leqslant 1\}$ est fermé car intersection de fermés.
$(x, y) \in \mathcal{D} \Rightarrow (|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1) \Rightarrow ||(x, y)||_1 \leqslant 1$, donc $\mathcal{D}$ est borné.
Pour tout $\alpha > 0$, $t \mapsto t^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln(t)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue, donc f est continue comme produit de fonctions continues.
Ainsi, f est continue sur le fermé borné $\mathcal{D}$ donc est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{D}$.

2. • $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) \geqslant 0$.
En notant $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathcal{D}/x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } x + y = 1\}$ la frontière de $\mathcal{D}$, on a : $\forall (x, y) \in \mathcal{F}, f(x, y) = 0$.
Donc le minimum de f sur $\mathcal{D}$ est 0, et est atteint en tout point de la frontière de $\mathcal{D}$.
• Comme f n'est pas la fonction nulle, son maximum est strictement positif et est atteint à l'intérieur de $\mathcal{D}$, et comme f est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathrm{U} = \overset{o}{\mathcal{D}}$, intérieur de $\mathcal{D}$, donc en un point critique.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^{a-1} y^b (1 - x - y)^{c-1} \big(a(1 - x - y) - cx\big)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^a y^{b-1} (1 - x - y)^{c-1} \big(b(1 - x - y) - cy\big)$,
donc f a un unique point critique :

$$\left(\frac{a}{a + b + c}, \frac{b}{a + b + c} \right).$$

Le maximum de f sur $\mathcal{D}$ est nécessairement atteint en ce point (et uniquement en ce point, ce qui en fait un maximum strict).

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \max_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x,y) = \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 362}}$ *Extremum à deux variables*
Soit $f(x,y) \mapsto x\ln y - y\ln x$.
Préciser le domaine de définition de f et étudier l'existence d'extrema.

Solution (**Ex.362** – *Extremum à deux variables*)

1. $\mathcal{D}_f =]\,0\,;\,+\infty\,[^2$.

2. • f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.

• Soit (x,y) un point critique de f.

$$\triangledown f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln y = \dfrac{y}{x} \\ \ln x = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

En particulier, $\ln y > 0$ donc $y > 1$.

$$\triangledown f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{\ln y} \\ \ln \dfrac{y}{\ln y} = \dfrac{1}{\ln y} \end{cases} \Rightarrow \ln y - \ln\ln y - \frac{1}{\ln y} = 0.$$

Étudions de $g : t \mapsto t - \ln t - \dfrac{1}{t}$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

$g' : t \mapsto \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2} > \dfrac{(t-1)^2}{t^2} \geqslant 0$ donc g est strictement croissante, et comme $g(1) = 0$, 1 est l'unique racine de g sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Donc $y = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ et $x = \mathrm{e}$.

• Réciproquement, $\triangledown f(\mathrm{e},\mathrm{e}) = (0,0)$.

• Donc (e,e) est l'unique point critique que f, donc s'il existe un extremum, il est nécessairement atteint en (e,e).

• $f(\mathrm{e},\mathrm{e}) = 0$.

$f(\mathrm{e}+h,\mathrm{e}) = \mathrm{e} + h - \mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}+h)) = \dfrac{h^2}{2\mathrm{e}} + o\left(h^2\right)$ est positif au voisinage de 0 et

$f(\mathrm{e},\mathrm{e}+k) = \mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}+k)) - (\mathrm{e}+k) = -\dfrac{k^2}{2\mathrm{e}} + o\left(k^2\right)$ est négatif au voisinage de 0 : il n'y a pas d'extremum en (e,e), donc f n'a aucun extremum sur $\mathcal{D}_f$.

$\boxed{\textbf{Exercice 363}}$ *Recherche d'extremum*
Soit $f :]\,0\,;\,+\infty\,[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$.
Déterminer les extrema locaux de f sur $]\,0\,;\,+\infty\,[\times \mathbb{R}$

Solution (**Ex.363** – *Recherche d'extremum*) • f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D} =]\,0\,;\,+\infty\,[\times \mathbb{R}$ par les propriétés algébriques classiques.

• $\triangledown f(x,y) = (\ln^2 x + 2\ln x + y^2, 2xy)$ et comme $x \neq 0$,
$\triangledown f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } \ln^2 x + 2\ln x = 0) \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } \ln x(\ln x + 2) = 0)$
$\Leftrightarrow ((x,y) = (1,0) \text{ ou } (x,y) = (\mathrm{e}^{-2}, 0))$.
f possède deux points critiques : $\mathrm{A} = (1,0)$ et $\mathrm{B} = (\mathrm{e}^{-2}, 0)$.
• $\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, f(x,y) \geqslant 0$ or $f(1,0) = 0$, donc minimum global en $(1,0)$.
• Avec un D.L. à l'ordre 2 en h : $f(e^{-2}+h, 0) - f(e^{-2}, 0) = -\mathrm{e}^2 h^2 + o(h^2)$, donc est négative strictement au voisinage de 0, tandis que : $f(e^{-2}, h) - f(e^{-2}, 0) = \mathrm{e}^{-2} h^2 + o(h^2)$, donc est positive strictement au voisinage de 0, donc il n'y a pas d'extremum.

Chapitre 16

Géométrie différentielle

$\boxed{\textbf{Exercice 364}}$ *Exemple de courbe de Lissajous*

On considère l'arc γ défini par

$$\gamma : t \mapsto \big(\sin(2t), \sin(3t)\big).$$

1. Montrer que le tracé du support de γ peut se déduire de l'étude de γ sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$.

2. Effectuer le tracé de ce support en précisant en quels points le support possède-t-il une tangente horizontale ? Verticale ?

3. Proposer un script Python effectuant ce tracé.

Solution (**Ex.364** – *Exemple de courbe de Lissajous*)

On considère l'arc γ défini par

$$\gamma : t \mapsto \big(\sin(2t), \sin(3t)\big).$$

1. • $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t+2\pi) = \gamma(t)$ donc on peut restreindre l'étude à un intervalle longueur 2π.

• $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t+\pi) = (\sin(2t+2\pi), \sin(3t+3\pi)) = (x(t), -y(t))$ donc le tracé sur $[\,\pi/2\,;\,3\pi/2\,]$ se déduite de celui sur $[\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,]$ par une symétrie d'axe $(\mathrm{O}x)$.

• $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(-t) = (\sin(-2t), \sin(-3t)) = (-x(t), -y(t))$ donc le tracé sur $[\,-\pi/2\,;\,0\,]$ se déduite de celui sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ par une symétrie de centre O.

Ainsi le tracé du support de γ peut se déduire de l'étude de γ sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$.

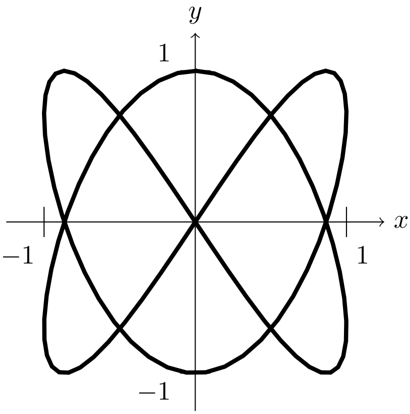
2. γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ avec

$\forall x \in [\,0\,;\,\pi/2\,], \quad \gamma'(t) = (2\cos(2t), 3\cos(3t))$.

Le tableau des variations de x et y est alors :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		

On commence par place les deux tangentes horizontales en $\gamma(\pi/6) = (1/2, 1)$ et $\gamma(\pi/2) = (0, -1)$ et la tangente verticale en $\gamma(\pi/4) = (1, \sqrt{2}/2)$.
On complète le tracé sur $[\,0\,;\,\pi/2\,]$ en respectant les variations, puis on complète grâce aux deux symétries.



3.
```
import numpy as np
import pylab as pl

t=np.linspace(0,2*np.pi,201)
xt=np.sin(2*t)
yt=np.sin(3*t)

pl.title('Courbe de Lissajous')
pl.plot(xt,yt,linewidth=2,color='black')
pl.show()
```

```
pl.close()
```

Exercice 365 *L'astroïde*

On considère la courbe Γ définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

1. a) Montrer que le tracé peut se déduire de l'étude sur $[0\,;\pi/4]$.

b) Déterminer $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$. Que peut-on en déduire ?

c) Donner une équation de la tangente au point $t = \pi/4$, puis tracer Γ.

2. Proposer un script Python effectuant ce tracé.

3. a) Soit M un point régulier de Γ, P et Q les points d'intersections de la tangente à Γ en M avec les axes des abscisses et des ordonnées respectivement. Montrer que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\| = 1$.

b) En déduire un moyen de représenter une astroïde avec une feuille, un stylo et une allumette.

Solution (**Ex.365** – *L'astroïde*)

1. a) Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

- $\forall t \in \mathbb{R}, f(t+2\pi) = f(t)$: on peut se limiter à l'étude sur $[-\pi\,;\pi]$.
- $\forall t \in [-\pi\,;\pi], f(-t) = (x(t), -y(t))$: on peut se limiter à l'étude sur $[0\,;\pi]$ par symétrie par rapport à $(\mathrm{O}x)$.
- $\forall t \in [0\,;\pi], f(\pi - t) = (-x(t), y(t))$: on peut se limiter à l'étude sur $[0\,;\pi/2]$ par symétrie par rapport à $(\mathrm{O}y)$.
- $\forall t \in [0\,;\pi], f(\pi/2 - t) = (y(t), x(t))$, symétrique de $(x(t), y(t))$ par rapport à la première bissectrice Δ d'équation $y = x$: on peut se limiter à l'étude sur $[0\,;\pi/4]$ par symétrie par rapport à Δ.

b) Remarquons que le point $f(0) = (1, 0)$ est le seul point non régulier sur $[0\,;\pi.2]$.

On peut préciser le comportement de la tangente en observant que :

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{-\frac{3}{2}t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0^-,$$

donc l'arc à une demi-tangente horizontale dirigé vers la gauche en $(1, 0)$.

c) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :

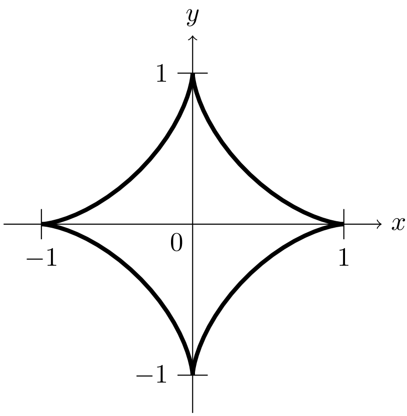
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t).$$

On obtient le tableau de variations simultanées suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$+$	

La tangente en $f(\pi/4) = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$ a pour vecteur directeur $(-3\sqrt{2}/4, 3\sqrt{2}/4)$, soit un coefficient directeur valant -1.

On effectue le tracé sur $[\,0\,;\,\pi/4\,]$ en respectant les variations, puis on complète grâce aux symétries.



2.
```
import numpy as np
import pylab as pl

t=np.linspace(0,2*np.pi,201)
xt=np.cos(t)**3
yt=np.sin(t)**3

pl.title("L'astroïde")
pl.plot(xt,yt,linewidth=2,color='black')
pl.show()
```

```
pl.close()
```

3. a) Soit t tel que $\gamma'(t) \neq 0$ et $\mathrm{M} = \gamma(t)$. L'équation de la tangente $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}$ en M est

$(y - \sin^3(t))(-3\cos^2 t \sin t) = (x - \cos^3(t))(3\sin^2 t \cos t)$

$\Leftrightarrow y = -\tan t(x - \cos^3 t) + \sin^3 t$

On prend alors $\mathrm{P} = \mathcal{T}_{\mathrm{M}} \cap (\mathrm{O}x) = (\cos t, 0)$ et $\mathrm{Q} = \mathcal{T}_{\mathrm{M}} \cap (\mathrm{O}x) = (0, \sin t)$, on a effectivement

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\| = \sqrt{(-\cos(t))^2 + \sin^2 t} = 1.$$

b) En déduire un moyen de représenter une astroïde avec une feuille, un stylo et une allumette.

Plions proprement la feuille en quatre, puis déplions-la pour faire apparaître deux axes orthogonaux. On prend comme unité l'allumette, et on trace des segments obtenus appuyant les extrémités de l'allumette sur les axes (on trace des tangentes à Γ...). L'astroïde est la courbe qui vient s'appuyer sur ces segments.

Exercice 366 *Exemple de folium*

Étudier et représenter la courbe Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t-t^3}{1+t^2}\right)$$

Solution (**Ex.366** – *Exemple de folium*)

• $\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc on obtient l'arc pour $t \in \mathbb{R}^-$ par symétrie par rapport à $(\mathrm{O}x)$ de l'arc obtenu pour $t \in \mathbb{R}^+$.

• γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec :

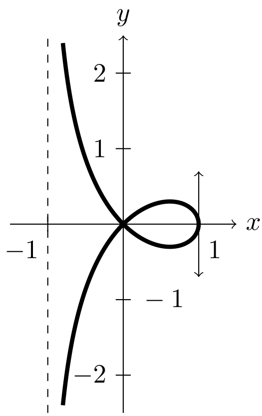
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma'(t) = \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{-t^4 - 4t^2 + 1}{(1+t^2)^2}\right).$$

$x'(t)$ s'annule uniquement pour $t = 0$ et $y'(t)$ s'annule pour $t^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{20}}{-2} = -2 \pm \sqrt{5}$, c'est-à-dire uniquement pour $\alpha = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$.

On obtient le tableau de variations simultanées :

t	0		α		$+\infty$
$x'(t)$	0		$+$		
$x(t)$	1	$\searrow$	$x(\alpha)$	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$y(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

La tangente en $\gamma(0) = (1, 0)$ est verticale, la tangente en $\gamma(\alpha) = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}(1, \alpha) \simeq (0,62; 0,30)$ est horizontale, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale lorsque t tend vers $+\infty$, $y(t)$ tendant vers $-\infty$.



Exercice 367 *Exemple de lieu géométrique*

1. Étudier et représenter la courbe définie par
$$\begin{cases} x = 4t^3 \\ y = 3t^4 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

2. a) Former une équation de la tangente au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer un paramétrage du lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la courbe précédente orthogonales l'une à l'autre.

c) Tracer ce lieu de points.

Solution (**Ex.367** – *Exemple de lieu géométrique*)

$$\begin{cases} x(t) = 4t^3 \\ y(t) = 3t^4 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

• $\forall t \in \mathbb{R},\quad x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc on obtient l'arc pour $t \in \mathbb{R}^-$ par symétrie par rapport à $(\mathrm{O}y)$ de l'arc obtenu pour $t \in \mathbb{R}^+$.

• γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma'(t) = \big(12t^2, 12t^3\big).$$

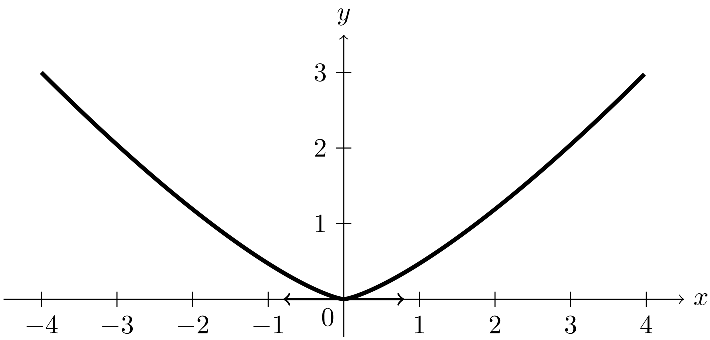
On obtient le tableau de variations simultanées :

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

• Seul le point de $(0,0)$ de paramètre $t = 0$ n'est pas régulier mais

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{3}{4} t \xrightarrow[t \to 0]{} 0,$$

donc il y a une tangente horizontale en $(0,0)$.



1. a) Pour $t \neq 0$, la tangente $\mathcal{T}_{\mathrm{M}(t)}$ au point M de paramètre t est

$$\mathcal{T}_{\mathrm{M}(t)} : \quad tx - y = t^4,$$

équation d'ailleurs encore valable pour $t = 0$ ($\mathcal{T}_{\mathrm{O}} :\ y = 0$).

b) Cherchons les points d'où l'on peut mener deux tangentes à la courbe précédente orthogonales l'une à l'autre.

Comme l'unique tangente horizontale est en O pour $t = 0$, et l'arc n'a pas de tangente verticale, on peut restreindre la recherche à $t \neq 0$.

- *Analyse*

Soit M(t) et N(τ) deux points pour lesquels les tangentes sont orthogonales l'une à l'autre . Comme des vecteurs directeurs de ces tangentes sont respectivement $(1, t)$ et $(1, \tau)$, l'orthogonalité est équivalente à : $1 + t\tau = 0$ (... on retrouve au passage $t \neq 0$,$\tau \neq 0$...).

Si tel est le cas, le point passant d'intersection $\mathrm{I} = (x, y)$ est solution de

$$\begin{cases} tx - y = t^4 \\ -\dfrac{1}{t}x - y = \dfrac{1}{t^4} \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$\begin{cases} x = t^3 - t - \dfrac{1}{t^3} + \dfrac{1}{t} \\ y = -t^2 + 1 - \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

- *Synthèse*

Comme on a en fait raisonné par équivalence, le lieu cherché est

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - t - \dfrac{1}{t^3} + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = -t^2 + 1 - \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}^*).$$

c) • $\forall t \neq 0, x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ permet de réduire à $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par symétrie par rapport à (Oy).

• $\forall t > 0, x(1/t) = -x(t)$ et $y(1/t) = y(t)$ permet de réduire à $]\,0\,;\,1\,]$ car on parcourt deux fois le support (même symétrie que précédemment).

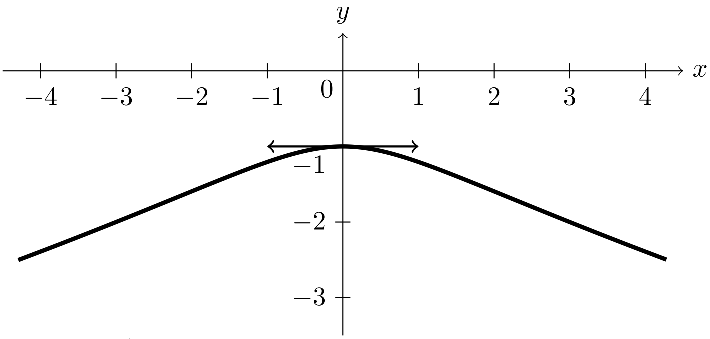
• Cet arc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ avec :

$$\forall t \in \,]\,0\,;\,1\,], \qquad \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 + \dfrac{3}{t^4} - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{3t^6 - t^4 + 3 - t^2}{t^4} = \dfrac{(1+t^2)(3t^4 - 4t^2 + 3)}{t^4} \\ y(t) = -2t + \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{2(1 - t^4)}{t^3} \end{cases}$$

On obtient le tableau de variations simultanées :

t	0		1
x'	$\Vert$	$+$	6
x	$-\infty$	$\nearrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1
y'	$\Vert$	$+$	0

Par la symétrie précédemment évoquée :



$$\begin{cases} x(t) = t^3 - t - \dfrac{1}{t^3} + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = -t^2 + 1 - \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}^*).$$

Exercice 368 *Tangente à une courbe définie implicitement*

1. *Question préliminaire* – Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Soit a un point de I tel que $f''(a) > 0$.
À l'aide du développement limité à l'ordre 2 de f en a, montrer que la tangente à la courbe de f est située en-dessous de la courbe au voisinage de a.
Qu'en est-il si $f''(a) < 0$.

Soit
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 2xy + 2y^2 - 1.$$
On note Γ la courbe d'équation cartésienne : $f(x, y) = 0$.

2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à Γ en $(1, 1)$.
Dans la suite de l'exercice, on souhaite préciser la position relative de $\mathcal{T}$ et Γ.

3. a) Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique au point $(1, 1)$, et énoncer sa conclusion.

b) Soit φ une fonction implicitement définie par « $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ » au voisinage de $(1, 1)$. En dérivant la relation $f(x, \varphi(x)) = 0$, retrouver une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à Γ en $(1, 1)$.

c) Justifier que φ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 1, puis déterminer la position relative de $\mathcal{T}$ et Γ.

Solution (**Ex.368** – *Tangente à une courbe définie implicitement*)

1. DL : $f(x) = f(a) + f'(x)(x - a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o\big((x - a)^2\big)$
Équation de $\mathcal{T}$: $y = f'(x)(x - a) + f(a)$.
Signe de la différence :

$f(x)-y=(x-a)^2\Big(\dfrac{f''(a)}{2}+\varepsilon(x-a)\Big)$ avec $\varepsilon(x-a)\xrightarrow[x\to a]{}0$.

En prenant $\dfrac{f''(a)}{4}>0$ dans la définition de la limite :

$\exists\eta>0,\big(x\in\,]\,a-\eta\,;\,a+\eta\,[\,\big)\Rightarrow|\varepsilon(x-a)|\leqslant\dfrac{f''(a)}{4}\Rightarrow\varepsilon(x-a)\geqslant-\dfrac{f''(a)}{4}$

Ainsi, $\forall x\in\,]\,a-\eta\,;\,a+\eta\,[\,,f(x)-y\geqslant(x-a)^2\dfrac{f''(a)}{4}\geqslant0$: $\mathcal{T}$ est située en-dessous de Γ au voisinage de a.

Si $f''(a)<0$, un raisonnement analogue montre que $\mathcal{T}$ est située au-dessus de Γ au voisinage de a.

2. f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ et $\bigtriangledown f(x,y)=(3x-2y,-2x+4)$, donc $\bigtriangledown f(1,1)=(1,2)\neq(0,0)$: $(1,1)$ n'est pas un point singulier.

D'après le cours, une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$$1\times(x-1)+2\times(y-1)=0,\text{ i.e }x+2y-3=0.$$

3. a) f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2x+4y$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=2\neq0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe deux intervalles ouverts I et J contenant 1 et une fonction $\varphi:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$\forall(x,y)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J},\quad f(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x).$$

b) $\forall x\in\mathrm{I},f(x,\varphi(x))=0$, donc $x^3-2x\varphi(x)+2\varphi(x)^2-1=0$.

En dérivant : $\forall x\in\mathrm{I},3x^2-2\varphi(x)-2x\varphi'(x)+4\varphi(x)\varphi'(x)=0$.

En $x=1$, $\varphi(1)=1$ et $1+2\varphi'(1)=0$, i.e. $\varphi'(1)=-1/2$.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$:

$$y=\varphi'(1)(x-1)+\varphi(1),\text{ i.e. }y=-\frac{1}{2}(x-1)+1,\text{ i.e. }x+2y-3=0$$

c) • De la relation précédent on tire : $(4\varphi(x)-2x)\varphi'(x)=2\varphi(x)-3x^2$, et comme $4\varphi(1)-2=2\neq0$, $x\mapsto4\varphi(x)-2x$ (qui est continue) ne s'annule pas sur un voisinage de 1.

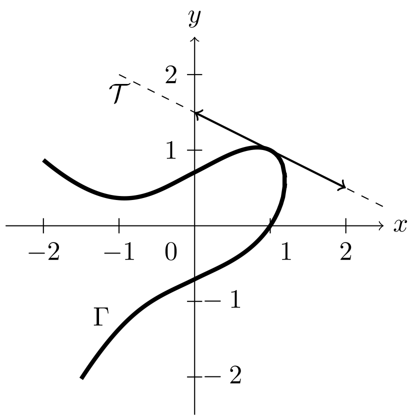
Donc $\varphi'(x)=\dfrac{2\varphi(x)-3x^2}{4\varphi(x)-2x}$ au voisnage de 1 et φ est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 1.

• En dérivant la relation : $3x^2-2\varphi(x)-2x\varphi'(x)+4\varphi(x)\varphi'(x)=0$,

$6x-2\varphi'(x)-2\varphi'(x)-2x\varphi''(x)+4\varphi'(x)^2+4\varphi(x)\varphi''(x)=0$.

En se plaçant en $x=1$:$\varphi''(1)=-9/2$.

Comme $\varphi''(1)<0$, la tangente $\mathcal{T}$ est située au-dessus de la courbe Γ, d'après la première question.



$\boxed{\textbf{Exercice 369}}$ *Construction d'une courbe donnée implicitement*
Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x(x+1)^2 - y^2.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

1. $\mathcal{C}$ est-elle une partie fermé ou ouverte de $\mathbb{R}^2$?

2. a) Montrer que $\mathcal{C}$ possède un unique point A d'abscisse strictement négative que l'on précisera.

b) Soit $\mathcal{D}$ le disque ouvert de centre A et de rayon 1. Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Comment peut-on qualifier le point A ?

3. a) Déterminer, s'il en existe, les points de $\mathcal{C}$ distincts de A en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ passe par A.

b) Montrer que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe de abscisses.

4. a) Quels sont les points de $\mathcal{C}$ au voisinage desquels il est possible, d'après le théorème des fonctions implicites, d'exprimer y en fonction de x ?

b) Donner explicitement une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, y = \varphi(x).$$

c) φ est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

5. a) $\mathcal{C}$ possède-t-elle une tangente en $(0, 0)$? Si oui, la préciser.

b) Tracer $\mathcal{C}$.

Solution (**Ex.369** – *Construction d'une courbe donnée implicitement*)

1. f est polynomiale donc continue, et par conséquent $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

2. a) Pour $x \neq -1$, $(x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{(x+1)^2} \geqslant 0$. Donc s'il existe un point d'abscisse strictement négative, cette abscisse vaut -1.

$(-1, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, donc $\mathcal{C}$ possède un unique point d'abscisse strictement négative : $\mathrm{A} = (-1, 0)$.

b) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-(-1))^2 + (y-0)^2 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 + y^2 < 1\}$.

$(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} x(x+1)^2 - y^2 = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 < 1 \end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} (x+1)^3 < 1 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x < 0 \Rightarrow x(x^2+3x+3) < 0 \Rightarrow x < 0$ car le trinôme est strictement positif ($\Delta = -3$).

Par la question précédente, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{\mathrm{A}\}$: A est un point isolé de la courbe.

3. a) f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = (3x^2 + 4x + 1, -2y)$

Soit $\mathrm{B} = (a,b) \in \mathcal{C}$. L'équation de la tangente $\mathcal{T}_{\mathrm{B}}$ à $\mathcal{C}$ en (a,b) est :

$$(3a^2 + 4a + 1)(x-a) - 2b(y-b) = 0.$$

$\mathrm{A} \in \mathcal{T}_{\mathrm{B}} \Leftrightarrow (3a^2 + 4a + 1)(-1-a) + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow 3a^3 + 7a^2 + 5a + 1 = 2b^2 (\heartsuit)$.

Comme $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$, $b^2 = a^3 + 2a^2 + a (\diamondsuit)$.

$\heartsuit \& \diamondsuit \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 0 \Rightarrow (a+1)^3 = 0 \Rightarrow a = -1$.

Donc $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ (unique point à abscisse strictement négative), ce qui est exclu. Aucune tangente à $\mathcal{C}$ ne passe par A.

b) Soit $\mathrm{M} = (x,y) \in \mathcal{C}$ un point quelconque de la courbe et $\mathrm{M}' = (x,-y)$ son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

$f(x,-y) = x(x+1)^2 - (-y)^2 = x(x+1)^2 - y^2 = f(x,y) = 0$ donc $\mathrm{M}' \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

4. a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$ donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites en tout point tel que $y \neq 0$, i.e. tel que $x(x+1)^2 \neq 0$ et $y \neq 0$, c'est-à-dire en tout point de $\mathcal{C}$ sauf $\mathrm{A} = (-1,0)$ et $\mathrm{O} = (0,0)$.

b) $(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)^2 - y^2 = 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{x(x+1)^2} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}(x+1)$

$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{x}(x+1)$ convient.

c) φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ mais pas sur $\mathbb{R}^+$:

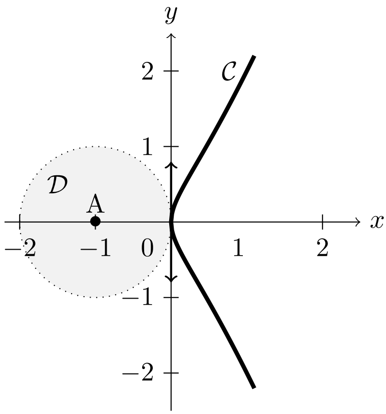
$\forall x \neq 0, \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$: φ n'est pas dérivable en 0.

5. a) $\nabla f(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$ donc $\mathcal{C}$ admet une tangente d'équation :

$1 \times (x-0) + 0 \times (y-0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

c'est-à-dire que la tangente en $(0,0)$ est l'axe des ordonnées... ce que laissait présager la limite précédente.

b) Ça ressemble à ça :



$\boxed{\textbf{Exercice 370}}$ *Premier avril*

On considère l'arc γ défini par

$$\gamma : t \mapsto \big(\cos(t) + 3\cos(t/2), \sin(t)\big).$$

1. Montrer que le tracé du support de γ peut se déduire de l'étude de γ sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$. *Attention !!! γ n'est pas $2\pi-$périodique !!!*

2. Effectuer le tracé de ce support en précisant en les tangentes horizontales, verticales ainsi que les points doubles.

Solution (**Ex.370** – *Premier avril*)

On note : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \cos(t) + 3\cos(t/2)$ et $y(t) = \sin(t)$.

1. • $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t + 4\pi) = \gamma(t)$ donc on peut restreindre l'étude à un intervalle longueur 4π.

• $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(-t) = (x(t), -y(t))$ donc le tracé sur $[\,-2\pi\,;\,0\,]$ se déduit de celui sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$ par une symétrie d'axe Ox.

Ainsi le tracé du support de γ peut se déduire de l'étude de γ sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$.

2. γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$ avec
$\forall x \in [\,0\,;\,\pi/2\,], \quad \gamma'(t) = (-\sin(t) - 3\sin(t/2)/2, \cos(t))$.
$x'(t) = -\sin(t/2)\big(2\cos(t/2) + 3/2\big)$ Pour $t \in \,]\,0\,;\,2\pi\,[$, $\sin(t/2) > 0$.
Pour $\alpha \in [\,0\,;\,\pi\,]$, $2\cos(\alpha) + 3/2 > 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) > -3/4 \Leftrightarrow \alpha \in [\,0\,;\,\mathrm{Arccos}(-3/4)\,[$
Je note : $\beta = 2\mathrm{Arccos}(-3/4) \simeq 4,84$. En particulier :

• $\cos\beta = 2\cos^2(\mathrm{Arccos}(-3/4)) - 1 = \dfrac{9}{8} - 1 = \dfrac{1}{8} > 0$ donc $\beta > \dfrac{3\pi}{2}$.

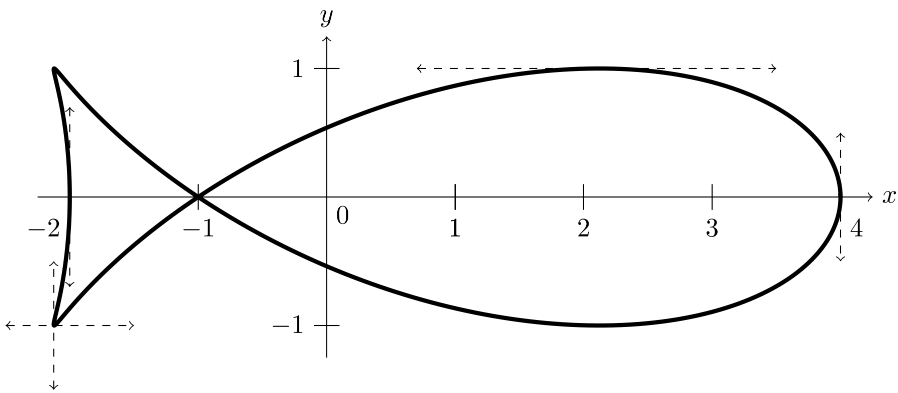
• $x(\beta) = \cos\beta + 3\cos(\mathrm{Arccos}(-3/4)) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{9}{4} = -\dfrac{17}{8} = -2 - \dfrac{1}{8}$

• $y(\beta) = -\sqrt{1 - \cos^2(\beta)} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{8} \simeq -0,99$

Le tableau des variations de x et y est alors :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		β		2π
$x'(t)$	0			$-$			0	$+$	0
$x(t)$	4	$\searrow$	$3/\sqrt{2}$	$\searrow$	$-3/\sqrt{2}$	$\searrow$	$-17/8$	$\nearrow$	-2
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-3\sqrt{7}/8$	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0		$+$		

- Tangentes verticales en $\gamma(0) = (4,0)$, en $\gamma(\beta) = -\dfrac{1}{8}(16, 3\sqrt{7})$ et en $\gamma(2\pi) = (-2,0)$.
- Tangentes horizontales en $\gamma(\pi/2) = (3/\sqrt{2}, 1)$ et en $\gamma(3\pi/2) = (-3/\sqrt{2}, -1)$.
- Point double (un seul) : $\gamma(\pi) = \gamma(3\pi) = (-1,0)$.
- La courbe est régulière : $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) \neq (0,0)$.




```
import numpy as np
import pylab as pl

t=np.linspace(0,4*np.pi,401)
xt=np.cos(t)+3*np.cos(t/2)
yt=np.sin(t)
pl.plot(xt,yt,linewidth=2,color='black')
pl.show()
```

$\boxed{\textbf{Exercice 371}}$ *Étude d'une courbe algébrique*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2 - x^2 + y^2 + 1$ et Γ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

1. Déterminer l'intersection de Γ avec les axes.

2. a) Justifier que tous les points de Γ sont réguliers.
b) Déterminer les tangentes horizontales de Γ.
c) Déterminer les tangentes verticales de Γ et en déduire que Γ contient une droite que l'on précisera.

3. Factoriser f, déterminer les tangentes passant par l'origine du repère et tracer Γ.

Solution (**Ex.371** – *Étude d'une courbe algébrique*)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2 - x^2 + y^2 + 1$ et Γ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

1. $(x, 0) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\} : \Gamma \cap \mathrm{O}x = \{(-1, 0), (1, 0)\}$.
$(0, y) \in \Gamma \Leftrightarrow y^2 + 1 = 0 : \Gamma \cap \mathrm{O}y = \emptyset$.

2. a) f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ et : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \bigtriangledown f(x, y) = (y^2 - 2x, 2xy + 2y)$.

$$\bigtriangledown f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y^2 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ et } y^2 = -2 \\ \text{ou} \\ y = 0 \text{ et } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Comme $(0, 0) \notin \Gamma$, $\bigtriangledown f$ ne s'annule en aucun point de Γ, la courbe Γ est régulière donc admet une tangente en chacun de ses points.

b) La tangente en un point est orthogonale au gradient en ce point, donc une tangente est horizontale si, et seulement si, $\partial_1 f(x, y) = 0$, i.e. $x = y^2/2$.
Or : $f(y^2/2, y) = \dfrac{y^4}{4} + y^2 + 1 > 0$.
Aucun point (x, y) de Γ ne vérifie $\partial_1 f(x, y) = 0$, Γ n'a aucune tangente horizontale.
On peut aussi passer par l'équation de la tangente...

c) La tangente en un point est orthogonale au gradient en ce point, donc une tangente est verticales si, et seulement si, $\partial_2 f(x, y) = 0$, i.e. $(x + 1)y = 0$.
- $\forall y \in \mathbb{R}, f(-1, y) = 0$ donc $(-1, y) \in \Gamma$: tous les points de la droite $\Delta : x = -1$ sont dans Γ, Γ contient la droite Δ et, en tout point de Δ, Δ est la tangente à Γ, ce qui est assez moral.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = -x^2 + 1$ donc Γ possède aussi une tangente verticale en $(1, 0)$ (et en $(-1, 0)$ mais on le savait déjà, $(-1, 0) \in \Delta$).

3. • Si on ne voit pas, la question précédente nous dit que $x = -1$ une racine de f (vue comme polynôme en x), donc il y a une factorisation possible par $x + 1$:
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x, y) = (x + 1)(y^2 - x + 1)$
• Soit $\mathrm{A} = (a, b) \in \Gamma$.

L'équation de la tangent $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ en A s'écrit :

$$(b^2 - 2a)(a - x) + (2ab + 2b)(b - y) = 0.$$

Alors :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \mathrm{O} \in \mathcal{T}_{\mathrm{A}} \\ \mathrm{A} \in \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab^2 - 2a^2 + 2ab^2 + 2b^2 = 0 \\ a = -1 \text{ ou } b^2 = a - 1 \end{cases}$$

Premier cas – si $a = -1$:

$-b^2 - 2 = 0$, c'est impossible.

Second cas – si $b^2 = a - 1$:

$3a(a-1) - 2a^2 + 2(a-1) = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -1$.

La dernière solution est à rejeter car $a = -1 \Rightarrow b^2 = -2$.

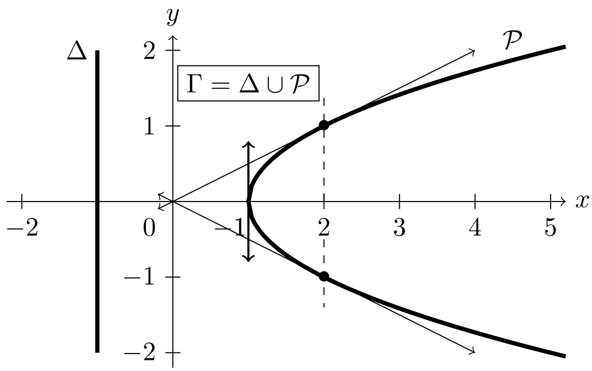
La première conduit à $(a, b) = (2, 1)$ ou $(a, b) = (2, -1)$.

Il y a deux tangentes à Γ passant par $\mathrm{O} = (0, 0)$, en $(2, 1)$ et $(2, -1)$.

Elles ont pour équation : $2y - x = 0$ et $2y + x = 0$.

- $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \big(x = -1 \text{ ou } y^2 = x - 1\big)$.

$\Gamma = \Delta \cup \mathcal{P}$ où Δ est la droite d'équation $x = -1$ et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = x + 1$ (ou $x = y^2 - 1$).



Chapitre 17

Probabilités discrètes

$\boxed{\textbf{Exercice 372}}$ *Un peu de dénombrement*

Un jeu de tarot comporte 21 atouts. On en tire simultanément cinq au hasard.

1. Proposer un univers permettant de modéliser cette expérience.

2. Déterminer la probabilité des événements :

a) A : « au moins un atout est un multiple de cinq ? » ;

b) B : « il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois » ;

c) C : « on a tiré le 1 ou le 21 ».

Solution (**Ex.372** – *Un peu de dénombrement*)

1. $\Omega = \{\text{parties à 5 éléments de } [\![1\,;\,21]\!]\} = \{\mathrm{P} \subset [\![1\,;\,21]\!]\,, \operatorname{Card}(\mathrm{P}) = 5\}$.

2. Notons que $\operatorname{Card}(\Omega) = \dbinom{21}{5} = 20\,439$. Tout les tirages étant équiprobables, on raisonnera par équiprobabilité.

a) $\overline{\mathrm{A}}$ est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble $[\![1\,;\,21]\!] \setminus \{5, 10, 15, 20\}$ de cardinal 17.

$\operatorname{Card}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = \dbinom{5}{17} = 6\,188$, $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{52}{171}$.

D'où $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{119}{171} \simeq 69{,}6\%$.

b) Notons B_1 les tirages de B contenant 15, unique multiple commun de 3 et 5 entre 1 et 21, et notons B_2 les tirages de B un multiple de 3 distinct du multiple de 5.

Alors $\operatorname{Card}(\mathrm{B}) = \operatorname{Card}(\mathrm{B}_1) + \operatorname{Card}(\mathrm{B}_2)$ car $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \overset{\bullet}{\cup} \mathrm{B}_2$.

$\operatorname{Card}(\mathrm{B}_1) = 1 \times \dbinom{11}{4} = 330$ car il faut choisir 4 atouts parmi les 11 qui ne sont

ni multiples de 3, ni multiples de 5.
$\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}_2) = 6 \times 3 \times \binom{11}{3} = 2\,970.$
D'où $\mathrm{Card}\,(()\,\mathrm{B}) = 3\,300$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{3300}{20\,439} = 16,1\%.$

c) $\overline{\mathrm{C}} = \binom{19}{5} = 11\,628$ car on tire les 5 cartes dans l'ensemble $[\![2\,;\,20]\!]$ à 19 éléments.
Donc $\mathbb{P}(\mathrm{C}) = 1 - \dfrac{11\,628}{20\,439} = \dfrac{3}{7} \simeq 42,9\%.$

Exercice 373 *Deux à deux ou mutuellement ?*
On lance deux fois une pièce équilibrée pouvant amener « face » ou « pile ».

1. Proposer un univers des possibles Ω modélisant cette expérience.

2. On définit les événements :

- ☞ F : « le premier lancer donne “face” » ;
- ☞ P : « le second lancer donne “pile” » ;
- ☞ I : « les deux lancers donne un coté identique ».

Étudier si les événements F, P et I sont *deux à deux indépendants*, puis *mutuellement indépendants*, puis *deux à deux incompatibles*, puis *incompatibles dans leur ensemble.*

Solution (**Ex.373** – *Deux à deux ou mutuellement ?*)
$\mathbb{P}(\mathrm{F}) = \mathbb{P}(\mathrm{P}) = \mathbb{P}(\mathrm{I}) = 1/2$,
$\mathbb{P}(\mathrm{F}\cap\mathrm{P}) = 1/4 = \mathbb{P}(\mathrm{F})\mathbb{P}(\mathrm{P})$, $\mathbb{P}(\mathrm{F}\cap\mathrm{I}) = 1/4 = \mathbb{P}(\mathrm{F})\mathbb{P}(\mathrm{I})$, $\mathbb{P}(\mathrm{P}\cap\mathrm{I}) = 1/4 = \mathbb{P}(\mathrm{P})\mathbb{P}(\mathrm{I})$: les événements F, P et I *sont deux à deux indépendants*,
$\mathbb{P}(\mathrm{F}\cap\mathrm{P}\cap\mathrm{I}) = 0 \neq \mathbb{P}(\mathrm{F})\mathbb{P}(\mathrm{P})\mathbb{P}(\mathrm{I})$: les événements F, P et I *ne sont pas mutuellement indépendants.*
$\mathrm{F}\cap\mathrm{P} \neq \emptyset$, $\mathrm{F}\cap\mathrm{I} \neq \emptyset$, $\mathrm{P}\cap\mathrm{I} \neq \emptyset$: les événements F, P et I *ne sont pas deux à deux incompatibles*,
$\mathrm{F}\cap\mathrm{P}\cap\mathrm{I} = \emptyset$: les événements F, P et I *sont incompatibles dans leur ensemble.*

Exercice 374 *L'épistolaire distrait*
Un correspondant distrait écrit successivement n lettres distinctes, destinées à n personnes distinctes.
Il les place dans n enveloppes distinctes indiscernables, qu'il cachette avant d'y avoir apposé les adresses des destinataires. Il finit par écrire les adresses au hasard.

1. a) Proposer un univers Ω le plus simple possible permettant de modéliser l'expérience.

b) Donner une description ensembliste de l'événement « La première lettre écrite arrive à son destinataire » puis de l'événement « Toutes les lettres arrivent à leur destinataire ».

2. Pour tout i de $[\![1\,;\,n]\!]$, on note L_i l'événement « la $i^{\text{ème}}$ lettre écrite arrive à son destinataire ».

a) Quelle est la probabilité de chaque événement L_i ?

b) Quelle est la probabilité que toutes les lettres arrivent à leurs correspondants ?

c) Les événements (L_i) sont-ils mutuellement indépendants ?

d) Sont-ils deux à deux indépendants ?

Solution (**Ex.374** – *L'épistolaire distrait*)

1. a) On numérote les lettres et les destinataires de sorte que la lettre numéro i est destinée au destinataire numéro i.

Plusieurs propositions :

(i) $\Omega = \{(d_1, \ldots, d_n), \forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, d_i \in [\![1\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, d_i \neq d_j\}$ où, pour tout i, d_i est le numéro du destinataire recevant la lettre i.

(ii) En se plaçant sous l'angle des lettres :

$\Omega = \{(\ell_1, \ldots, \ell_n), \forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, \ell_i \in [\![1\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, \ell_i \neq \ell_j\}$ où, pour tout i, ℓ_i est le numéro de la lettre reçue par le destinataire numéro i.

(iii) Et sous l'aspect fonctionnel : $\Omega = \{f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!] \textit{ bijective}\}$ où f envoie (quasiment au sens propre) la lettre numéro i au destinataire numéro $f(i)$.

b) Notons A l'événement « La première lettre écrite arrive à son destinataire » et B l'événement « Toutes les lettres arrivent à leur destinataire ».

Avec l'univers type (i) :

$\mathrm{A} = \{(1, d_2, \ldots, d_n), \forall i \in [\![2\,;\,n]\!]\,, d_i \in [\![2\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, d_i \neq d_j\}$

$\mathrm{B} = \{(1, 2, 3, \ldots, n)\}$

Avec l'univers type (ii) :

$\mathrm{A} = \{(1, \ell_2, \ldots, \ell_n), \forall i \in [\![2\,;\,n]\!]\,, \ell_i \in [\![2\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, \ell_i \neq \ell_j\}$

$\mathrm{B} = \{(1, 2, 3, \ldots, n)\}$

Avec l'univers type (iii) :

$\mathrm{A} = \{f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!] \textit{ bijective et } f(1) = 1\}$ et $\mathrm{B} = \{id_{[\![1\,;\,n]\!]}\}$.

2. a) Que l'on choisisse les modèles (i), (ii) ou (iii), $\mathrm{Card}\,(\Omega) = n!$.

$\mathrm{Card}\,(\mathrm{L}_1) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) = (n-1)!$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{L}_1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Un raisonnement analogue donne : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\,, \mathbb{P}(\mathrm{L}_i) = \dfrac{1}{n}$.

b) $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}) = 1$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{n!}$.

c) & **d)** $\mathrm{P}(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)} \neq \dfrac{1}{n^2} = \mathbb{P}(\mathrm{L}_1)\mathbb{P}(\mathrm{L}_2)$, donc L_1 et L_2

ne sont pas indépendants. Donc les (L_i) ne sont pas deux à deux indépendants, donc pas mutuellement non plus.

Exercice 375 *Minimum et maximum*

On tire successivement une à une et avec remise n boules dans une urne en contenant B numérotées de 1 à B. Soit $k \in [\![1\,;\,B]\!]$ fixé. Déterminer la probabilité des événements :

- S_k « le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à k »,
- G_k « le plus grand numéro obtenu est vaut k »,
- I_k « le plus petit numéro obtenu est supérieur ou égal à k »,
- P_k « le plus petit numéro obtenu est vaut k ».

Solution (**Ex.375** – *Minimum et maximum*)

Première méthode : par explicitation de l'univers et dénombrement

L'ensemble des tirages possibles (univers) est $\Omega = [\![1\,;\,B]\!]^n$ car les tirages se font avec remise. Il est muni de l'équiprobabilité.

On a : $\mathrm{Card}\,(\Omega) = B^n$.

- $S_k = [\![1\,;\,k]\!]^n$ et par équiprobabilité, $\mathbb{P}(S_k) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(S_k)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{k^n}{N^n}$
- De $S_k = G_k \overset{\bullet}{\cup} S_{k-1}$ on tire $\mathbb{P}(G_k) = \mathbb{P}(S_k) - \mathbb{P}(S_{k-1}) = \dfrac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$, relation

valable y compris pour $k = 1$ car $\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{1}{n^N}$.

- $I_k = [\![k\,;\,N]\!]^n$ et par équiprobabilité, $\mathbb{P}(I_k) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(I_k)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{(N-k+1)^n}{N^n}$
- De $I_k = P_k \overset{\bullet}{\cup} I_{k+1}$ on tire $\mathbb{P}(P_k) = \mathbb{P}(I_k) - \mathbb{P}(I_{k+1}) = \dfrac{(N-k+1)^n - (N-k)^n}{N^n}$,

relation valable y compris pour $k = N$ car $\mathbb{P}(P_N) = \dfrac{1}{n^N}$.

Seconde méthode : par décomposition des événements

- Soit pour $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,B]\!]$ l'événement A_i : « le $i^{\text{ème}}$ numéro est inférieur ou égal à k ».

$S_k = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\cap} A_i$, et par indépendance des A_i car les tirages ont lieu avec remise,

$\mathbb{P}(S_k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Or par équiprobabilité $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{k}{N}$ pour tout i de $[\![1\,;\,n]\!]$.

Donc $\mathbb{P}(S_k) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

- Soit pour $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,B]\!]$ l'événement B_i : « le $i^{\text{ème}}$ numéro est supérieur ou égal à k ».

$I_k = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\cap} B_i$, et par indépendance des B_i car les tirages ont lieu avec remise,

$\mathbb{P}(\mathrm{I}_k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{B}_i)$. Or par équiprobabilité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_i) = \dfrac{\mathrm{N}-k+1}{\mathrm{N}}$ pour tout i de $[\![1\,;n]\!]$.

Donc $\mathbb{P}(\mathrm{I}_k) = \big(\dfrac{\mathrm{N}-k+1}{\mathrm{N}}\big)^n$.

Pour G_k et P_k, on raisonne comme par la 1ère méthode.

Exercice 376 *Événement presque-impossible*

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On tire successivement des boules suivant le protocole :

- si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne et on ajoute une autre boule rouge dans l'urne ;
- si elle est blanche, on interrompt les tirages.

1. Montrer que l'expérience peut être modélisé par $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ en convenant que :
   - $\omega = n \in \mathbb{N}^*$ si la boule blanche sort lors du $n^{\text{ème}}$ tirage ;
   - $\omega = 0$ si la boule blanche ne sort jamais.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule blanche n'est pas sortie durant les n premiers tirages ».
   a) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$. Que signifie l'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$?
   Calculer sa probabilité. A-t-on $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n = \emptyset$?
   b) Que dire de l'événement « la boule blanche sortira de l'urne » ?

Solution (**Ex.376** – *Événement presque-impossible*)

- Soit N_i l'événement « une boule noire sort au $i^{\text{ème}}$ tirage ». Alors $\mathrm{B}_n = \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{N}_n$, et par la formule des probabilités composées,

$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{N}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{N}_2)\dots\mathbb{P}_{\mathrm{N}_1\cap\cdots\cap\mathrm{N}_{n-1}}(\mathrm{N}_n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \cdots \times \dfrac{n}{n+1} \times = \dfrac{1}{n+1}$.

- La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante car : $\forall n \geqslant 1, \mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n \cap \mathrm{N}_{n+1} \subset \mathrm{B}_n$.

Par la propriété de continuité monotone : $\mathbb{P}\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0$

- Modélisons l'expérience par l'univers des possibles par $\Omega \overset{\text{déf.}}{=} \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$: une expérience est une suite de 0 (=noire par exemple) ou 1 (=blanche).

Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n = \{s \in \Omega / \forall k \in \mathbb{N}^*, s_k = 0\} = \{\textit{suite nulle}\}$ n'est pas vide, mais pourtant de probabilité nulle.

L'événement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$ que l'on peut expliciter par « la boule blanche ne sort jamais » est presque-impossible (ou quasi-impossible), ou encore « la boule blanche sort » est presque-sûr (ou quasi-certain).

Exercice 377 *Ruine du joueur*

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les lancers successifs sont indépendants, et le joueur gagne 1 euro chaque fois qu'il obtient pile et perd un euro pour chaque face. Le joueur doit disposer d'au moins 1 euro pour jouer, et le jeu prend fin dès qu'il est ruiné ou qu'il dispose d'un capital de N euros ($\mathrm{N} \geqslant 3$ est fixé par avance).

On note u_k la probabilité que le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu ($0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}$).

1. On convient que $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$. Justifier cette convention.

2. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :
$$\forall k \in [\![1\,;\,\mathrm{N}-1]\!], \quad u_k = \tfrac{1}{2}u_{k+1} + \tfrac{1}{2}u_{k-1}.$$

3. Exprimer u_k en fonction de k et N.

4. Interpréter, à k fixé, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k$.

Solution (**Ex.377** – *Ruine du joueur*)

1. S'il possède 0 euro au départ, il ne peut pas jouer et l'événement « être ruiné » est certain. S'il possède déjà N euros, il ne joue pas puisque qu'il dispose du capital requis et ne sera jamais ruiné.

2. Notons U_k l'événement « le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu » où $0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}$, P l'événement le premier lancer donne *pile*.
Avec le système complet $(\mathrm{P}, \overline{\mathrm{P}})$, la formule des probabilités totales donne :
$u_k = \mathbb{P}(\mathrm{P})\mathbb{P}_\mathrm{P}(\mathrm{U}_k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{P}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{P}}}(\mathrm{U}_k) = \dfrac{1}{2}u_{k-1} + \dfrac{1}{2}u_{k+1}.$

3. u vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$, dont l'unique racine est 1.
Donc : $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!], u_k = 1^k(ak+b) = ak+b$ (on se limite à $[\![0\,;\,\mathrm{N}]\!]$ car $\forall k \geqslant \mathrm{N}, u_k = 0...$)
Avec les conditions limites $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$, $b = 1$ et $a\mathrm{N} + b = 0$ donc $a = -1/\mathrm{N}$.
Ainsi : $\forall k \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!], u_k = 1 - (k/\mathrm{N})$.
À k fixé, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k = 1$, donc avec une fortune initiale fixée k, plus on fixe le seuil N grand, et plus on risque de finir ruiné.

Exercice 378 *Incompatibles ET indépendants ?*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit A et B deux événements incompatibles et indépendants. Montrer que l'un d'entre eux au moins est impossible.

2. Étudier la réciproque.

Exercice 379 *Indépendance et contraire*

Soit A et B deux événements. Montrer que A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants si, et seulement si, A et B le sont.

Solution (**Ex.379** – *Indépendance et contraire*)
Puisque l'on a une union disjointe (ou FPT avec le SCE $(\mathrm{B}, \overline{\mathrm{B}})$...),
$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}\big(\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \overline{\mathrm{B}}\big) = \mathbb{P}(\mathrm{A})$ car $\mathrm{B} \cup \overline{\mathrm{B}} = \Omega$.
Par suite, $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$ par indépendance
$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{B})\big) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}})$.

Exercice 380 *La somme infernale*
Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 au hasard. Quelle est la probabilité que la somme des 7 numéros tirés soit égale à la somme des 7 numéros non tirés ?

Solution (**Ex.380** – *La somme infernale*)
$1 + 2 + ... + 14 = 105$ n'est pas divisible par 2. La probabilité cherchée est nulle.

Exercice 381 *S'arrêter de fumer*
Un fumeur veut arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : s'il a réussi à ne pas fumer un jour, il fume le lendemain avec la probabilité 1/2 mais, s'il a fumé un jour, alors il ne fume le lendemain qu'avec la probabilité 1/4. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

1. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.

2. Calculer p_n en fonction de p_1 et de n.

3. Donner la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Solution (**Ex.381** – *S'arrêter de fumer*)

1. En utilisant la formule des probabilités totales et le fait que les événements F_n : « il a fumé le jour n » et $\overline{\mathrm{F}_n}$: « il n'a pas fumé le jour n » forment un système complet d'événements, on obtient :
$p_{n+1} = \mathbb{P}(\mathrm{F}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{F}_n}(\mathrm{F}_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}_n})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{F}_n}}(\mathrm{F}_{n+1}) = p_n \times \dfrac{1}{4} + (1 - p_n) \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$.

2. (p_n) est arithmético-géométrique. Soit $\ell = 2/5$, qui vérifie $\ell = -\dfrac{1}{4}\ell + \dfrac{1}{2}$.
Alors : $\forall n \geqslant 1; \quad p_{n+1} - \ell = \dfrac{-1}{4}(p_n - \ell)$, $\big(p_n - \ell\big)_n$ est géométrique de raison $-1/4$.
D'où : $\forall n \geqslant 1, \quad p_n = (-1/4)^{n-1}(p_1 - \ell) + \ell$.

3. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \ell = \dfrac{2}{5}$.

Exercice 382 *Probabilités bayesiennes*

Le gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clefs dont une seule convient. Il essaye les clefs les unes après les autres. On cherche la probabilité p_k que la porte s'ouvre au bout du $k-$ième essai.

Notons A_i l'événement « la $i-$ième clef essayée ne convient pas ».

Lorsque le gardien est ivre (ce qui arrive en moyenne 3 jours par semaine), il oublie, après chaque tentative, quelle clef il a essayé. On notera I l'événement « le gardien est ivre ».

1. Calculer p_1 et p_2.

2. Calculer p_k pour $k \geqslant 3$.

3. On suppose $n = 5$. Le gardien utilise 7 clefs. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

4. Même question sachant que le gardien a utilisé au moins 4 clefs.

Solution (**Ex.382** – *Probabilités bayesiennes*)

1. Avec le système complet d'événements $(\mathrm{I}, \bar{\mathrm{I}})$, la formule des probabilités totales permet d'écrire :

$p_1 = \mathbb{P}(\mathrm{I})\mathbb{P}_{\mathrm{I}}(\mathrm{A}_1) + \mathbb{P}(\bar{\mathrm{I}})\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{A}_1) = \dfrac{3}{7}\dfrac{1}{n} + \dfrac{4}{7}\dfrac{1}{=}\dfrac{1}{n}.$

$p_2 = \mathbb{P}(\mathrm{I})\mathbb{P}_{\mathrm{I}}(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2) + \mathbb{P}(\bar{\mathrm{I}})\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2) = \dfrac{3}{7}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n} + \dfrac{4}{7}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{7n^2}\big(3(n-1) + 4n\big) = \dfrac{7n-3}{7n^2}.$

2. En notant O_k l'événement « la porte s'ouvre au bout du $k-$ième essai », on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}(\mathrm{O}_k) = \mathbb{P}_{\mathrm{I}}\big(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{A}_{k-1}} \cap \mathrm{A}_k\big)$ puis par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}(\mathrm{O}_k) = \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}.$$

$$\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{O}_k) = \begin{cases} \mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}\big(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{A}_{k-1}} \cap \mathrm{A}_k\big) & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k \geqslant n+1 \end{cases}$$

et toujours par la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{O}_k) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1} \cdots \dfrac{n-k+1}{n-k+2}\dfrac{1}{n-k+1} = \dfrac{1}{n} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k \geqslant n+1 \end{cases}$$

Par la formule des probabilités totales toujours avec le système complet d'événements $(\mathrm{I}, \bar{\mathrm{I}})$,

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{7n}\left(3\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1} + 4\right) & \text{si } k \leqslant n \\ \dfrac{3}{7n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1} & \text{si } k \geqslant n \end{cases}$$

3. Comme $7 > 5$; la probabilité qu'il soit ivre est 1.
4. Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{O}_4}(\mathrm{I}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{I})\mathbb{P}_{\mathrm{I}}(\mathrm{O}_4)}{\mathbb{P}(\mathrm{I})\mathbb{P}_{\mathrm{I}}(\mathrm{O}_4) + \mathbb{P}(\bar{\mathrm{I}})\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{O}_4)} = \frac{\dfrac{3}{7} \times \dfrac{4^3}{5^3} \times \dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{7} \times \dfrac{4^3}{5^3} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{5}} = \frac{48}{173}.$$

Exercice 383 *Sommes paires*

On lance n dés ($n \in \mathbb{N}^*$). Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit paire ?

Solution (**Ex.383** – *Sommes paires*)

On note P_k l'événement « la somme des k premiers dés est paire ».

On a : $\mathbb{P}(\mathrm{P}_1) = 1/2$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathbb{P}(\mathrm{P}_k) = \dfrac{1}{2}$.

$(\mathrm{P}_k, \overline{\mathrm{P}_k})$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(\mathrm{P}_{k+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{P}_k)\mathbb{P}_{\mathrm{P}_k}(\mathrm{P}_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{P}_k})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{P}_k}}(\mathrm{P}_{k+1}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathrm{P}_k) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 384 *Somme de trois dés*

On jette trois dés cubiques non pipés respectivement rouge, vert et bleu.

1. Proposer un univers Ω permettant de modéliser cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins un as. On exprimera le résultat sous la forme d'une fraction.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre.
4. Soit E et F deux ensembles finis tels qu'il existe une bijection de E sur F. Que peut-on dire de leurs cardinaux ?
5. Calculer la probabilité que la somme des points soit paire.
   Indications : considérer l'application $f : \Omega \to \Omega, \omega = (i, j, k) \mapsto (7-i, 7-j, 7-k)$.
6. Montrer que les deux événements considérés aux questions 3) et 5) sont indépendants.

Solution (**Ex.384** – *Somme de trois dés*)

1. $\Omega = \{(r, v, b)/(r, v, b) \in [\![1\,;\,6]\!]\} = [\![1\,;\,6]\!]^3$ convient.
2. Soit A l'événement "avoir au moins un as". $\overline{\mathrm{A}} = [\![2\,;\,6]\!]^3$ et $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$.
   Donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{91}{216}$.

3. Soit B l'événement "obtenir au moins deux faces portant le même chiffre". $\overline{\mathrm{B}} = \{(r, v, b)/r \neq v, r \neq b, v \neq b\}$ et $\mathrm{Card}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 6 \times 5 \times 4$.
D'où : $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \dfrac{20}{6^2} = \dfrac{5}{9}$, et $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{4}{9}$.

4. $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$. Pourquoi ? Comme f est injective, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$ (sinon deux éléments de E au moins auront la même image) et comme f est surjective, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) \geqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{F})$...

5. On chercher la probabilité de $\Omega_{\mathrm{P}} = \{(r, v, b) \in \Omega/r + v + b \text{ est paire}\}$.
On note $\Omega_{\mathrm{I}} = \overline{\Omega_{\mathrm{P}}} = \{(r, v, b) \in \Omega/r + v + b \text{ est impaire}\}$.
L'application $f : \Omega \to \Omega$ est une bijection de Ω sur lui-même car $f \circ f(i, j, k) = (i, j, k)$, donc $f \circ f = id_{\Omega}$... f est sa propre réciproque (involution).
De plus : $f(\Omega_{\mathrm{P}}) = \Omega_{\mathrm{I}}$ car $(7 - i) + (7_j) + (7 - k) = 21 - (i + j + k)$ est impaire lorsque $i + j + k$ est paire, est paire lorsque $i + j + k$ est impaire.
Du coup, $\mathrm{Card}\,(\Omega_{\mathrm{P}}) = \mathrm{Card}\,(\Omega_{\mathrm{I}})$, donc $\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{P}}) = \mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{I}}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{P}})$, d'où $\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{P}}) = \dfrac{1}{2}$.

6. On peut remarquer que $f(\mathrm{B} \cap \Omega_{\mathrm{P}}) = \mathrm{B} \cap \Omega_{\mathrm{I}}$ donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B} \cap \Omega_{\mathrm{P}}) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(\mathrm{B})}{2}$.
D'où : $\mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \Omega_{\mathrm{P}}) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{P}})\mathbb{P}(\mathrm{B})$, B et Ω_{P} sont indépendants.

Exercice 385 *Réunion infinie*

Soit $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$. Un dimanche après-midi particulièrement maussade, Gösta Mittag-Leffler décide de jouer à un jeu de pile ou face selon la règle suivante.
Il effectue une succession de tirages (indépendants les uns des autres et ayant une probabilité p de retourner le résultat « pile ») ; s'il arrive un moment où il obtient deux « pile » de plus que de « face », alors il a gagné et peut rendre visite à la maîtresse d'Alfred Nobel ; si en revanche il obtient deux « face » de plus que de « pile », alors il a perdu et doit désherber son jardin.

1. Quelle est la probabilité que la partie dure au moins $2n$ lancers ?

2. Quelle est la probabilité que Gösta passe finalement un dimanche agréable ?

Solution (**Ex.385** – *Réunion infinie*)

1. Pour que la partie dure $2n$ lancers au moins, il faut et il suffit que les $n - 1$ premières paires de lancers soient constitués à chaque fois d'un pile et d'un face (dans un ordre quelconque), ce qui arrive avec la probabilité $2pq$ à chaque fois.
Ainsi, la probabilité que la partie dure $2n$ lancers au moins est $(2pq)^{n-1}$.

2. Pour que le dimanche soit agréable, il faut et il suffit que la partie dure au moins $2n$ lancers et continue juste après par deux derniers tirages « PP » – alors la partie aura duré exactement $2n+2$ lancers. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n cet événement.

Les événements ainsi proposés sont donc incompatibles, ce qui permet d'écrire, par $\sigma-$additivité :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2pq)^n p^2 = \frac{p^2}{1-2pq}.$$

Exercice 386 *Jeu équitable*

Deux archers se disputent un match selon les règles suivantes :

- A et B tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche.
- A tire en premier (il tirera donc aux rangs impairs).
- La probabilité que A touche la cible, à chaque tir, est p_1.
- De même, la probabilité que l'archer B touche la cible est p_2.

On note $q_i = 1 - p_i$ pour $i = 1$ ou 2.

Enfin, les tirs sont supposés indépendants.

1. Calculer la probabilité que A l'emporte au rang $2n+1$.

2. Calculer la probabilité que B l'emporte au rang $2n+2$.

3. On note G_1 (resp. G_2) l'événement « A (resp. B) l'emporte ».
Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{G}_2)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1)+\mathbb{P}(\mathrm{G}_2)$ et en déduire la probabilité que le match dure indéfiniment.

5. On dira que le match est équilibré lorsque $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{G}_2)$.
Montrer que ceci est réalisé si, et seulement si, $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.
Que peut-on dire si $p_1 > 1/2$?

Solution (**Ex.386** – *Jeu équitable*)

1. En notant A_n l'événement dont on cherche la probabilité, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = p_1(q_1q_2)^n$ car on doit avoir indépendamment n échecs et un succès de A, et n échecs de B.

2. $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = p_2q_2^nq_1^{n+1}$ par un raisonnement analogue.

3. $\mathbb{P}(\mathrm{G}1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \overset{\text{incomp.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \dfrac{p_1}{1-q_1q_2}$ car somme géométrique de raison $q_1q_2 \in \left]0\,;1\right[$.
Et de façon analogue : $\mathbb{P}(\mathrm{G}_2) = \dfrac{q_1p_2}{1-q_1q_2}$.

4. Comme $p_1 + q_1p_2 = (1-q_1) + q_1(1-q_2) = 1 - q_1q_2$, $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) + \mathbb{P}(\mathrm{G}_2) = 1$: la probabilité que la match dure indéfiniment est nulle car .

5. $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{G}_2) \Leftrightarrow p_1 = q_1p_2 \Leftrightarrow p_2 = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_1}{1-p_1}$
Si le jeu est équitable : $p_1 > 1/2 \Rightarrow 1-p_1 < 1/2 \Rightarrow p_2 > 1$, impossible. Le jeu ne peut pas être équitable si $p_1 > 1/2$.

Exercice 387 *Séquence pile-pile et séquence pile-face*

On dispose d'une pièce, faisant pile avec la probabilité $p \in]0\,;1[$. On effectue une séquence infinie de lancers.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs sans avoir eu auparavant la séquence pile-face ?

Indication : on pourra lister précisément tous les tirages possibles amenant le résultat voulu.

Solution (**Ex.387** – *Séquence pile-pile et séquence pile-face*)

Soit $q = 1 - p$. Les seuls tirages favorables sont :

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ de probabilité p^2,

$\mathrm{F}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ de probabilité qp^2,

$\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ de probabilité q^2p^2,

$\vdots$

Notons E_n l'événement $\mathrm{F}_1 \dots \mathrm{F}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ de probabilité q^np^2.

L'événement PP sort avant PF est : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n$. Par incompatibilité 2 à 2, sa probabilité est : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{F}_n) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{p^2}{1-q} = p$.

Beaucoup plus élégant : à méditer...

Soit A l'événement « PP sort avant PF ». $(\mathrm{F}_1, \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2)$ étant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2)\mathbb{P}_{\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2)\mathbb{P}_{\mathrm{P}_1\cap\mathrm{F}_2}(\mathrm{A}) = q\mathbb{P}(\mathrm{A}) + p^2 \times 1 + pq \times 0 = (1-p)\mathbb{P}(\mathrm{A}) + p^2$, et il n'y a plus qu'à isoler $\mathbb{P}(\mathrm{A})$:

$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{p^2}{p} = p$.

Exercice 388 *Jeu équitable ?*

Deux personnes A et B jouent : A lance deux fois une pièce équilibrée, et B ne lance qu'une fois une pièce qui amène pile avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de piles. Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne se termine jamais ?
4. Existe-il un p tel que le jeu est équitable ?

Solution (**Ex.388** – *Jeu équitable ?*)

1. Notons, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : « il y a égalité au $k-$ième tour ».
   Il y a égalité au premier tour lorsque :

A obtient deux fois face et B obtient face, ou A obtient une fois pile et une fois face et B obtient pile.
Par incompatibilité des événements, puis par indépendance des lancers, on obtient :
$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-p) + \big(\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\big)p = \frac{1+p}{4}$.

2. Notons, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, F_k l'événement : « A obtient plus de piles que B au $k-$ième tour », et A_k l'événement : « A gagne au $k-$ième tour ».

- A gagne au premier tour lorsque :

A obtient deux fois pile,
ou A obtient une fois pile et une fois face et B obtient face.
Ainsi : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \big(2\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-p)\big) = \frac{3-2p}{4}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $A_k = E_1 \cap \cap E_{k-1} \cap F_k$.

Ainsi par indépendance des résultats à chaque lancer :
$\mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1+p}{4}\right)^{k-1} \times \frac{3-2p}{4}$.

- L'événement G_A : « A gagne » s'écrit : $G_A = d = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$.

Par incompatibilité des événements A_k :
$P(G_A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1+p}{4}\right)^{k-1} \frac{3-2p}{4} = \frac{3-2p}{3-p}$.

3. • L'événement F : « le jeu ne se termine pas » s'écrit : $F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$.

Les événements E_k forment une suite décroissante d'événements, donc par continuité monotone :
$\mathbb{P}(F) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+p}{4}\right)^n = 0$.
On en déduit que le jeu se termine presque sûrement.

4. Le jeu est équitable si et seulement $\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{2}$.

Et : $\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(3-2p) = 3-p \quad \Leftrightarrow \quad p = 1$.
Dans ce cas, le joueur B fait systématiquement pile (sa pièce est truquée : elle possède deux piles et pas de face). C'est la seule possibilité pour que le jeu soit équitable...

Exercice 389 *Autour de l'indépendance*

Je dispose d'une pièce juste et d'une pièce truquée pour laquelle probabilité d'obtenir face est p avec $0 < p < \frac{1}{2}$. Je choisis une des pièces au hasard, puis je la lance n fois de suite avec $n \geqslant 2$. Soit les événements :

- J : « la pièce est juste » ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « j'obtiens au face $n^{\text{ème}}$ lancer » (respectivement).

1. Les événements F_1 et F_2 sont-ils indépendants ?

2. a) Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{J})$, puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}_{\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{F}_n}(\mathrm{J})$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Est-ce moral ?

Solution (**Ex.389** – *Autour de l'indépendance*)
Dans cet exercice, j'utilise abondamment la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\mathrm{J}, \overline{\mathrm{J}})$ où J est l'événement « j'ai choisi la pièce juste ».

1. $\mathbb{P}(\mathrm{F}_1) \overset{\text{FPT}}{=} \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.p$ et de même $\mathbb{P}(\mathrm{F}_2) \overset{\text{FPT}}{=} \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.p$.

$\mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2) \overset{\text{FPT}}{=} \frac{1}{2}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.p^2$.

$\mathbb{P}(\mathrm{F}_1)\mathbb{P}(\mathrm{F}_2) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + p\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + p^2\right) \Leftrightarrow p^2 - p + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

Comme $0 < p < \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\mathrm{F}_1)\mathbb{P}(\mathrm{F}_2) \neq \mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2)$ et les événements F_1 et F_2 ne sont pas indépendants.

2. a) $\mathbb{P}(\mathrm{J}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{J}) = \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{J} \cap \mathrm{F}_1)}{\mathbb{P}(\mathrm{F}_1)} = \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{J})\mathbb{P}_{\mathrm{J}}(\mathrm{F}_1)}{\mathbb{P}(\mathrm{F}_1)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + p\right)} = \dfrac{1}{1 + 2p}$.

De la même façon, $\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2}(\mathrm{J}) = \dfrac{1}{1 + 4p^2}$.

Je viens d'appliquer la formule du pasteur Bayes, sans vraiment la formaliser ...
... de la même façon que précédemment, la formule de Bayes avec le système complet $(\mathrm{J}, \overline{\mathrm{J}})$ fournit :

$$p_n = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{J})\mathbb{P}_{\mathrm{J}}(\mathrm{F}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{F}_n)}{\mathbb{P}(\mathrm{J})\mathbb{P}_{\mathrm{J}}(\mathrm{F}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{F}_n) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{J}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{J}}}(\mathrm{F}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{F}_n)} = \frac{(1/2) \times (1/2)^n}{(1/2) \times (1/2)^n + (1/2) \times p^n} = \frac{1}{1 + (2p)^n}.$$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{(1 + (2p)^n)}{1 + (2p)^{n+1}} > 1$ puisque $2p < 1$ et $1 + (2p)^{n+1} < 1 + (2p)^n$.

b) Comme $0 < 2p < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (2p)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Plus j'ai une longue série de *faces* au départ, et plus j'ai de chance de lancer la pièce juste ... moral puisque la pièce truquée désavantage *face*.

Exercice 390 *Rang pair ou rang impair*

On effectue une succession de lancers d'une pièce dont la probabilité d'amener pile est $p \in]\,0\,;\,1\,[$ à chaque lancer, indépendamment d'un lancer à l'autre.

1. En s'inspirant de l'exercice *« Événement presque-impossible »*, montre que la probabilité que pile apparaisse au moins une fois au cours de ces lancers vaut 1 C'est un événement *« presque-certain »* ou *« presque-sûr »*.
2. Déterminer la probabilité de l'événement I : *« le premier "pile" apparaît lors d'un tirage de rend impair »*.
3. L'événement I est-il plus probable que son contraire ?

Solution (**Ex.390** – *Rang pair ou rang impair*)

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'événement « pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, PP_n l'événement « le premier pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

On a :

$\mathbb{P}(\mathrm{PP}_n) = \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{P}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{P}_{n-1}} \cap \mathrm{P}_n\big)$, et par indépendance,

$\mathbb{P}(\mathrm{PP}_n) = \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{P}_1}\big) \ldots \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{P}_{n-1}}\big)\mathbb{P}\big(\mathrm{P}_n\big) = (1-p)^{n-1}p.$

On a : $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{PP}_{2k+1}$, et comme les PP_n sont deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{PP}_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k}p = p\sum_{k=0}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^k = \frac{p}{1-(1-p)^2}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}) = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}$$

1. $2-p < 2$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{I}) > \dfrac{1}{2}$. Donc il est plus probable que le premier « pile » sorte à un rang impair qu'à un rang pair (idem pour le premier « face » d'ailleurs).

Exercice 391 *Face-Pile-Pile contre Pile-Pile-Face*

Monsieur M, éminent probabiliste, propose à Monsieur B, physicien de renom, de parier un café au jeu suivant :

- on lance successivement et indépendamment une pièce équilibrée – donc de probabilité $p = 1/2$ d'amener « pile » lors d'un lancer quelconque ;
- si la succession « pile-pile-face » apparaît avant la succession « face-pile-pile », M. B gagne le café ;
- dans le cas contraire, c'est M. M qui le gagne.

M. B pense que le jeu est neutre, vu la symétrie des données, tandis que M. M soutient que ce jeu est à son avantage.

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n (respectivement P_n) l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer amène face (resp. pile) ».

1. *Dans cette question, on montre que le jeu s'arrête presque sûrement après un nombre fini de tirages... le café froid n'étant guère agréable !*

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ C_n l'événement « la succession pile-pile-face apparaît au moins une fois lors des n premiers lancers ».

a) Montrer que : $\forall n \geqslant 3, \quad \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n) + \dfrac{1}{8}\big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n-2})\big)$.

b) Montrer que $\big(\mathbb{P}(\mathrm{C}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en précisant sa limite.

c) Qu'en conclure ?

2. *Dans cette question, on étudie les probabilités de remporter le café.*
Notons, pour tout $n \geqslant 3$, B_n l'événement « pile-pile-face sort au $n^{\text{ème}}$ rang sans que face-pile-pile ne soit sortie auparavant».

a) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, $\mathrm{P}_{\mathrm{F}_1\cup\mathrm{F}_2\cup\cdots\cup\mathrm{F}_{n-3}}(\mathrm{B}_n)$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2\cap\cdots\cap\mathrm{P}_{n-3}}(\mathrm{B}_n)$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 3$, $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) En déduire les probabilités de gagner de MM B & M.

Solution (**Ex.391** – *Face-Pile-Pile contre Pile-Pile-Face*)

1. a) On a : $\mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{C}_n \overset{\bullet}{\cup} \big(\overline{\mathrm{C}_{n-2}} \cap \mathrm{P}_{n-1} \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n+1}\big)$.
Par incompatibilité,
$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n) + \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{C}_{n-2}} \cap \mathrm{P}_{n-1} \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n+1}\big)$.
Puis par indépendance,
$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n) + \mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{C}_{n-2}}\big)\mathbb{P}(\mathrm{P}_{n-1})\mathbb{P}(\mathrm{P}_n)\mathbb{P}(\mathrm{F}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n) + \dfrac{1}{8}\big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n-2})\big)$.

b) À partir du rang 3, $\big(\mathbb{P}(\mathrm{C}_n)\big)$ est croissante. Étant majorée par 1, elle converge vers une limite $\ell \in [\,0\,;\,1\,]$.
En passant à la limite dans la relation précédente :
$\ell = \ell + \dfrac{1}{8}(1 - \ell)$ donc $\ell = 1$.

c) Soit N l'événement « la succession pile-pile-face n'apparaît jamais ».
On a : $\mathrm{N} = \overline{\bigcup\limits_{n\geqslant 3} \mathrm{C}_n}$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{N}) = 1 - \mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 3} \mathrm{C}_n\big)$.
Or la suite $(\mathrm{C}_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante : $\forall n \geqslant 3, \quad \mathrm{C}_n \subset \mathrm{C}_{n+1}$.
Donc par continuité monotone, $\mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 3} \mathrm{C}_n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_n) = 1$.
Donc $\mathbb{P}(\mathrm{N}) = 0$: on est presque-sûr que la succession pile-pile-face apparaît au moins une fois, autrement dit que le jeu s'arrêtera en un nombre fini de lancers.

2. a) On a :

- $\mathrm{P}_{\mathrm{F}_1\cup\mathrm{F}_2\cup\cdots\cup\mathrm{F}_{n-3}}(\mathrm{B}_n) = 0$ puisque le dernier F avant P_{n-2} serait à l'origine du séquence FPP,
- $\mathrm{P}_{\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2\cap\cdots\cap\mathrm{P}_{n-3}}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}_{\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2\cap\cdots\cap\mathrm{P}_{n-3}}(\mathrm{P}_{n-2} \cap \mathrm{P}_{n-1} \cap \mathrm{F}_n) = \dfrac{1}{8}$.

b) $\big(\mathrm{F}_1\cup\mathrm{F}_2\cup\cdots\cup\mathrm{F}_{n-3}, \mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2\cap\cdots\cap\mathrm{P}_{n-3}\big)$ étant un système complet d'événements (du type $(\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}})$), la formule des probabilités totales donne
$\forall n \geqslant 4, \quad \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0 + \mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{P}_{n-3})\mathrm{P}_{\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2\cap\cdots\cap\mathrm{P}_{n-3}}(\mathrm{B}_n) = \dfrac{1}{2^n}$.

De plus, $\mathbb{P}(\mathrm{B}_3)=\mathbb{P}(\mathrm{P}_1\cap\mathrm{P}_2\cap\mathrm{F}_3)=\dfrac{1}{2^3}$ aussi...

Comme l'événement B « M. B gagne » est la réunion des événements incompatibles B_n,

$$\mathbb{P}(\mathrm{B})=\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geqslant 3}\mathrm{B}_n\big)=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{4}.$$

On peut penser, vu la question 1., que la probabilité de M « M. M gagne » est $1-\mathbb{P}(\mathrm{B})=\dfrac{3}{4}$. prouvons le.

De $(\mathrm{B}\cup\mathrm{M})\overset{\bullet}{\cup}\big(\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{M}}\big)=\Omega$, on tire

$\mathbb{P}(\mathrm{B}\cup\mathrm{M})+\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{M}})=1$ et par incompatibilité de B et M,

$\mathbb{P}(\mathrm{M})=1-\mathbb{P}(\mathrm{B})-\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{M}})$.

Or $\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{M}}\subset\mathrm{N}$, événement pile-pile-face ne sort jamais de la première question.

Donc : $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{M}})\leqslant\mathbb{P}(\mathrm{N})$ or $\mathbb{P}(\mathrm{N})=0$.

Donc $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{M}})=0$ et on a bien :

$$\mathbb{P}(\mathrm{M})=1-\mathbb{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}.$$

M. M a trois fois plus de chances de se faire payer un café, bien ouéj !

Exercice 392 *Indépendance*

Considérons un lancer de deux dés, modélisé par $\Omega=[\![1\,;\,6]\!]^2$ muni de la tribu discrète et de l'équiprobabilité.

Soit les événements A « le premier dé fait 6 », B « la somme des deux dés est paire » et C « le deuxième dé a fait 3 ».

Étudier l'indépendance deux à deux puis l'indépendance mutuelle des événements A, B et C.

Solution (**Ex.392** – *Indépendance*)

- $\mathrm{Card}\,(\Omega)=36$
- $\mathrm{A}=\{(6,j)/j\in[\![1\,;\,6]\!]\}$ donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A})=6$, donc $\mathbb{P}(\mathrm{A})=1/6$.
- $\mathrm{B}=\{(i,j)\in\Omega/i\text{ et }j\textit{ pairs}\}\cup\{(i,j)\in\Omega/i\text{ et }j\textit{ impairs}\}$ donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B})\overset{\text{incomp.}}{=}$ $3\times3+3\times3=18$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B})=1/2$.
- $\mathrm{C}=\{(i,3)/i\in[\![1\,;\,6]\!]\}$, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{C})=6$ et $\mathbb{P}(\mathrm{C})=1/6$.
- $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{(6,k)/j\in\{2,4,6\}\}$, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=3$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1/12=\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$.
- $\mathrm{A}\cap\mathrm{C}=\{(6,3)\}$, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=1$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=1/36=\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{C})$.
- $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\{(i,3)/i\in\{1,3,5\}\}$, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=3$, $\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=1/12=\mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{C})$.
- $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\emptyset$ $\big(\big(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\big)\subset\overline{\mathrm{B}}\,!!!\big)$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=0\neq\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{C})$.

A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 393 *Chaîne martiale*

On fixe une constante $p\in\,]\,0\,;\,1\,[$.

Pendant $\mathrm{N}+1$ années, un militaire est affecté chaque année au hasard dans l'une des quatre villes A, B, C ou D.
Quand il est dans une ville donnée une certaine année, la probabilité qu'il y soit encore l'année suivante vaut p, les trois autres destinations étant équiprobables.
On suppose qu'il est affecté initialement dans la ville A, et que la première année est l'année numérotée 0. Pour $n \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!]$, on note A_n l'évènement « Le militaire est affecté à la ville A pour l'année n », et on pose $a_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.
On définit de même les évènements B_n, C_n et D_n, et leur probabilité b_n, c_n et d_n.

1. Que valent a_0, b_0, c_0 et d_0 ?

2. Que vaut, pour $n \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!]$, $a_n + b_n + c_n + d_n$?

3. Pour tout entier $n \in [\![0\,;\,\mathrm{N}-1]\!]$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.

4. Déterminer a_n pour tout $n \in [\![0\,;\,\mathrm{N}]\!]$.

5. Que se passe-t-il lorsque n devient grand ?

Solution (**Ex.393** – *Chaîne martiale*)

1. $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

2. $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n)$ étant un système complet d'événements, $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$.

3. Je note $q = 1 - p$.
La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n)$ donne :
$a_{n+1} = \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = a_n \times p + b_n \times \dfrac{q}{3} + c_n \times \dfrac{q}{3} + d_n \times \dfrac{q}{3}$.

4. D'où :
$a_{n+1} = pa_n + \dfrac{q}{3}(1 - a_n) = \left(p - \dfrac{q}{3}\right) a_n + \dfrac{q}{3} = \left(1 - \dfrac{4q}{3}\right) a_n + \dfrac{q}{3}$
Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique
$\ell = \left(1 - \dfrac{4q}{3}\right) \ell + \dfrac{q}{3} \Leftrightarrow \ell = \dfrac{q/3}{4q/3} \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1}{4}$
La suite $\left(a_n - \dfrac{1}{4}\right)$ est géométrique de raison $1 - \dfrac{4q}{3}$.
$a_n = \left(1 - \dfrac{4q}{3}\right)^n \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}$.

5. On a : $0 < q < 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{4q}{3} < \dfrac{4}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{3} < 1 - \dfrac{4q}{3} < 1$, donc $a_n - \dfrac{1}{4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{4}$.
Remarque : par symétrie, $b_n = c_n = d_n = \dfrac{1 - a_n}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{3/4}{3} = \dfrac{1}{4}$.

Chapitre 18

Variables aléatoires discrètes

Exercice 394 *La loi du sauteur en hauteur - Transferts*

Dans un concours de saut, la probabilité qu'un sauteur passe la $n^{\text{ème}}$ barre est $\dfrac{1}{n}$ et est indépendante des sauts précédents.
On note X le numéro de la dernière barre que le sauteur a franchi avant d'échouer.

1. Donner la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathrm{X}=x)=1$.

2. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ existent et les calculer. On observa qu'on a intérêt à commencer par calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}+1)$, puis $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2-1)$.

Solution (**Ex.394** – *La loi du sauteur en hauteur - Transferts*)

1. $\mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) \overset{\text{FPC}}{=} 1\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\dots\dfrac{1}{n}\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

2. $\mathbb{E}(\mathrm{X}+1) \overset{\text{transf.}}{=} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} \overset{\text{exp.}}{=} \mathrm{e}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) \overset{\text{lin.}}{=} \mathrm{e}-1$.

$\mathbb{E}(\mathrm{X}^2-1) \overset{\text{transf.}}{=} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} \overset{\text{exp.}}{=} \mathrm{e}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) \overset{\text{lin.}}{=} \mathrm{e}+1$, $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 3\mathrm{e}-\mathrm{e}^2$.

Exercice 395 *Sans espoir ... - Absence d'espérance*

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.
On procède à une succession de tirages suivant le processus : à chaque tirage, on prélève une boule au hasard et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur. On note T le temps d'attente du premier tirage d'une boule noire.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{T} = n)$ et vérifier que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = 1$.

2. T possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution (**Ex.395** – *Sans espoir ... - Absence d'espérance*)

1. $\mathbb{P}(\mathrm{T} = n) \overset{\text{FPC}}{=} \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\ldots\dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n+1}$ diverge, $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ n'existe pas.

Exercice 396 *Sommes très aléatoires. Décomposition en somme*

Une urne contient n ($n \in \mathbb{N}^*$) jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée de jetons au hasard dans l'urne. On note Y le nombre de jetons tirés et on suppose que $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0\,;\,n]\!])$. On note X la somme des numéros figurant sur les jetons tirés, en convenant que $\mathrm{X} = 0$ si $\mathrm{Y} = 0$. Pour k dans $[\![1\,;\,n]\!]$, on note X_k la variable indicatrice de l'événement *« le $k^{\text{ème}}$ jeton est dans la poignée tirée »*.

1. Déterminer la loi de X_k et calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

2. Les variables $(\mathrm{X}_k)_{k=1}^{n}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

Solution (**Ex.396** – *Sommes très aléatoires. Décomposition en somme*)

1. $\mathbb{P}_{[\mathrm{Y}=j]}(\mathrm{X}_k = 1) \overset{\text{dén.}}{=} \dfrac{\binom{j-1}{n-1}}{\binom{j}{n}} = \dfrac{j}{n}$: sachant $[\mathrm{Y} = j]$.

$\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) \overset{\text{FPT}}{=} \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{j}{n} \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{X}_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.

2. $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k = 1]\right) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = \dfrac{1}{n+1} \neq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1)$.

Exercice 397 *Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y et Z trois variables indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$.

1. Montrer que, pour tout k de $[\![2\,;\,2n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{\max(1,k-n) \leqslant i \leqslant \min(n,k-1)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k - i).$$

2. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k)$ suivant que $k \in [\![2\,;\,n]\!]$ ou $k \in [\![n\,;\,2n]\!]$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Z}) = \dfrac{n-1}{n^2}$.

4. Je lance trois dés justes à six faces numérotées de 1 à 6. Quelles est la probabilité que la somme de deux des numéros obtenus soit égale au troisième ?

Solution (**Ex.397** – *Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »*)

1. Clairement $(X+Y)(\Omega) = [\![2\,;\,2n]\!]$. Soit $k \in [\![2\,;\,2n]\!]$.
$\big[X+Y=k\big] = \displaystyle\bigcup_{i\in X(\Omega) \text{ et } k-i\in Y(\Omega)} \big([X=i] \cap [Y=k-i]\big).$
Par incompatibilité de ces événements, puis indépendance des variables aléatoires,
$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i\in X(\Omega) \text{ et } k-i\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i).$$
Précisons la plage de sommation :
$(i \in X(\Omega) \text{ et } k-i \in Y(\Omega)) \Leftrightarrow (1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant k-i \leqslant n)$
$\Leftrightarrow (1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } k-n \leqslant i \leqslant k-1)$
$\Leftrightarrow \max(1, k-n) \leqslant i \leqslant \min(n, k-1)$
2. • $2 \leqslant k \leqslant n$ donc $\max(1, k-n) = 1$ et $\min(n, k-1) = k-1$,
$\mathbb{P}(X+Y=k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}.$
• $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$ donc $\max(1, k-n) = k-n$ et $\min(n, k-1) = n$,
$\mathbb{P}(X+Y=k) = \displaystyle\sum_{i=k-n}^{n} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$
3. À l'aide du système complet d'événements $([Z=k])_{1\leqslant k\leqslant n}$,
$\mathbb{P}(X+Y=Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((Z=k) \cap (X+Y=Z)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((Z=k) \cap (X+Y=k))$
$\displaystyle\overset{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z=k)\mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n}{2} =$
$\dfrac{n-1}{2n^2}.$
4. Avec $n = 6$, en notant X, Y et Z les numéros des 3 dés,
$\mathbb{P}((X+Y=Z) \cup (X+Z=Y) \cup (Y+Z=X)) \overset{\text{incomp.}}{=}$
$\mathbb{P}(X+Y=Z) + \mathbb{P}(X+Z=Y) + P(Y+Z=X) = 3 \times \dfrac{6-1}{2\times 6^2} = \dfrac{5}{24}.$

Exercice 398 *Autour des lois usuelles - Lois conditionnelles*

1. Montrer que si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(l)$ et $\mathcal{P}(m)$ respectivement, alors la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Montrer que si Y est une v.a.r. suivant la loi Poisson $\mathcal{P}(l)$ et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnée par $(\mathrm{Y} = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution (**Ex.398** – *Autour des lois usuelles - Lois conditionnelles*)

1. Pour $k > n$, $\mathbb{P}_{[\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]}(\mathrm{X} = k) = 0$ (fatalement).

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbb{P}_{[\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]}(\mathrm{X} = k) = \dfrac{\mathbb{P}((\mathrm{X} = k) \cap (\mathrm{Y} = n - k))}{\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n)} =$

$\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n - k)}{\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-l} l^k}{k!} \dfrac{\mathrm{e}^{-m} m^{n-k}}{(n - k)!} \dfrac{n!}{\mathrm{e}^{-(l+m)} l^n} =$

$\dbinom{n}{k} \left(\dfrac{l}{l + m}\right)^k \left(\dfrac{m}{l + m}\right)^{n-k}$ ... loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{l}{l + m}\right)$, non ?

2. La FPT pour le SCE $([\mathrm{Y} = n])_{n\in\mathbb{N}}$ donne

$\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)\mathbb{P}_{[\mathrm{Y}=n]}(\mathrm{X} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-l} \frac{l^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} =$

$\dfrac{\mathrm{e}^{-l}}{k!}(pl)^k \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{[l(1 - p)]^{n-k}}{(n - k)!} \overset{i=n-k}{=} \frac{\mathrm{e}^{-l}}{k!}(pl)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[l(1 - p)]^i}{i!} = \frac{\mathrm{e}^{-l}\mathrm{e}^{l(1-p)}(lp)^k}{k!} =$

$\dfrac{\mathrm{e}^{-lp}(lp)^k}{k!}$ donc $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(l)$.

Exercice 399 *Binomiale et parité - Fonction génératrice et moments*

On dispose de $2n + 1$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. On lance simultanément ces jetons.

1. On note B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues. Quelle loi suivent les variables aléatoires B et N ?

2. a) Expliquer pourquoi une seule des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois.

b) X désigne la variable aléatoire égale à ce nombre impair. Calculer la loi de X.

3. a) Exprimer la fonction génératrice de X, notée $\mathrm{G_X}$, à l'aide de la fonction $f : x \mapsto (1 + x)^{2n+1} - (1 - x)^{2n+1}$.

b) En déduire l'espérance et la variance de X.

Solution (**Ex.399** – *Binomiale et parité - Fonction génératrice et moments*)

1. B et N suivent $\mathcal{B}(2n + 1, 1/2)$ (par définition de cette loi).

2. a) En notant B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues, $\mathrm{B} + \mathrm{N} = 2n + 1$ est impair, ce qui est impossible si B et N sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Donc un, et un seul, des deux nombres B et N est impair.

b) • $X(\Omega) = \{2k+1, k \in [\![0\,;n]\!]\}$.

• Pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, $[X = 2k+1] = [B = 2k+1] \cup [N = 2k+1]$, cette réunion étant disjointe.

Par additivité :

$$\mathbb{P}(X = 2k+1) = 2 \times \binom{2n+1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{2^{2n+1-2k-1}} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n+1}{2k+1}$$

3. a) Par la formule du binôme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k x^k = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} x^k.$$

Donc $G_X(x) = \dfrac{1}{2^{2n+1}} f(x)$.

b) $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \dfrac{1}{2^{2n+1}} f'(1) = \dfrac{(2n+1)2^{2n}}{2^{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}$.

$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = \dfrac{(2n+1)2n}{4}$,

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2) = \dfrac{2n(2n+1) + 4n + 2 - (2n+1)^2}{4} = \dfrac{2n+1}{4}$.

Exercice 400 *Produit de Bernoulli - Corrélation*

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Que peut-on dire de X^2 ?

2. Soit $p \in]\,0\,;1\,[$. On effectue une suite de lancer d'une pièce amenant “ pile ” avec la probabilité p et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

• X_k la variable indicatrice de l'événement « le $k-$ème lancer donne “ pile ” »,

• Y_k la variable indicatrice de l'événement « les $k-$ème et $(k+1)-$ème lancers donnent tous les deux “ pile ” ».

Pour tous k et j dans $\mathbb{N}^*$, calculer le coefficient de corrélation $\rho(Y_k, Y_j)$.

Solution (**Ex.400** – *Produit de Bernoulli - Corrélation*)

1. $X(\Omega) = \{0;1\}$ donc X^2 ne peut prendre que les valeurs $0^2 = 0$ et 1^2.

De plus : $\big(X = 0 \Leftrightarrow X^2 = 0\big)$ et $\big(X = 1 \Leftrightarrow X^2 = 1\big)$.

Donc finalement $X^2 = X$ (et en particulier $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$)

2. Soient k et j dans $\mathbb{N}^*$. On a :$Y_k = X_k X_{k+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$.

• Si $j \neq k-1$ *et* $j \neq k$ *et* $j \neq k+1$, alors les variables X_k, X_{k+1}, X_j et X_{j+1} sont 4 variables distinctes indépendantes, donc $Y_k = X_k X_{k+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$ sont indépendantes et leur covariance est nulle. Donc $\rho(Y_k, Y_j) = 0$.

• Si $j = k$, alors $Y_j = Y_k$, $\mathrm{cov}(Y_k, Y_j) = \mathbb{V}(Y_k)$, $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sigma(Y_k)^2 = \mathbb{V}(Y_k)$, $\rho(Y_k, Y_j) = 1$. Ceci n'est pas surprenant puisqu'il y a un lien affine évident entre Y_k et Y_j : $Y_j = 1 \times Y_k + 0$...

- Si $j = k+1$, alors $Y_kY_j = X_kX_{k+1}^2X_{k+2} = X_kX_{k+1}X_{k+2}$.

Par indépendance, $\mathbb{E}(Y_kY_j) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}X_{k+2} = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1})\mathbb{E}(X_{k+2}) = p^3$ et toujours par indépendance $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Donc $\operatorname{cov}(Y_k, Y_j) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$.

Calculons $\mathbb{V}(Y_k)$. $Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)) = \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)$ par indépendance, donc $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p^2$ et $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$.

Par conséquent, $\mathbb{V}(Y_k) = p^2(1-p^2)$. Il en est de même pour Y_j : $Y_j \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$.

Alors $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sqrt{p^2(1-p^2)}\sqrt{p^2(1-p^2)} = p^2(1-p^2)$. Finalement $\rho(Y_k, Y_j) = \dfrac{p^3(1-p)}{p^2(1-p^2)} = \dfrac{p(1-p)}{(1-p)(1+p)} = \dfrac{p}{1+p}$.

- Si $j = k-1$, alors $k = j+1$ et en permutant les rôles de k et j dans ce qui précède, on obtient encore $\rho(Y_k, Y_j) = \dfrac{p}{1+p}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 401}}$ *Un produit - Formule des probabilités totales*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X, et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Soit $Z = XY$.

1. Donner l'espérance et la variance de Z *puis* déterminer la loi de Z.

2. Calculer la probabilité que Z soit paire.

Solution (**Ex.401** – *Un produit - Formule des probabilités totales*)

1. a) Par indépendance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda\dfrac{3}{2} = \dfrac{3\lambda}{2}$.

De même : $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2)\mathbb{E}(Y^2) = (\lambda + \lambda^2)\big(\dfrac{5}{2}\big) = \dfrac{5\lambda + 5\lambda^2}{2}$,

$\mathbb{V}(Z) = \dfrac{10\lambda + 10\lambda^2 - 9\lambda^2}{4} = \dfrac{5}{2}\lambda + \dfrac{1}{4}\lambda^2$

b) • Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $Y = 2$ entraîne Z pair :

$[Z = 2k+1] = [X = 2k+1] \cap [Y = 1]$

Par indépendance :

$\mathbb{P}(Z = 2k+1) = \mathbb{P}(X = 2k+1)\mathbb{P}(Y = 1) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2k+1}}{2(2k+1)!}$.

$[Z = 2k] = \big([X = 2k] \cap [Y = 1]\big) \cup \big([X = k] \cap [Y = 2]\big)$

La réunion étant disjointe :

$\mathbb{P}(Z = 2k) = \mathbb{P}\big([X = 2k] \cap [Y = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 2]\big)$

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}=2k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{2(2k)!}+\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{2k!}.$$

2. $\mathbb{P}(\mathrm{Z}\text{ impaire})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=2k+1)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\mathrm{sh}(\lambda)=\frac{1-\mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Z}\text{ paire})=\frac{3+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}$

Exercice 402 *Bilinéarité de la covariance et indépendance*

On considère un processus bernoullien de probabilité de succès $p\in\,]\,0\,;\,1\,[$ et on pose $q=1-p$. Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, on note S_n et E_n le nombre de succès et d'échecs respectivement au cours des n premières épreuves. On note enfin $\Delta_n=\mathrm{S}_n-\mathrm{E}_n$.

1. Trouver, sans calculs excessifs, la loi de Δ_n, son espérance et sa variance.

2. Soit a,b,c,d des réels et $\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}$ des variables aléatoires. Simplifier, sous réserve d'existence, $\mathrm{cov}(a\mathrm{X}+b,c\mathrm{Y}+d)$ et $\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}+\mathrm{Z})$.

3. a) On suppose $m=n$. Que vaut le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\Delta_m,\Delta_n)$?

b) On suppose $m<n$. Justifier l'indépendance de $\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_m$ et S_m.

c) Calculer, pour tous m et n de $\mathbb{N}^*$, le coefficient de corrélation linéaire de Δ_m et Δ_n.

Solution (**Ex.402** – *Bilinéarité de la covariance et indépendance*)

1. Comme $\mathrm{S}_n+\mathrm{E}_n=n$, $\Delta_n=\mathrm{S}_n-n+\mathrm{S}_n=2\mathrm{S}_n-n$.
Donc $\mathrm{S}_n(\Omega)=[\![0\,;\,n]\!]$ donc $\Delta_n(\Omega)=\{2k-n;k\in[\![0\,;\,n]\!]\}=\{-n,-n+2,\dots,n-2,n\}$
$\mathbb{E}(\Delta_n)=2\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)-n=2np-n=n(2p-1)=n(p-q)$, $\mathbb{V}(\Delta_n)=4\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)=4npq$,

2. $\mathrm{cov}(a\mathrm{X}+b,c\mathrm{Y}+d)=ac\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}+\mathrm{Z})=\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})+\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Z})$

3.
- Si $m=n$ alors $\Delta_m=1\times\Delta_n+0$ et $\mathrm{cov}(\Delta_m,\Delta_n)=1$. Sinon, on peut revenir à $\mathrm{cov}(\Delta_m,\Delta_n)=\mathbb{V}(\Delta_n)=4npq$.
- Supposons $m<n$.
$\mathrm{cov}(\Delta_m,\Delta_n)=\mathrm{cov}(2\mathrm{S}_m-m,2\mathrm{S}_n-n)=4\mathrm{cov}(\mathrm{S}_m,\mathrm{S}_n)$.
Observons que $\mathrm{S}_n=\mathrm{S}_m+(\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_m)$ avec S_m et $\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_m$ indépendantes car S_m compte le nombre de succès au cours des m premières expériences et $\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_m$ le nombre de succès au cours des $n-m$ suivantes.
$\mathrm{cov}(\Delta_m,\Delta_n)=4\mathrm{cov}(\mathrm{S}_m,\mathrm{S}_m+(\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_m))=4\mathrm{cov}(\mathrm{S}_m,\mathrm{S}_m)+4\mathrm{cov}(\mathrm{S}_m,\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_m)=4\mathbb{V}(\mathrm{S}_m)+4\times 0=4mpq$
- Par symétrie du problème, si $m>n$, alors $\mathrm{cov}(\Delta_m,\Delta_n)=4npq$

Bilan : $\mathrm{cov}(\Delta_m,\Delta_n)=4\min(m,n)pq$ et du coup $\rho(\Delta_m,\Delta_n)=\frac{\min(m,n)}{\sqrt{mn}}=\min\left(\sqrt{\frac{m}{n}},\sqrt{\frac{n}{m}}\right)$

Exercice 403 *Loi de Pascal - Fonctions génératrices*

Soit $p \in]\,0\,;\,1\,[$. Soit (T_n) une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k$.

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction génératrice de S_n, et en déduire sa loi.
On pourra observer ce que donne la n-iéme dérivation de la série géométrique...

2. Soit $k \geqslant 2$. Déterminer la loi de T_1 sachant $[\mathrm{S}_2 = k]$.

3. On lance plusieurs fois une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir est p. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang moyen d'obtention du $n-$ième pile ?

Solution (**Ex.403** – *Loi de Pascal - Fonctions génératrices*)

1. Par indépendance des T_k, $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{G}_{\mathrm{T}_k}$.

Or pour tout k, $\mathrm{G}_{\mathrm{T}_k} : t \mapsto \dfrac{pt}{1-qt}$, donc $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n} : t \mapsto p^n t^n \dfrac{1}{(1-qt)^n}$.

Saisissons-nous de l'indication, pour x tel que $|x| < 1$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ d'une part,}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(k+1)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} x^k \text{ d'autre part.}$$

On en tire : $\forall t \in [\,0\,;\,1\,]$,

$$\frac{1}{(1-qt)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!}(qt)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{k} q^k t^k.$$

D'où : $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{k} q^k p^n t^{k+n} = \sum_{j=n}^{+\infty}\binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n t^j.$

On en déduit :

- $\mathrm{S}_n(\Omega) = [\![n, +\infty [\![$,
- $\forall j \geqslant n, \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j) = \binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n.$

Ceci s'interprète facilement : S_n est le rang d'apparition du $n-$ième succès dans un schéma de Bernoulli. Donc $\mathrm{S}_n(\Omega) = [\![n, +\infty [\![$. De plus, les suites d'épreuves favorables à $[\mathrm{S}_n = j]$ sont les suites de j lancers dont n succès avec le dernier à la fin, $j-n$ échecs, à placer parmi les $j-1$ épreuves de rang 1 à $j-1$. Cela fait $\begin{pmatrix} j-1 \\ j-n \end{pmatrix}$ suites possibles, deux à deux incompatibles et toutes de probabilité $p^n q^{j-n}$. Donc $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j) = \begin{pmatrix} j-1 \\ j-n \end{pmatrix} q^{j-n}p^n$... ce qui en fait redémontre le résultat précédent.

2. Sachant $[\mathrm{S}_2 = k]$, T_1 prend ses valeurs dans $[\![1\,;\,k-1]\!]$. Soit $i \in [\![1\,;\,k-1]\!]$.
$$\mathbb{P}_{[\mathrm{S}_2=k]}(\mathrm{T}_1 = i) = \frac{\mathbb{P}([\mathrm{S}_2 = k] \cap [\mathrm{T}_1 = i]}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_2 = k)} = \frac{\mathbb{P}([\mathrm{T}_2 = k-i] \cap [\mathrm{T}_1 = i]}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_2 = k)}$$
Or T_1 et T_2 sont indépendantes :
$$\mathbb{P}_{[\mathrm{S}_2=k]}(\mathrm{T}_1 = i) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{T}_2 = k-i)\mathbb{P}(\mathrm{T}_1 = i)}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_2 = k)} = \frac{pq^{k-i-1}pq^{i-1}}{\begin{pmatrix} k-1 \\ k-2 \end{pmatrix} q^{k-2}p^2} = \frac{1}{k-1}$$
La seule question est de savoir où a eu lieu le premier des 2 succès, et la moralité est que ça ne dépend plus de la probabilité de succès, mais est parfaitement uniforme : la loi de T_1 conditionnée par $[\mathrm{S}_2 = k]$ est la loi uniforme sur $[\![1\,;\,k-1]\!]$.

3. $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) \overset{\text{lin.}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{T}_i) = \frac{n}{p}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 404}}$ *Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes toutes deux de loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$.

On pose $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. L'objectif est de déterminer la loi de Z.

1. *Première méthode*
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$? En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k)$ puis montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

2. *Seconde méthode*
On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.

a) Quel est la loi de A et de D ?

b) Quel est la probabilité de l'événement « le premier lancer amène au moins un pile » ?

c) On note P le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile, sans distinction de couleur. Quel est la loi de P ?

d) Conclure.

Solution (**Ex.404** – *Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes*)

Soit $q = 1 - p$.

1. *Première méthode*
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k) = q^{k-1}$ ($k-1$ échecs successifs).
$\mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k) = \mathbb{P}([\mathrm{X} \geqslant k] \cap [\mathrm{Y} \geqslant k]) \overset{\text{indép.}}{=} q^{k-1}q^{k-1} = q^{2k-2}$.
$\mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) = \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k) - \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k+1) = q^{2k-2} - q^{2k} = \left(q^2\right)^{k-1}(1-q^2)$ ce qui prouve que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2 = p(2-p)$.

2. *Seconde méthode*
On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.

a) La loi de A et de D est $\mathcal{G}(p)$.

b) Soit B l'événement « le premier lancer amène au moins un pile ».
$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}) \overset{\text{indép.}}{=} q^2$, donc $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = 1 - q^2$.

c) La loi de P est $\mathcal{G}(\mathbb{P}(\mathrm{B})) = \mathcal{G}(1-q^2)$.

d) $\mathrm{P} = \min(\mathrm{A}, \mathrm{D})$: on retrouve le même résultat.

Exercice 405 *Loi uniforme sur différents supports*

1. Calculer l'espérance et la variance d'une variable X de loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$.

2. Soit $a < b$ deux entiers et Y une variable de loi uniforme sur $[\![a\,;\,b]\!]$.

a) Déterminer une transformation affine $t \mapsto \alpha t + \beta$ envoyant $[\![a\,;\,b]\!]$ sur un intervalle du type $[\![1\,;\,n]\!]$.

b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent l'espérance et la variance d'une variable de loi uniforme sur $\{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$?

Exercice 406 *L'inversion n'est pas linéaire - Transferts*

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. Soit $\lambda \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$ et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X}+1)} < \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}\right)$.

2. Soit $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant la loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X})} < \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)$.

3. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et admettant une espérance.

a) Justifier que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)$ existe.

b) En développant $\mathbb{E}\left(\left[t\sqrt{\mathrm{X}}+\sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{X}}}\right]^2\right)$, montrer que $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X})} \leqslant \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)$.

c) Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs positives et d'espérance nulle. Montrer que Y est presque sûrement nulle.

d) Dans que cas a-t-on $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X})} = \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)$?

Solution (**Ex.406** – *L'inversion n'est pas linéaire - Transferts*)

1. a) $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathrm{X}(\Omega)$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \lambda$.

b)
- Par linéarité : $\mathbb{E}(\mathrm{X}+1) = \lambda + 1$.
- Par transfert, on s'intéresse à la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{k+1}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ i.e. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{\lambda^k}{(k+1)!}$: cette

série exponentielle converge absolument donc $\mathbb{E}(1/(\mathrm{X}+1))$ existe.

$\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$.

c) $\dfrac{1}{\lambda+1} < \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda < (\lambda+1)(1-\mathrm{e}^{-\lambda}) \Leftrightarrow 1 > (\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda} > \lambda + 1$.

Cette inégalité classique est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Comme ici $\lambda \in \left]0\,;+\infty\right[$, $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X}+1)} < \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}\right)$.

2. a) $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = (1-p)^{k-1}p$ pour $k \in \mathrm{X}(\Omega)$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{p}$.

b) Par transfert, on s'intéresse à la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k}(1-p)^{k-1}$: cette série du entière du logarithme converge absolument car $|1-p| < 1$, donc $\mathbb{E}(1/(\mathrm{X}+1))$ existe.

$\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) = -\dfrac{p}{1-p}\ln(1-(1-p)) = -\dfrac{p}{1-p}\ln(p)$.

c) $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X})} < \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) \Leftrightarrow p < -\dfrac{p}{1-p}\ln(p) \Leftrightarrow \ln(p) < p - 1$

Cette inégalité classique est vraie pour tout $p \in \left]0\,;1\right[$, donc $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X})} < \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)$.

3. a) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{k}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$, et $\sum\limits_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ converge (de somme 1), donc par comparaison de termes généraux positifs, $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ converge absolument et $\mathbb{E}\big(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\big)$ existe par transfert.

b) Par linéarité :
$$\mathbb{E}\left(\left[t\sqrt{\mathrm{X}}+\sqrt{\frac{1}{\mathrm{X}}}\right]^2\right)=\mathbb{E}\left(t^2\mathrm{X}+2t+\frac{1}{\mathrm{X}}\right)=\mathbb{E}(\mathrm{X})t^2+2t+\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right).$$
Comme $\left[t\sqrt{\mathrm{X}}+\sqrt{\frac{1}{\mathrm{X}}}\right]^2$ est une variable positive, son espérance est positive.

Donc le trinôme $\mathbb{E}(\mathrm{X})t^2+2t+\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$ est positif sur $\mathbb{R}$, il admet au plus une racine réelle et son discriminant est négatif ou nul :
$4-4\mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)\leqslant 0$, donc $\mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)\geqslant 1$, donc $\frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{X})}\leqslant\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$.

c) $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega)}y\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)$. S'il existe $y>0$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)>0$, alors $\mathbb{E}(\mathrm{Y})\geqslant y\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)>0$, ce qui est impossible. Donc : $\forall y>0, \mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)=0$. Comme : $\forall y<0, \mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)=0$ puisque $y\notin\mathrm{Y}(\Omega)$, on en déduit : $\forall y\neq 0, \mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)=0$.
Et : $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=0)=1-\sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega),y\neq 0}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)=1$.

d) S'il y a égalité, le discriminant précédent est nul et le trinôme admet une racine réelle : il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left(\left[t\sqrt{\mathrm{X}}+\sqrt{\frac{1}{\mathrm{X}}}\right]^2\right)=0$.

Alors $\mathbb{P}\left(\left[t\sqrt{\mathrm{X}}+\sqrt{\frac{1}{\mathrm{X}}}\right]^2=0\right)=1$, i.e. $\mathbb{P}\left(t\sqrt{\mathrm{X}}+\sqrt{\frac{1}{\mathrm{X}}}=0\right)=1$, donc $\mathbb{P}(t=\frac{-1}{\mathrm{X}})=0$.
Donc X est presque sûrement constante.
Réciproquement, si X est presque sûrement constante, i.e. $\exists t_0\in\mathbb{N}^*$ (car $\mathrm{X}(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$), tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X}=t_0)=1$, alors $\mathbb{E}(\mathrm{X})=t_0$ et $\mathbb{E}(1/\mathrm{X})=\frac{1}{t_0}$ puisque $\mathbb{P}(1/\mathrm{X}=t_0)=1$. Il y bien égalité.
Il y a égalité si, et seulement si, X est presque sûrement constante.
Ce qui confirme les conclusion précédentes concernant la loi de Poisson et la loi géométrique.

Exercice 407 *Espérances et conditionnement*
p et q désignent deux réels avec $p\in]0,1[$ et $q=1-p$.
On considère une variable aléatoire réelle X ayant pour loi :
$$\begin{cases}\mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N}\\ \forall k\in\mathbb{N},\ p_k\overset{\text{déf.}}{=}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)=pq^k\end{cases}.$$

1. a) Vérifier que la suite $(p_k)_{k\geqslant 0}$ définit bien une loi de probabilité.

b) Montrer que $\mathrm{U} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{X}+1$ suit une loi usuelle que l'on précisera.

c) En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

2. On pose $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{\mathrm{U}}$. Montrer que Y possède une espérance et la calculer.

3. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant $(\mathrm{X}=k)$ est uniforme sur $[\![0\,;\,k]\!]$. Déterminer la loi de Z *(chaque probabilité sera laissée sous forme d'une somme).*

4. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ *(on admet l'existence de cette espérance et on suppose que l'on peut permuter les symboles de sommation $\sum$).*

Solution (**Ex.407** – *Espérances et conditionnement*)

1. a) $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} pq^k = p\frac{1}{1-q} = 1$ car $|q|<1$: ceci fait de la suite (p_k) une loi de probabilité.

b) Soit $\mathrm{U}=\mathrm{X}+1$. Alors $\mathrm{U}(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{U}=k)=\mathbb{P}(\mathrm{X}=k-1)=q^{k-1}p$, donc U suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

c) $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\mathbb{E}(\mathrm{U}-1)=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{q}{p}$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})=\mathbb{V}(\mathrm{U})=\mathbb{V}(\mathrm{U}-1)=\dfrac{q}{p^2}$.

2. Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(\mathrm{Y})=\mathbb{E}(1/\mathrm{U})$ existe si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\mathbb{P}(\mathrm{U}=k)$ i.e. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}pq^{k-1}$ converge absolument. Au facteur $\dfrac{p}{q}$ près, on reconnaît la série entière donnant $-\ln(1-q)$ absolument convergente car $|q|<1$.

Donc $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ existe et vaut $-\dfrac{p\ln p}{q}$.

Remarque : On aurait aussi pu passer par la loi de Y. C'est un peu plus long...

$\mathrm{Y}(\Omega)=\left\{\dfrac{1}{k}, k\in\mathbb{N}^*\right\}$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\mathrm{Y}=\dfrac{1}{k}\right)=\mathbb{P}(\mathrm{U}=k)=pq^{k-1}$.

Puis $\displaystyle\mathbb{E}(\mathrm{Y})=\sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega)} y\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}pq^{k-1}$... même calcul finalement.

3. Pour $z\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Z}=z)\begin{cases}\dfrac{1}{k+1} & \text{si } z\leqslant k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements tous de probabilité non nulle $(\mathrm{X}=k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\displaystyle\mathbb{P}(\mathrm{Z}=z)=\sum_{k=z}^{+\infty}\frac{1}{k+1}pq^k$.

4. $\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \displaystyle\sum_{z=0}^{+\infty}\sum_{k=z}^{+\infty}\frac{zpq^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{z=0}^{k}\frac{zpq^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{pq^k}{k+1}\sum_{z=0}^{k}z\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{pq^k}{k+1}\frac{k(k+1)}{2}\right) =$ $\displaystyle\frac{pq}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}kq^{k-1} = \frac{qp}{2p^2}$. Donc $\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \dfrac{q}{2p}$.

Exercice 408 *Espérance par récurrence*

Un individu gravit un escalier. A chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient «pile» et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient «face».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et D_n le nombre de fois ou l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
  a) Quelle est la loi usuelle suivie par D_n ?
  b) Déterminer une relation simple liant X_n et D_n. En déduire la loi de X_n.
  c) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche. On note $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)$ l'espérance de Y_n.
  a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
  b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
  c) Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = p\times\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k-1) + (1-p)\times\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-2} = k-1)$$
  d) Montrer que pour $n \geqslant 3$, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = p.\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-1}) + (1-p)\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-2}) + 1$.

3. On considère l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$ définie par
$$(\mathcal{R}) \ : \qquad \text{pour tout } n \geqslant 3,\ u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + 1.$$
  a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\mathcal{R})$.
  b) Montrer que u vérifie la relation $(\mathcal{R})$ si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation :
$$\text{pour tout } n \geqslant 3,\ v_n = pv_{n-1} + (1-p)v_{n-2}.$$
  c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)$.

Solution (**Ex.408** – *Espérance par récurrence*)

Je pose $q = 1 - p$.

1. a) $\mathrm{D}_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; q)$.
  b) $\mathrm{X}_n = n + \mathrm{D}_n$, $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![n\,;\,2n]\!]$ et $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!]$,$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = n+k) = \mathbb{P}(\mathrm{D}_n = k) = \dbinom{n}{k}q^kp^{n-k}$.
  c) $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n) = n(1+q)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}_n) = npq$.

2. a) Je note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x. $\mathrm{Y}_n(\Omega) = \left[\!\left[\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \,;\, n \right]\!\right]$.

b) $\mathrm{Y}_1(\Omega) = \{1\}$, $\mathrm{Y}_1 = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)$, $\mathrm{Y}_1(\Omega) = \{1;2\}$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_2 = 1) = q$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_2 = 2) = p$, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_2) = q + 2p = 1 + p$.

c) Soit A l'événement « l'individu gravit exactement une marche au premier pas ». Par la FPT avec le SCE $(\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}})$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}_n = k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{Y}_n = k) = p\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k-1) + q\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-2} = k-1)$.

d) En remplaçant $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k)$ par l'expression précédente dans $\sum_k k\mathbb{P}(y_n = k)$, on obtient :
$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = p\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-1}) + q\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-2}) + 1$.

3. a) En simplifiant la relation : $\forall n \geqslant 3, \quad \alpha n = p\alpha(n-1) + q\alpha(n-2) + 1$, on obtient $\alpha = 1/(1+q)$.

b) $\forall n \geqslant 3, u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} + 1 \Leftrightarrow \forall n \geqslant 3, u_n - \alpha n = pu_{n-1} + qu_{n-2} + 1 - (p\alpha(n-1) + q\alpha(n-2) + 1) \Leftrightarrow \forall n \geqslant 3, v_n = p(u_{n-1} - \alpha(n-1)) + q(u_{n-2} - \alpha(n-1)) \Leftrightarrow \forall n \geqslant 3, v_n = pv_{n-1} + qv_{n-2}$.

c) En prenant $u_n = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)$, $v_n = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) - \alpha n$, v vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, les racines de l'équation caractéristique sont $-q$ et 1 : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geqslant 1, \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = a(-q^n) + b + \frac{n}{1+q}$. On trouve a et b en utilisant $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_2)$.

Exercice 409 *Maximum de deux variables géométriques*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$.
Soit $\mathrm{Z} = \sup(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.
Déterminer la loi de Z, vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in \mathrm{Z}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) = 1$ et calculer son espérance.

Solution (**Ex.409** – *Maximum de deux variables géométriques*)
Posons $q = 1 - p$.

- $\mathrm{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$\mathbb{P}(\mathrm{Z} \leqslant k) = \mathbb{P}([\mathrm{X} \leqslant k] \cap [\mathrm{Y} \leqslant k]) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant k)\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant k)$
or $\mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} > k) = (1-p)^k$ (les k premières expériences sont des échecs), donc $\mathbb{P}(\mathrm{Z} \leqslant k) = \left(1 - q^k\right)^2$ (y compris pour $k = 0$... remarque pour ce qui va suivre).
Enfin, $\mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) = \mathbb{P}(\mathrm{Z} \leqslant k) - \mathbb{P}(\mathrm{Z} \leqslant k-1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$
$\mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) = 2q^{k-1} - 2q^k + q^{2k} - q^{2k-2} = 2pq^{k-1} - (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$

- De $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ pour $r \in \,]\,0\,;\,1\,[$, on tire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) = 2p \times \frac{1}{1-p} - (1 - q^2) \times \frac{1}{1-q^2} = 1.$$

• De $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ pour $r \in \,]0\,;1[$ (obtenue par dérivation de la série géométrique), on tire :
$\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ existe et
$\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = 2p \times \dfrac{1}{p^2} - (1-q^2) \times \dfrac{1}{(1-q^2)^2} = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{2p-p^2} = \dfrac{3-2p}{p(2-p)}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 410}}$ *Poisson : somme et conditionnement*
On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

1. Montrer que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant $[\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]$.

Solution (**Ex.410** – *Poisson : somme et conditionnement*)

1. Par indépendance, $\mathcal{G}_{\mathrm{X+Y}}(t) = \mathcal{G}_{\mathrm{X}}(t)\mathcal{G}_{\mathrm{Y}}(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$.
Donc $\mathrm{X}+\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

2. Sachant $[\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]$, X prend ses valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$.
Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$.
$\mathbb{P}_{[\mathrm{X+Y}=n]}([\mathrm{X}=k]) = \dfrac{\mathbb{P}([\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]\cap[\mathrm{X}=k])}{\mathbb{P}([\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n])} = \dfrac{\mathbb{P}([\mathrm{Y}=n-k]\cap[\mathrm{X}=k])}{\mathbb{P}([\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n])}$
$\mathbb{P}_{[\mathrm{X+Y}=n]}([\mathrm{X}=k]) \overset{\text{indép.}}{=} \dfrac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{n-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{(n-k)!k!} \times \dfrac{n!}{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}$
$\mathbb{P}_{[\mathrm{X+Y}=n]}([\mathrm{X}=k]) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$
La loi conditionnelle de X sachant $[\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]$ est la loi binomiale de paramètre n et $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 411}}$ *Éclosion*
Un insecte pond des œufs, dont le nombre suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'insectes nés.
Étudier la loi et l'espérance de X.

Solution (**Ex.411** – *Éclosion*)
Notons Y la variable aléatoire égale au nombre d'œufs pondus.
Le support de X est $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La loi de X conditionnée par $[\mathrm{Y}=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathrm{Y}=n])_{n\in\mathbb{N}}$:

$\mathbb{P}([X = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n])\mathbb{P}_{[Y=n]}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ en tenant compte de $\mathbb{P}_{[Y=n]}(X = k) = 0$ pour $n < k$,

$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}$

$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$, donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

Par conséquent, $\mathbb{E}(X) = \lambda p$.

Exercice 412 *Estimation du paramètre d'une loi géométrique*

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = T_1 + \cdots + T_n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n est donnée par :

$$S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\quad \text{et} \quad \forall k \geqslant n, \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{n-1}{S_n - 1}\right)$ existe et vaut p.

Solution (**Ex.412** – *Estimation du paramètre d'une loi géométrique*)

1. • La formule proposée est vraie pour $n = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la formule vraie pour n.

$S_{n+1}(\Omega) = [\![n+1, +\infty[\![$ puisque au minimum chaque T_i vaut 1.

Soit $k \geqslant n+1$. De $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$ on tire :

$[S_{n+1} = k] = \bigcup_{n\leqslant i\leqslant k-1}([S_n = i] \cap [T_{n+1} = k - i])$

car $T_{n+1} \geqslant 1$ et $S_n \geqslant n$ entraîne $k - i \geqslant 1$ c'est-à-dire $i \leqslant k-1$ et $i \geqslant n$.

Par réunion disjointe, puis indépendance de S_n et T_{n+1} :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) &= \sum_{i=n}^{k-1}\mathbb{P}([S_n = i])\mathbb{P}([T_{n+1} = k-i]) \\ &= \sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}p^n(1-p)^{i-n}p(1-p)^{k-i-1} \\ &= p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}\end{aligned}$$

Reste à établir que : $\sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.

La formule de Pascal permet de glisser de $n-1$ à n, en écrivant :

$\binom{i-1}{n-1} = \binom{i}{n} - \binom{i-1}{n}$.
Alors :
$\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \sum_{i=n}^{k-1} \left(\binom{i}{n} - \binom{i-1}{n}\right) = \binom{k-1}{n} - \binom{n-1}{n}$ par télescopage. Et comme $\binom{n-1}{n} = 0$, c'est gagné.

2. On étudie la série de terme général $\frac{n-1}{k-1}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$.
$\forall k \geqslant n, \frac{n-1}{k-1}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \frac{n-1}{k-1}\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} = \binom{k-2}{n-2}p^n(1-p)^{k-n} = \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-1} = k-1)p$.
Or $\sum_{k \geqslant n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-1} = k-1)$ n'est autre que $\sum_{j \in \mathrm{S}_{n-1}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-1} = j)$ donc converge absolument et sa somme vaut 1.
La série de terme général $\frac{n-1}{k-1}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$ converge absolument, donc par le théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(\frac{n-1}{\mathrm{S}_n - 1}\right)$ existe et vaut $1 \times p = p$..

Exercice 413 *Antirépartition, puis espérance totale*

Deux joueurs procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce, laquelle obtient pile avec une probabilité $p \in]\,0\,;\,1\,[$ et face avec la probabilité $q = 1-p$. Le joueur A commence ses lancers et s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X le nombre de lancers qu'il a effectués.
Ensuite, le joueur B effectue autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers du joueur B ayant donné un pile.

1. Rappeler la loi de X, indiquer $\mathrm{Y}(\Omega)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[\mathrm{X} = k]$.

2. Calculer $\mathbb{P}([\mathrm{Y} = 0])$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\mathbb{P}([\mathrm{Y} = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1} = \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}.$$

4. a) Déterminer, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant n)$.
b) Montrer que Y admet une espérance dont la valeur est indépendante du paramètre p.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y})$ l'espérance de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{[\mathrm{X}=k]}$. Autrement dit :

$$\mathrm{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y}) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}([\mathrm{Y}=n]).$$

a) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y})$ en précisant sa valeur, et justifier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y})$.

b) En admettant que la permutation des sommes est licite, justifier la *formule des l'espérance totale* :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}).$$

Indication : on ne cherchera pas à remplacer les différentes probabilités par leur valeur...

c) Retrouver alors la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Solution (**Ex.413** – *Antirépartition, puis espérance totale*)
Je pose $q = 1-p$.

1. $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$.
Sachant $[\mathrm{X}=k]$, Y compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de k épreuves, donc : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}([\mathrm{Y}=n]) = \begin{cases} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} & \text{si } n \leqslant k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases} = \binom{k}{n} p^n q^{k-n}.$$

2. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathrm{X}=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ permet d'écrire :

$$\mathbb{P}([\mathrm{Y}=0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}([\mathrm{Y}=0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^k = pq\sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = pq\frac{1}{(1-q^2)} = \frac{q}{1+q}.$$

3. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathrm{X}=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ permet d'écrire :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([\mathrm{Y}=n]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}([\mathrm{Y}=n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1}p\binom{k}{n}p^n q^{k-n}$$

$$= \frac{p^{n+1}}{n!q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!}(q^2)^k$$

Et un petit coup de série entière :

pour $z \in\,]-1\,;1[$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!}z^k = z^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!}z^{k-n} = z^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{1-z}\right) =$

$z^n \dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$

D'où :

$\mathbb{P}([\mathrm{Y}=n]) = \dfrac{p^{n+1}}{n!q^{n+1}} \times q^{2n} \dfrac{n!}{(1-q^2)^{n+1}} = \dfrac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}$

4. a) $\forall n \geqslant 1$,

$\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$

$= \dfrac{1}{q(1+q)} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^n \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-n} = \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} \times \frac{1}{1-q/(1+q)}$

$\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant n) = \dfrac{q^{n-1}}{(1+q)^n}$

b) Puisque $\left|\dfrac{q}{1+q}\right| < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant 1)$ converge. Comme $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$, cela prouve que $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ existe et vaut :

$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant n) = \frac{1}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1} = \frac{1}{1+q} \times \frac{1}{1-q/(1+q)} = 1,$

qui est bien indépendante de p.

5. a) • La somme définissant $\mathbb{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y})$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, elle existe et :

$\mathbb{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} n \binom{k}{n} p^n q^{k-n} = kp$, espérance d'une variable de loi $\mathcal{B}(k,p)$.

• $\mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y}) = p^2 k q^{k-1}$ est le terme général d'une série entière convergente : la dérivée de la série géométrique de paramètre $q \in \,]\,0\,;1\,[$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{E}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}([\mathrm{X}=k]) \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Y}=n)\right) =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n\mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}([\mathrm{Y}=n])\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{X}=k])\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}([\mathrm{Y}=n])\right)$

$\displaystyle\overset{\mathrm{FPT}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(|\mathrm{Y}=n]) = \mathbb{E}(\mathrm{Y})$

c) Retrouver alors la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Exercice 414 *Rang d'apparition dans un tirage sans remise*

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}$.

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire ces boules une à une sans remise jusqu'à vider l'urne et on note X le rang de la première boule blanche sortie.

On pourra considérer comme univers des possibles l'ensemble des parties de $[\![1\,;\,2n]\!]$ à n éléments, une telle partie étant l'ensemble des numéros de tirages qui donnent une boule blanche.

a) Montrer que la loi de X est donnée par $\mathrm{X}(\Omega) = [\![1\,;\,n+1]\!]$ et

$$\forall k \in [\![1\,;\,n+1]\!]\,, \quad \mathbb{P}([\mathrm{X}=k]) = \frac{\dbinom{2n-k}{n-1}}{\dbinom{2n}{n}}.$$

b) Calculer $\mathbb{E}(2n+1-\mathrm{X})$, puis $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

Solution (**Ex.414** – *Rang d'apparition dans un tirage sans remise*)

1. Par la formule de Pascal, puis par télescopage :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right] = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - 0.$$

La formule se démontre aussi par récurrence sur $n \geqslant p$ (hérédité par la formule de Pascal).

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

2. a) • Dans le plus rapide des cas, une boule blanche sort au premier tirage et dans le pire, n boules noires sortent aux n premiers tirages.

• $\mathrm{Card}\,(\Omega) = \dbinom{2n}{n}$ car Ω est l'ensemble des parties à n éléments de $[\![1\,;\,2n]\!]$, ensemble à $2n$ éléments.

• Un cas ω favorable à $[\mathrm{X}=k]$ est une partie contenant l'entier k ainsi que $n-1$ entiers distincts de $[\![k+1\,;\,2n]\!]$, de sorte que $\min(\omega) = k$. Il y a donc $\dbinom{2n-k}{n-1}$ parties ω favorables à $[\mathrm{X}=k]$.

• Par équiprobabilité des suites de tirages,

$$\forall k \in [\![1\,;\,n+1]\!]\,, \quad \mathbb{P}([\mathrm{X}=k]) = \frac{\dbinom{2n-k}{n-1}}{\dbinom{2n}{n}}.$$

b) Calculer $\mathbb{E}(2n+1-\mathrm{X})$, puis $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

On calcule $\mathbb{E}(2n+1-\mathrm{X})$ par transfert :

$$\mathbb{E}(2n+1-\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n+1}(2n+1-k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{k=1}^{n+1}(2n+1-k)\frac{\binom{2n-k}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$$

$$\mathbb{E}(2n+1-\mathrm{X}) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(2n+1-k)!}{(n-1)!(n-k+1)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n+1} n\binom{2n+1-k}{n}$$

Posons alors $j = 2n+1-k$ de sorte que j décrit $[\![n\,;\,2n]\!]$ lorsque k décrit $[\![1\,;\,n+1]\!]$:

$$\mathbb{E}(2n+1-\mathrm{X}) = \frac{n}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=n}^{2n}\binom{j}{n} \overset{1)}{=} \frac{n}{\binom{2n}{n}}\binom{2n+1}{n+1} = \frac{n(2n+1)}{n+1}$$

Alors par linéarité, $2n+1-\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{n(2n+1)}{n+1}$, d'où $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{2n+1}{n+1}$

Exercice 415 *Permutations de chocolats*

Patatras ! Angèle fait tomber son beau calendrier de l'Avent tout neuf et n chocolats en sortent. Heureusement, ils tombent sur la table. Angèle pourra les replacer dans le calendrier sans souci. À cet instant, la sonnerie retentit et Angèle n'a pas l'intention de rejoindre le club très fermé des retardataires. Elle replace donc précipitamment les n chocolats dans les n places vacantes, au hasard et sans se soucier de remettre chaque chocolat à sa place initiale, et court en salle 126, espérant doubler Hadrien ou Kirill en chemin.

On note Y_n le nombre de chocolats remis à leur place initiale.

1. a) On suppose *dans cette question uniquement* que n vaut 1.

Donner la loi de Y_1, ainsi que son espérance et sa variance.

b) On suppose *dans cette question uniquement* que n vaut 2.

Donner la loi de Y_2, ainsi que son espérance et sa variance.

Dans toutes les questions suivantes, on suppose n au moins égal à 2.

2. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, soit C_k l'événement : « *Angèle a remis le $k^{\text{ème}}$ chocolat a sa place initiale* », et X_k la variable indicatrice de l'événement C_k.

Justifier que chaque X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$. En déduire l'espérance de Y_n.

3. Soient i et j deux indices de $[\![1\,;\,n]\!]$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

a) Justifier $\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n(n-1)}$.

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) ainsi que son coefficient de corrélation linéaire.

c) Commenter $\rho(X_i, X_j)$ lorsque $n = 2$, puis pour n grand.

d) À l'aide des résultats précédents, montrer que la variance de Y_n vaut 1.

Solution (**Ex.415** – *Permutations de chocolats*)

1. a) S'il n'y a qu'un chocolat à ranger dans une case, Angèle le range nécessairement à sa place initiale. Y_1 est constante égale à 1, $\mathbb{E}(Y_1) = 1$ et $\mathbb{V}(Y_1) = 0$.

b) Il y deux rangements possibles : l'un place les deux chocolats à leur place, l'autre les permute.
Donc $Y_2(\Omega) = \{0; 2\}$, $\mathbb{P}(Y_2 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 2) = 1/2$, $\mathbb{E}(Y_2) = 1$, $\mathbb{E}(Y_2^2) = 2$ et $\mathbb{V}(Y_2) = 1$. (Y_2 suit la loi uniforme sur $\{0; 2\}$...)

2. • Il y a $n!$ permutations possibles et $(n-1)!$ rangeant le $k^{\text{ème}}$ chocolat à la $k^{\text{ème}}$ place.
$\mathbb{P}(X_k = 1) \overset{\text{dén.}}{=} \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/n)$.
On peut aussi dire que le $k^{\text{ème}}$ chocolat à n places possibles et équiprobables et qu'une seule est la bonne ...

• $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \overset{\text{lin.}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 1.$

3. a) En raisonnant comme en 2.a) (soit sur les permutations, soit sur les places possibles des deux chocolats), pour $i \neq j$, $\mathbb{P}(X_iX_j = 1) \overset{\text{dén.}}{=} \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$, $X_iX_j \hookrightarrow \mathcal{B}(1/(n(n-1))$.

b) Pour $i \neq j$, $\operatorname{cov}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.
$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{V}(X_j) = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^2}$ et $\rho(X_i, X_j) = \dfrac{1}{(n-1)^2}$.

c) • Pour $n = 2$, $\rho(X_1, X_2) = 1$, il existe une relation affine entre X_1 et X_2. En effet, s'il n'y a que deux chocolats, soit ils sont bien rangés, soit ils sont permutés (cf 1.b)), donc $X_1 = X_2$.

• Pour n grand, $\rho(X_i, X_j)$ est proche de 0. Plus n est grand, moins les X_k sont corrélées.

d) $\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{V}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$. Cette dernière somme double compte exactement $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ termes (il s'agit de choisir deux indices distincts parmi n), tous égaux à $\dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

Donc $\mathbb{V}(\mathrm{Y}_n) = n\dfrac{1}{n}\big(1-\dfrac{1}{n}\big) + 2\dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{1}{n^2(n-1)} = 1.$

Exercice 416 *6 partout*

On lance n dés pipés, donnant le chiffre 6 avec la probabilité $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$. À chaque lancer, on met de côté ceux qui font 6 et on relance tous les autres. On arrête une fois que tous les dés ont fait 6.

Notons X_1 la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus au premier lancer, X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués et Y celle égale au nombre de dés lancés au total.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note T_i le rang d'obtention du 6 avec le $i-$ème dé. Quelle est la loi de T_i ? Indiquer son espérance et sa variance.
3. Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(\mathrm{T}_i \leqslant k)$? En déduire la loi de X.
4. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$, puis la loi de Y.

Solution (**Ex.416** – *6 partout*)

1. On reconnaît un schéma de Bernoulli et X_1 qui compte le nombre de succès « 6 » suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, d'où $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = np$, $\mathbb{V}(\mathrm{X}_1) = np(1-p)$.
2. T_i étant le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès p, T_i suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, d'espérance $\mathbb{E}(\mathrm{T}_i) = 1/p$ et de variance $\mathbb{V}(\mathrm{T}_i) = (1-p)/p^2$.
3. • $\mathbb{P}(\mathrm{T}_i \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{T}_i > k) = 1-(1-p)^k$ car il s'agit d'obtenir successivement et indépendamment k faces.
   • $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   • Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Observons que : $\mathrm{X} = \max_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}(\mathrm{T}_i)$. Comme pour tout *max*, mieux vaut étudier $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant k)$.
   $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant k) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} [\mathrm{T}_i \leqslant k]\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{T}_i \leqslant k)$ par indépendance. Donc :
   $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant k) = \big[1-(1-p)^k\big]^n$, formule établie pour $k \in \mathbb{N}^*$ mais encore valable pour $k = 0$.
   De la réunion disjointe $[\mathrm{X} \leqslant k] = [\mathrm{X} \leqslant k-1] \cup [\mathrm{X} = k]$ on tire :
   $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant k) - \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant k-1) = \big[1-(1-p)^k\big]^n - \big[1-(1-p)^{k-1}\big]^n.$
4. Ouvrons les yeux : $\mathrm{Y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_i$.
   Par linéarité : $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{T}_i) = \dfrac{n}{p}$.
5. • $\mathrm{Y}(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$

- Soit $k \in \mathrm{Y}(\Omega)$. $[\mathrm{Y}=k]$ signifie qu'on a effectué k lancers en ayant eu exactement $(n-1)$ « 6 » lors des $k-1$ premiers lancers puis un ultime 6. En notant Z une variable de loi $\mathcal{B}(k-1,p)$ comptant le nombre de 6 au cours de $k-1$ lancers et S_k l'événement « obtenir 6 au $k-$ème lancer », par indépendance : $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)=\mathbb{P}([\mathrm{Z}=n-1]\cap \mathrm{S}_k)=\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n-1)\mathbb{P}(\mathrm{S}_k)=\binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^{n-1}p=\binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$.

Exercice 417 *La séquence pile-face par les fonctions génératrices*

On considère une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » est $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$ et la probabilité d'obtenir « face » est $q \overset{\text{déf.}}{=} 1-p$.
On lance successivement et indépendamment la pièce et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première séquence « pile-face ». On convient de prendre X égale au rang du « pile » de cette séquence.
Ainsi, si les premiers lancers donnent : $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{F}_4, \mathrm{P}_5, \ldots$, alors $\mathrm{X}=3$. On note :

- $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$;
- P_1 (resp. F_1) l'événement " obtenir « pile » (resp. « face ») au premier lancer ".

1. a) À l'aide du système complet $(\mathrm{P}_1, \mathrm{F}_1)$, montrer que :
$$(\heartsuit) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = p^k q + q a_{k-1}.$$
b) En déduire que l'événement J « la séquence pile-face n'apparaît jamais » est presque impossible.

2. a) À l'aide de $(\heartsuit)$, montrer que : $\quad \forall t \in [\,0\,;\,1\,], \quad \mathrm{G}(t)=\dfrac{pqt}{1-t+pqt^2}$.
b) En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

3. Pour quelle valeur de p l'espérance $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ est-elle maximale ?

4. a) On suppose **uniquement dans cette question** que la pièce est juste. En étudiant la suite $\left(2^{k+1}a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, déterminer la loi de X et retrouver son espérance.
b) On suppose $\mathbf{p \neq 1/2}$. En étudiant la suite $\left(p^{-k}a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, déterminer la loi de X et retrouver son espérance.

Solution (**Ex.417** – *La séquence pile-face par les fonctions génératrices*)

1. a) À l'aide du système complet $(\mathrm{P}_1, \mathrm{F}_1)$,
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \mathbb{P}(\mathrm{P}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{X}=k)+\mathbb{P}(\mathrm{F}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{X}=k)$.

- $\mathbb{P}_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{X}=k)=\mathbb{P}(\mathrm{P}_2\cap\mathrm{P}_3\cap\cdots\cap\mathrm{P}_k\cap\mathrm{F}_{k+1}) \overset{\text{indép.}}{=} p^{k-1}q$.
- $\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{X}=k)=\mathbb{P}($« obtenir la première séquence PF en k-1 coups »$)=\mathbb{P}(\mathrm{X}=k-1)$
- Conclusion : $\forall k\in\mathbb{N}^*, a_k=p^kq+qa_{k-1}$.

b) $\overline{\mathrm{J}}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*}[\mathrm{X}=k]$ et par incompatibilité

$\mathbb{P}(\bar{\mathrm{J}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$

Par ($\heartsuit$) et comme $a_0 = 0$,

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = q \sum_{k=1}^{+\infty} p^k + q \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{qp}{1-p} + q \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ d'où $(1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = p$ et finalement $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$.

Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{J}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{\mathrm{J}}) = 0$.

2. a) Soit $t \in [\,0\,;\,1\,]$. Nous avons : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k t^k = p^k q t^k + q a_{k-1} t^k$.

En sommant pour k parcourant $\mathbb{N}^*$, en se souvenant que $a_0 = 0$,

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} p^k q t^k + \sum_{k=1}^{+\infty} q a_{k-1} t^k$

$\mathrm{G}(t) = qpt \sum_{k=1}^{+\infty} (pt)^{k-1} + qt \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} t^{k-1}$

$\mathrm{G}(t) = qpt \times \frac{1}{1-pt} + qt\mathrm{G}(t).$

$(1-qt)\mathrm{G}(t) = \frac{pqt}{1-pt}$ donc $\mathrm{G}(t) = \frac{pqt}{(1-pt)(1-qt)} = \frac{pqt}{1-t+pqt^2}.$

b) $\forall t \in [\,0\,;\,1\,], \mathrm{G}'(t) = \frac{pq(1-t-pqt^2) - pqt(2pqt-1)}{(1-t+pqt^2)^2} = \frac{pq(1-pqt)}{(1-t+pqt^2)^2}$

$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'(1) = \frac{pq(1-pq)}{(1-1+pq)^2} = \frac{1}{pq} - 1.$

3. $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ est minimale lorsque pq est maximale.

$pq = p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ est maximale si, et seulement si, $p = 1/2$.

$\mathbb{E}(\mathrm{X})$ est minimale si, et seulement si, $p = 1/2$, et vaut alors 3.

4. a) En multipliant ($\heartsuit$) par 2^{k+1} :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, 2^{k+1} a_k = 1 + 2^k a_{k-1}$: la suite $(2^{k+1} a_k)_{k \geqslant 0}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme 0, donc

$\forall k \in \mathbb{N}^*, 2^{k+1} a_k = k \times 1 + 0$, donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = a_k = \frac{k}{2^{k+1}}$.

Pour retomber sur une série géométrique dérivée du cours, mieux vaut calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}-1)$:

$\mathbb{E}(\mathrm{X}-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k-1) k a_k = \frac{1}{2^3} \sum_{k=0}^{+\infty} (k-1) k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{2^3} \times \frac{2}{(1-1/2)^3} = 2,$

donc par linéarité $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}-1) + 1 = 3$.

b) En multipliant ($\heartsuit$) par p^{-k} :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, p^{-k}a_k = q + \dfrac{q}{p}p^{-(k-1)}a_{k-1}$: la suite $(p^{-k}a_k)_{k\geqslant 0}$ est arithmético-géométrique.

Point fixe de la relation : $\ell = q + \dfrac{q}{p}\ell \Leftrightarrow \ell\left(1-\dfrac{q}{p}\right) = q \Leftrightarrow \ell = \dfrac{pq}{p-q}$.

On a alors une classique suite géométrique :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, p^{-k}a_k - \ell = \dfrac{q}{p}\left(p^{-(k-1)}a_{k-1} - \ell\right)$

de premier terme $p^0 a_0 - \ell = -\ell$ et de raison $\dfrac{q}{p}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, p^{-k}a_k = \left(\dfrac{q}{p}\right)^k(-\ell) + \ell = \ell\left(1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^k\right)$, d'où finalement

$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = a_k = \ell(p^k - q^k) = \dfrac{pq}{p-q}(p^k - q^k)$.

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = p\sum_{k=0}^{+\infty} p^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{q^2}$ et (idem) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = \frac{q}{p^2}$

$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \ell\left(\dfrac{p}{q^2} - \dfrac{q}{p^2}\right) = \dfrac{pq}{p-q}\left(\dfrac{p}{q^2} - \dfrac{q}{p^2}\right) = \dfrac{pq}{p-q}\left(\dfrac{p^3-q^3}{p^2q^2}\right)$

or $p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2)$, donc

$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{p^2+pq+q^2}{pq} = \dfrac{(p+q)^2 - pq}{pq} = \dfrac{1}{pq} - 1$.

Exercice 418 *Sommes aléatoires, fonctions génératrices et dés de Platon*

Soit $(m,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Soit N une variable aléatoire de support $[\![1\,;n]\!]$ et $(\mathrm{X}_k)_{k\in[\![1\,;n]\!]}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes et toutes de même loi qu'une variable aléatoire X de support $[\![1\,;m]\!]$.

On s'intéresse à la variable S définie par :

$$\mathrm{S} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i.$$

Pour chaque variable V de cet exercice, on note $\mathcal{G}_\mathrm{V}$ sa fonction génératrice.

1. a) Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Que vaut $\mathcal{G}_{\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\mathrm{X}_i}$ en fonction de $\mathcal{G}_\mathrm{X}$?

b) À l'aide du système complet d'événements $([\mathrm{N}=k])_{k\in[\![1\,;n]\!]}$, montrer que $\mathcal{G}_\mathrm{S} = \mathcal{G}_\mathrm{N} \circ \mathcal{G}_\mathrm{X}$.

2. En déduire que : $\mathbb{E}(\mathrm{S}) = \mathbb{E}(\mathrm{N})\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

3. Dans cette question, on s'intéresse au problème 389 du projet Euler (http ://projecteuler.net/problem=389). En voici l'énoncé :

An unbiased single 4-sided dice is thrown and its value, T, is noted.

T unbiased 6-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, C, is noted.

C unbiased 8-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, O, is noted.
O unbiased 12-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, D, is noted.
D unbiased 20-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, I, is noted.
Find the expected value of I.

a) Justifier que $\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \dfrac{5}{2}$, puis que $\mathbb{E}(\mathrm{C}) = \dfrac{5 \times 7}{2^2}$.

b) Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{I})$.

Solution (**Ex.418** – *Sommes aléatoires, fonctions génératrices et dés de Platon*)

1. a) Par le cours, si X et Y sont indépendantes, $\mathcal{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} = \mathcal{G}_{\mathrm{X}}\mathcal{G}_{\mathrm{Y}}$. Par une récurrence immédiate, les (X_i) étant mutuellement indépendantes,

$$\mathcal{G}_{\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \mathrm{X}_i} = \big(\mathcal{G}_{\mathrm{X}}\big)^k.$$

b) Soit $t \in [\,0\,;\,1\,]$. On a $\mathrm{T}(\Omega) \subset [\![1\,;\,nm]\!]$.

$\mathcal{G}_{\mathrm{S}}(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{nm} t^i \mathbb{P}(\mathrm{S}=i) = \sum_{i=1}^{nm} t^i \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{N}=k)\mathbb{P}_{[\mathrm{N}=k]}(\mathrm{S}=i) = \sum_{i=1}^{nm}\sum_{k=1}^{n} t^i \mathbb{P}(\mathrm{N} = k)\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{X}_k = j\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{N}=k) \sum_{i=1}^{nm} t^i \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{X}_k = j\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{N}=k)\mathcal{G}_{\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \mathrm{X}_k}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{N}=k)\big(\mathcal{G}_{\mathrm{X}}(t)\big)^k = \mathcal{G}_{\mathrm{N}}\big(\mathcal{G}_{\mathrm{X}}(t)\big)$, donc

$$\mathcal{G}_{\mathrm{S}} = \mathcal{G}_{\mathrm{N}} \circ \mathcal{G}_{\mathrm{X}}.$$

2. Les variables étant à support fini, les fonctions génératrices sont des polynômes, donc sont dérivables en 1.
$\mathbb{E}(\mathrm{S}) = \mathcal{G}'_{\mathrm{S}}(1) = \mathcal{G}'_{\mathrm{N}}\big(\mathcal{G}_{\mathrm{X}}(1)\big)\mathcal{G}'_{\mathrm{X}}(1) = \mathcal{G}'_{\mathrm{N}}(1)\mathcal{G}'_{\mathrm{X}}(1) = \mathbb{E}(\mathrm{N})\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

3. a)
- $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1\,;\,4]\!]\big)$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$.
- $\mathrm{C} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{T}} \mathrm{X}_i$ où les (X_i) forment une famille de variables indépendantes toutes de même loi $\mathcal{U}\big([\![1\,;\,6]\!]\big)$. Par la question précédente,

$$\mathbb{E}(\mathrm{C}) = \mathbb{E}(\mathrm{T})\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = \frac{5}{2} \times \frac{7}{2}.$$

b) Par le même raisonnement,
$\mathbb{E}(\mathrm{I}) = \dfrac{21}{2}\mathbb{E}(\mathrm{D}) = \dfrac{21}{2} \times \dfrac{13}{2}\mathbb{E}(\mathrm{O}) = \dfrac{21}{2} \times \dfrac{13}{2} \times \dfrac{9}{2}\mathbb{E}(\mathrm{O}) = \dfrac{21}{2} \times \dfrac{13}{2} \times \dfrac{9}{2} \times \dfrac{7}{2}\mathbb{E}(\mathrm{C})$,
d'où :

$$\mathbb{E}(\mathrm{I}) = \frac{21 \times 13 \times 9 \times 7 \times 5}{2^5} = \frac{85995}{32} = 2687{,}34375.$$

Exercice 419 *L'impossible trucage par les fonctions génératrices*

L'objectif de l'exercice est de montrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés de sorte qu'en lançant ces de deux dés, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $[\![2\,;\,12]\!]$.

Soit X et Y deux variables indépendantes de support $\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{Y}(\Omega) = [\![1\,;\,6]\!]$ et soit $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

On raisonne par l'absurde, on suppose donc que S suit la loi uniforme sur $[\![2\,;\,12]\!]$.

1. Justifier qu'il existe deux polynômes P et Q de degré 5 et à coefficients réels tels que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{G}_{\mathrm{X}}(t) = t\mathrm{P}(t) \quad$ et $\quad \mathrm{G}_{\mathrm{Y}}(t) = t\mathrm{Q}(t)$.

2. a) Montrer que : $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t) = \dfrac{1-t^{11}}{11(1-t)}$.

b) En déduire que $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ n'a pas de racine réelle.

3. Conclure.

Solution (**Ex.419** – *L'impossible trucage par les fonctions génératrices*)

1. Comme le support de X est $[\![1\,;\,6]\!]$, $\mathcal{G}_{\mathrm{X}} : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)t^k = t\sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k+1)t^k$.

Et $\mathbb{P}(\mathrm{X}=6) = 0$ est exclus car alors $\mathrm{S}(\Omega) \subset [\![2\,;\,11]\!]$ et S ne suit plus la loi $\mathcal{U}\big([\![2\,;\,12]\!]\big)$.

Donc il existe un polynôme P de degré 5 et à coefficients réels tel que $\mathcal{G}_{\mathrm{X}} : t \mapsto t\mathrm{P}(t)$.

Idem pour Y.

2. a) X et Y étant indépendantes, $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{G}_{\mathrm{S}}(t) = \mathcal{G}_{\mathrm{X}}(t)\mathcal{G}_{\mathrm{Y}}(t) = t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)$.

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{G}_{\mathrm{S}}(t) = \displaystyle\sum_{k=2}^{12} \frac{1}{11}t^k = t^2\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{11}t^k$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathrm{G}_{\mathrm{S}}(t) = t^2\dfrac{1-t^{11}}{11(1-t)}$

De ces deux égalités vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}, \quad \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t) = \frac{1-t^{11}}{11(1-t)}.$$

b) 0 n'est pas racine de P car sinon $\mathbb{P}(\mathrm{X}=1) = 0$ et $\mathrm{S}(\Omega) \subset [\![3\,;\,12]\!]$: impossible.

De même, 0 n'est pas racine de Q. Donc 0 n'est pas racine de PQ.

$\mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) = 1$ (systèmes complets d'événements !), donc 1 n'est pas racine de PQ.

$1 - t^11$ n'a pas d'autre racine réelle que 1 (les racines $11^{\text{ème}}$ de 1 sont $\mathrm{e}^{2ik\pi/11}$, $k \in [\![0\,;\,10]\!]$), donc $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}, \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t) \neq 0$.

Ainsi $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ n'a pas de racine réelle.

3. Puisque $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ n'a pas de racine réelle, ni P ni Q n'a de racine réelle. Or en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, tout polynôme P de degré 5 a au moins

une racine réelle car $\lim_{t\to-\infty} \mathrm{P}(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{P}(t)$ sont infinies et opposées.
D'où une contradiction qui achève ce raisonnement par l'absurde.

Exercice 420 *Markov, Bienaymé-Tchebychev et un peu mieux...*
Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \,]\,0\,;+\infty\,[$.
L'objectif de cet exercice est de proposer des majorations de la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda)$.

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

2. Soit Z une variable discrète d'espérance nulle et de variance σ^2.

a) Montrer : $\forall a > 0, \quad \forall x \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\big((\mathrm{Z}+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big)$.

b) En déduire à l'aide de l'inégalité de Markov que :
$$\forall a > 0, \quad \forall x \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$

c) En déduire : $\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

d) En déduire : $$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda + 1}.$$

3. a) Rappeler la fonction génératrice de X, puis montrer à l'aide de l'inégalité de Markov que : $\forall a > 0, \quad \forall t \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}{t^a}$.

b) En déduire : $$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}.$$

4. Quelle est la meilleure majoration lorsque $\lambda = 1$? Et lorsque λ devient grand ?

Solution (**Ex.420** – *Markov, Bienaymé-Tchebychev et un peu mieux...*)
Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \,]\,0\,;+\infty\,[$.
L'objectif de cet exercice est de proposer des majorations de
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda).$$

1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à X donne :
$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|\mathrm{X} - \lambda| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\lambda}{\varepsilon^2}.$$
Appliquée avec $\varepsilon = \lambda$: $\mathbb{P}(|\mathrm{X} - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
Or : $[\mathrm{X} \geqslant 2\lambda] \subset [|\mathrm{X} - \lambda| \geqslant \lambda]$, donc par croissance de la probabilité,
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

2. Soit Z une variable discrète d'espérance nulle et de variance σ^2.

a) $[\mathrm{Z} \geqslant a] \subset [\mathrm{Z} + x \geqslant a + x] \subset [(\mathrm{Z}+x)^2 \geqslant (a+x)^2]$ car $a + x \geqslant 0$, donc
$$\forall a > 0, \quad \forall x \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\big((\mathrm{Z}+x)^2 \geqslant (a+x)^2\big).$$

b) Appliquons l'inégalité de Markov à $Y = (Z + x)^2$ qui possède une espérance puisque Z possède une variance et $(a + x)^2 > 0$:

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z^2 + 2Zx + x^2) \overset{\text{lin.}}{=} \mathbb{E}(Z^2) + 2x\mathbb{E}(Z) + x^2 = \sigma^2 + x^2$ car $\mathbb{E}(Z) = 0$ entraîne aussi $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{V}(Z)$ par la formule de König-Huygens, donne

$$\forall a > 0, \quad \forall x \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\big((Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\big) \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

c) Soit $a > 0$ et $f_a : x \mapsto \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{2a}{(a + x)^3}\left(x - \dfrac{\sigma^2}{a}\right)$.

f_a atteint un minimum global en $\dfrac{\sigma^2}{a}$, valant $\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$. En prenant $x = \dfrac{\sigma^2}{a}$ dans l'inégalité précédente, on a bien :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

d) Prenons $Z = X - \lambda$ et $a = \lambda$. Alors $\mathbb{E}(Z) \overset{\text{lin.}}{=} \lambda - \lambda = 0$, $\sigma^2 = \mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X) = \lambda$: on peut utiliser ce qui précède, et $[X \geqslant 2\lambda] = [Z \geqslant a]$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda + 1}.$$

3. a) Rappeler la fonction génératrice de X, puis montrer à l'aide de l'inégalité de Markov que :

$\mathcal{G}_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$ (c'est du cours).

Appliquons l'inégalité de Markov à t^X (puisque par transfert $\mathbb{E}(t^X) = \mathcal{G}_X(t)$) et $t^a > 0$:

$$\forall a > 0, \quad \forall t \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(t^X \geqslant t^a) \leqslant \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^a}.$$

Or comme $t \geqslant 1$, $[t^X \geqslant t^a] = [X \geqslant a]$. Donc :

$$\forall a > 0, \quad \forall t \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^a}.$$

b) Avec $a = 2\lambda$: $\quad \forall t \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = \left(\dfrac{e^{t-1}}{t^2}\right)^{\lambda}$.

$g : [1 ; +\infty[\ \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{e^{t-1}}{t^2}$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto \dfrac{(t-2)e^{t-1}}{t^3}$, de minimum $\dfrac{e}{4}$ atteint en 2.

En prenant $t = 2$ dans l'inégalité précédente, il vient :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.$$

4. Quelle est la meilleure majoration lorsque $\lambda = 1$? Et lorsque λ devient grand ?

- Pour $\lambda = 1$, on a successivement pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$:

$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1$ (banal !),

$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \dfrac{1}{1}$ (mieux !),

$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{4}$ (moins bien car $\dfrac{\mathrm{e}}{4} \simeq 0,68$).

• Comme $0 < \dfrac{\mathrm{e}}{4} < 1$, $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda} = o\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)$ donc lorsque λ grand, la dernière majoration devient (inifiniment) meilleure.

Pour info, il y a égalité lorsque $\lambda \simeq 4,33$, et pour $\lambda = 5$ et $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$, on obtient par 2. $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 10) \leqslant \dfrac{1}{6} \simeq 0,167$, et par 3., $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 10) \leqslant 0,145$.

Exercice 421 *Des échecs indépendants des succés ...*

Soit N une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{N} = n) \neq 0$.

Lorsque N vaut n, on réalise une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succés p ($p \in \,]\,0\,;\,1\,[$). Soit S le nombre de succés et E le nombre d'échec(s).

1. *Lorsque N suit une loi de Poisson ...*

Dans cette question, on suppose que N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

a) Soit n et j deux entiers de $\mathbb{N}$. Que vaut $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{S} = j)$? (On distinguera bien les deux cas possibles)

b) En déduire la loi de S, et déterminer de même la loi de E.

c) Montrer que S et E sont indépendantes.

2. *Lorsque S et E sont indépendantes ...*

On suppose dans cette partie que S et E sont indépendantes.

a) Soient u, v et w trois suites réelles strictement positives telles que :
$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ (j+k)!w_{j+k} = u_j v_k.$$
Montrer que u et v sont géométriques de même raison.

b) En calculant de deux façons $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=j+k)}((\mathrm{S} = j) \cap (\mathrm{E} = k))$, montrer qu'il existe deux suites réelles u et v telles que :
$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ (j+k)!\mathbb{P}(\mathrm{N} = j+k) = u_j v_k.$$

c) En déduire les lois de S et de E, puis celle de N.

Solution (**Ex.421** – *Des échecs indépendants des succés ...*)

1. *Lorsque* N *suit une loi de Poisson ...*

a) Puisque sachant $(\mathrm{N} = n)$, S suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$,
$$\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{S} = j) = \begin{cases} \dbinom{n}{j} p^j q^{n-j} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 & \text{si } j > n \end{cases}.$$

b) À l'aide du sytème complet d'événements $([\mathrm{N} = n])_{n \in \mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales donne, pour $j \in \mathbb{N}$,

$\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{S}=j)\mathbb{P}(\mathrm{N}=n)=\sum_{n=j}^{+\infty}\binom{n}{j}p^jq^{n-j}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^jp^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^{n\dots}}{(n-\dots}$
$\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^jp^j}{j!}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^j}{j!}$ donc

S suit la loi de Poisson de paramètre λp.

De même, en remplaçant simplement p par q,

E suit la loi de Poisson de paramètre λq.

c) Pour i et j dans $\mathbb{N}$,
$\mathbb{P}([\mathrm{S}=i]\cap[\mathrm{E}=j])=\mathbb{P}([\mathrm{S}=i]\cap[\mathrm{N}=i+j])=\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=i+j)}(\mathrm{S}=i)\mathbb{P}(\mathrm{N}=i+j)=$
$\dbinom{i+j}{i}p^iq^j\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}=\mathrm{e}^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda q}\dfrac{(\lambda q)^j}{j!}=\mathbb{P}(\mathrm{S}=i)\mathbb{P}(\mathrm{E}=j)$,
donc S et E sont indépendantes.

2. *Lorsque* S *et* E *sont indépendantes ...*

a) La relation vérifiée par u, v et w entraîne que : $\forall j\in\mathbb{N}^*,\ u_jv_0=j!w_j=u_{j-1}v_1$, donc $\forall j\in\mathbb{N}^*,\ u_j=\dfrac{v_1}{v_0}u_{j-1}$ donc u est géométrique de raison $\dfrac{v_1}{v_0}$. De même, $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_0v_k=k!w_k=u_1v_{k-1}$, donc $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ v_k=\dfrac{u_1}{u_0}v_{k-1}$ donc v est géométrique de raison $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{v_1}{v_0}$. u et v sont géométriques de même raison.

b) D'une part , $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=j+k)}([\mathrm{S}=j]\cap[\mathrm{E}=k])=\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=j+k)}(\mathrm{S}=j)=\dbinom{j+k}{j}p^jq^k$.

D'autre part, $\mathbb{P}_{(\mathrm{N}=j+k)}([\mathrm{S}=j]\cap[\mathrm{E}=k])=\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)\mathbb{P}(\mathrm{E}=k)}{\mathbb{P}(\mathrm{N}=j+k)}$, donc $\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)\mathbb{P}(\mathrm{E}=k)}{\mathbb{P}(\mathrm{N}=j+k)}$
$\dbinom{j+k}{j}p^jq^k$.

D'où $(j+k)!\mathbb{P}(\mathrm{N}=j+k)=\left(\dfrac{j!\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)}{p^j}\right)\left(\dfrac{k!\mathbb{P}(\mathrm{E}=k)}{q^k}\right)$.

Il existe deux suites réelles u et v telles que :
$\forall(j,k)\in\mathbb{N}^2,\ (j+k)!\mathbb{P}(\mathrm{N}=j+k)=u_jv_k$. Il s'agit des suites définies par $u_j=\dfrac{j!\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)}{p^j}$ et $v_k=\dfrac{k!\mathbb{P}(\mathrm{E}=k)}{q^k}$.

c) Le premier membre de l'égalité précédente étant strictement positif, les termes de u et v sont tous non nuls. Par définition, les suites u et v sont à termes positifs.

Par a), u et v sont géométriques de même raison strictement positive λ.

De $\forall j\in\mathbb{N},\ u_j=\dfrac{j!\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)}{p^j}=u_0\lambda^j$ on tire $\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)=u_0\dfrac{(\lambda p)^j}{j!}$. De $1=\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{S}=j)=u_0\mathrm{e}^{-\lambda p}$, on tire $u_0=\mathrm{e}^{-\lambda p}$, donc : $\forall j\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathrm{S}=j)=$

$e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^j}{j!}$. Donc S suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. De même, E suit la loi de Poisson de paramètre $q\lambda$.
N étant la somme des deux variables *indépendantes* suivant des lois de Poisson de paramètres λp et λq, par stabilité, N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda p + \lambda q = \lambda$.