Exercice 1 *Un peu tous les critères*

On pose, pour tout $n \geqslant 2$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)},\ v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n} \text{ et } w_n = \frac{1}{\ln^2(n)}.$$

1. a) Montrer que $\dfrac{1}{n} = o\,(w_n)$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?

2. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. a) Montrer que la suite $\big(|v_n|\big)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.

b) Déterminer un équivalent simple de $v_n - u_n$.

c) En déduire la nature de la série de terme général v_n.

Solution (**Ex.1** – *Un peu tous les critères*)

1. a) Par croissances comparées, $\dfrac{\ln^2(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln^2(n)}\right)$.

b) Comme la série harmonique de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, par négligeabilité la série de terme général w_n diverge.

2. Comme $(\dfrac{1}{\ln(n)})$ est une suite décroissante de limite nulle, le théorème de Leibniz assure que la série de terme général u_n converge.

3. a) Pour $n \geqslant 3$, $\ln(n)+(-1)^n > 0$ et $|v_n| = \dfrac{1}{\ln(n)+(-1)^n}$.

$\ln(n+1)+(-1)^{n+1} - \ln(n) - (-1)^n = \ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big) + 2(-1)^{n+1}$ est du signe de $2(-1)^{n+1}$ car $1 < 1+\dfrac{1}{n} \leqslant 2 < \mathrm{e}$ donc $0 < \ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big) < 1 < 2$.

Donc la suite $\big(\ln(n)+(-1)^n\big)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang, donc la suite $(|v_n|)$ n'est pas monotone non plus, même à partir d'un certain rang.

b) $v_n - u_n = \dfrac{-1}{\ln^2(n)+(-1)^n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -w_n$.

c) Le théorème de Leibniz ne s'applique pas au terme général v_n ($(|v_n|)$ non décroissante).

On déduit par équivalence de termes négatifs que $\sum\limits_n (v_n - u_n)$ diverge. Comme $\sum\limits_n u_n$ converge, $\sum\limits_n v_n$ diverge, sinon $\sum\limits_n (v_n - u_n)$ convergerait par linéarité.

Exercice 2 *Natures en série*

Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1+u_n)$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(u_n)$.

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\cos(u_n)$.

Solution (**Ex.2** – *Natures en série*)

1. $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ est une suite décroissante de limite nulle donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge par le critère des séries alternées.

2. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n - \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum\limits_n u_n$ par 1., et $\sum\limits_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. De plus la série harmonique $\sum\limits_n \dfrac{1}{2n}$ diverge.

Donc $\sum\limits_n \ln(1+u_n)$ diverge.

3. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin(u_n) = u_n + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum\limits_n u_n$ par 1., et $\sum\limits_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. Donc par linéarité $\sum\limits_n \ln(1+u_n)$ converge.

4. Comme $\cos(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$, $\sum\limits_n \cos(u_n)$ diverge grossièrement.

Exercice 3 *Pairs et impairs*

1. a) Justifier la convergence des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}.$$

b) En admettant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries précédentes.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Solution (**Ex.3** – *Pairs et impairs*)

1. a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge par application du théorème spécial des séries alternées.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)^2}$ converge par linéarité car la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ converge.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge par le critère des équivalents de t.g. positifs : $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{24}$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$,

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Remarque : la somme de cette dernière série alternée est bien du signe de son premier terme.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\forall k \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{(x^2)^k}{k!}$ assure la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ par comparaison à la série exponentielle de paramètre x^2.

Une comparaison analogue justifie la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, donc de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ par linéarité.

Attention si on utilise un autre critère : x^{2k+1} est de signe alternant pour $x < 0$.

Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \exp(-x) > 0$.

Exercice 4 *Constante d'Euler et harmonique alternée : somme et série du reste*

1. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire l'existence d'une constante réelle γ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \qquad (\heartsuit).$$

2. a) Justifier la convergence de la série de terme général $\displaystyle\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Dans la suite de l'exercice, on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $\displaystyle \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

b) Justifier que $\displaystyle \mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$, et en déduire que $\mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

c) En déduire finalement la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que $\displaystyle \mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Que vaut $\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}$?

c) En déduire que $\displaystyle 2\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) Quelle est la nature de la série de terme général R_n ?

Solution (**Ex.4** – *Constante d'Euler et harmonique alternée : somme et série du reste*)

1. a) $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) Par domination, et par convergence de la série de Riemann de paramètre $2 > 1$, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, donc la suite u converge. En notant γ sa limite, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \qquad (\heartsuit)$.

2. a) Par le théorème spécial des séries alternées, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge car la suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

b) $S_{2n} = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 2n,\ k \text{ impair}} \frac{1}{k} - \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n,\ k \text{ pair}} \frac{1}{k}$ et en observant que la somme pour les indices impairs est la somme totale privée de la somme pour les indices pairs, on a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

c) $S_{2n} = \ln(2n)+\gamma+o(1)-\ln(n)-\gamma-o(1) = \ln(2)+o(1)$, d'où $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$, $S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Donc la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$.

Variante : on sait que $S_n)$ converge et que sa suite extraite (S_{2n}) converge vers $\ln(2)$, donc (S_n) converge vers $\ln(2)$.

Autrement dit $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

3. a) $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k+1}$

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}.$$

b) $R_n - R_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

c) En sommant les deux relations précédentes, $2R_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$

En appliquant le théorème de Leibniz à la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ puisque $\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right)$ est une suite tendant vers 0 en décroissant, la majoration du reste fournit

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Autrement dit, ce reste est un $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc $2R_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

d) On a déjà vu que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge, et puisque la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge, toute série de terme général $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

Par linéarité, la série de terme général R_n converge.

Exercice 5 *Produit infini*

Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

Solution (**Ex.5** – *Produit infini*)

Manifestement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n > 0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \ln(u_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, or $\ln\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

Le critère des équivalents pour ces séries à termes positifs permet d'affirmer que la suite $(v_n)_n$ converge. Par composition par la fonction exponentielle (continue !), la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 6 *Somme d'une série de type exponentielle*

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!}$.

2. a) Déterminer trois réels α, et γ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 = \alpha n(n-1)(n-2) + \beta n(n-1) + \gamma n.$$

b) En déduire la somme de la série précédente.

Solution (**Ex.6** – *Somme d'une série de type exponentielle*)

1. $\dfrac{n^3}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-3)!}$ permet de justifier la convergence, ou encore D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$...

2. Pour pouvoir simplifier les factorielles, on écrit :
$n^3 = n(n-1)(n-2) - 3n^2 + 2n = n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) + 5n.$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n^3}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}-3\sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)}{n!}+5\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{n!}$$
$$=\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n-3)!}-3\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!}+5\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\mathrm{e}-3\mathrm{e}+5\mathrm{e}=3\mathrm{e}.$$

Exercice 7 *Fonction ζ de Riemann en 1*

Pour tout $\alpha>1$ on pose $\zeta(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{\alpha\to1^+}\zeta(\alpha)$.
2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Solution (**Ex.7** – *Fonction ζ de Riemann en 1*)

1. Par décroissance de $x\mapsto\frac{1}{x^\alpha}$, $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\leq1+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.

   Donc : $\frac{1}{\alpha-1}\leq\zeta(\alpha)\leq1+\frac{1}{\alpha-1}$.
   Par comparaison, $\lim_{\alpha\to1^+}\zeta(\alpha)=+\infty$.
   La majoration n'était pas nécessaire mais sera utile pour la suite.
2. Et : $\forall\alpha>1, 1\leq\frac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)}\leq(\alpha-1)+1$, donc par encadrement : $\frac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)}\xrightarrow[\alpha\to1]{}1$, et
$$\zeta(\alpha)\underset{\alpha\to1}{\sim}\frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 8 *Exemples de Séries de Bertrand*
Soit $\alpha\in\,]0\,;\,+\infty[$.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n=\frac{1}{n\ln^\alpha n}$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n=\frac{1}{n^\alpha\ln n}$.

Solution (**Ex.8** – *Exemples de Séries de Bertrand*)

1. $f_\alpha : t\mapsto\frac{1}{t\ln^\alpha t}$ est continue positive et décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$ donc $\sum_{n\geqslant2}u_n$ est de même nature que $\int_2^{+\infty}f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.
   - Si $\alpha=1$, $\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t=[\ln|\ln(t)|]_2^x=\ln(\ln(x))-\ln(\ln2)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ ... $\sum_{n\geqslant2}u_n$ diverge.
   - Si $\alpha\neq1$,
   $$\int_2^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(t)}\right]_2^x$$
   $$=\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(x)}-\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(2)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\begin{cases}\frac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}(2)} & \text{si } \alpha>1\\ +\infty & \text{si } \alpha<1\end{cases}.$$
   Donc $\sum_{n\geqslant2}u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$.
   - Bilan : $\sum_{n\geqslant2}u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$.
2. $f_\alpha : t\mapsto\frac{1}{t^\alpha\ln t}$ est continue positive et décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$ donc $\sum_{n\geqslant2}u_n$ est de même nature que $\int_2^{+\infty}f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.
   - si $\alpha>1$, $f_\alpha(t)=o(1/t^\alpha)$ et $t\mapsto1/t^\alpha$ est intégrable ... $\sum_{n\geqslant2}u_n$ converge.
   - si $\alpha=1$, $\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t=[\ln|\ln(t)|]_2^x=\ln(\ln(x))-\ln(\ln2)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ ... $\sum_{n\geqslant2}u_n$ diverge.
   - si $\alpha<1$, $f_\alpha(t)\geq f_1(t)\geq0$ car $t^\alpha\leq t$, or $\int_2^{+\infty}f_1(t)\mathrm{d}t$ diverge d'après le point précédent donc $\int_2^{+\infty}f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge ... $\sum_{n\geqslant2}u_n$ diverge.

Exercice 9 *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite *décroissante* telle que la serie $\sum_{n\geqslant1}u_n$ converge.

   On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

   a) Que vaut $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n$? En déduire $\lim_{n\to+\infty}2nu_{2n}$.

   b) Montrer que : $\quad u_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*, n = k^2, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré.} \end{cases}$

Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

A-t-on $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

Solution (**Ex.9** – *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants*)

1. a) Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge, la suite (S_n) converge, vers une limite S. Alors : $\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{S} - \mathrm{S} = 0$.

Or : $\forall n \geq 1, \quad \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_n \geq n u_{2n}$ car u décroît.

Et comme la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge, u tend vers 0. Étant de plus décroissante, u est une suite positive. Ainsi : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq n u_{2n} \leq \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n$.

Par encadrement, $n u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $2n u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) $\forall n \geq 1, 0 \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$ donc $0 \leq 2n u_{2n+1} \leq 2n u_{2n}$, et par encadrement, $2n u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme de plus $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad (2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit : $u_n o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. $\forall \mathrm{N} \geq 1, \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \sum\limits_{k=1}^{\lfloor\sqrt{\mathrm{N}}\rfloor} \dfrac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (k^2)u_{k^2} = 1$, ce qui exclut que $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On n'a pas : $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ *En passant par la série harmonique*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(2n+1)}$.

1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n.

2. On note H_N la N−ème somme partielle de la série harmonique : $\mathrm{H}_\mathrm{N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n}$.

Justifier que la suite $\big(\mathrm{H}_n - \ln n\big)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

3. a) Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geq 1, \quad u_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n+1}$.

b) En déduire que, pour tout $\mathrm{N} \geq 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = 2\mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} + 2$.

4. Déterminer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Solution (**Ex.10** – *En passant par la série harmonique*)

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ (ou "$\leq$", ou encore "O"...) permet de conclure.

2. Vu en cours. En posant $v_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$,

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{-1}{n^2+n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ assure la convergence de la série de t.g. $v_{n+1} - v_n$, donc la convergence de la suite v.

3. a) $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n+1} = \dfrac{(2\alpha+\beta)n + \alpha}{n(2n+1)}$ donc $\beta = -2$ et $\alpha = 1$ conviennent.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{2n+1} = \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2 \sum\limits_{\substack{3 \leq n \leq 2\mathrm{N}+1 \\ n \text{ impair}}} \dfrac{1}{n} = \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\left(\sum\limits_{n=2}^{2\mathrm{N}+1} \dfrac{1}{n} - \sum\limits_{\substack{2 \leq n \leq 2\mathrm{N} \\ n \text{ pair}}} \dfrac{1}{n}\right)$

$= \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2(\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} - 1) + 2\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{2n} = 2\mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} + 2$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = 2(\ln \mathrm{N} + \gamma + o(1)) - 2(\ln 2\mathrm{N} + 1 + \gamma + o(1)) + 2 = 2 + 2\ln\dfrac{\mathrm{N}}{2\mathrm{N}+1} +$

$o(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2-2\ln 2$

Exercice 11 *Sinus et cosinus*

Nature des séries $\sum \dfrac{|\sin n|+|\cos n|}{n}$ et $\sum \dfrac{|\sin n|+|\cos n|}{n^2}$.

Solution (**Ex.11** – *Sinus et cosinus*)

• $\dfrac{|\sin n|+|\cos n|}{n} \geq \dfrac{\sin^2 n+\cos^2 n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$: la série diverge. • $\dfrac{|\sin n|+|\cos n|}{n^2} \leq \dfrac{2}{n^2}$: la série converge.

Exercice 12 *Ça finira par converger*

Soit $\forall n \geq 1, \quad u_n = \dfrac{n-|\cos n|}{n+|\sin n|}$.

Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, de $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n-1)$ et de $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n-1)^2$.

Solution (**Ex.12** – *Ça finira par converger*)

$n-|\cos n| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $n+|\sin n| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement.

$u_n - 1 = \dfrac{-|\cos n|-|\sin n|}{n+|\sin n|} = -\dfrac{|\cos n|+|\sin n|}{n+|\sin n|}$.

De $|\cos n| \leq 1$ et $|\sin n| \leq 1$ je tire $|\cos n|+|\sin n| \geq \cos^2 n+\sin^2 \geq 1$, donc $\dfrac{|\cos n|+|\sin n|}{n+\sin n} \geq \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n+1}$ diverge, par comparaison $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{|\cos n|+|\sin n|}{n+|\sin n|}$ diverge et par linéarité $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n-1)$ diverge.

$(u_n-1)^2 = \left(\dfrac{-|\cos n|-|\sin n|}{n+|\sin n|}\right)^2$

$n+|\sin n| \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ car $\sin n = o(n)$, donc $(n+|\sin n|)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. Et comme $(-|\cos n|-|\sin n|)^2 \leq 2$, $(u_n-1)^2 = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n-1)^2$ converge (absolument).

Exercice 13 *Série à paramètre*

Soit $a \neq 0$ et $\forall n \geq 1, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^{n+1}}$.

Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Solution (**Ex.13** – *Série à paramètre*)

• Si $a<0$, $n^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $n^a+(-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$: divergence grossière.

• Supposons $a>0$.

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a}\left(\dfrac{1}{1-(-1)^n/n^a}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^a}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^a}+o\left(\dfrac{1}{n^a}\right)\right)$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a}+\dfrac{1}{n^{2a}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2a}}\right) = v_n+w_n+o(w_n)$

$\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge par le théorème de Leibniz, $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$ étant décroissante de limite nulle.

$u_n - v_n = w_n + o(w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ qui est positive.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n - v_n$ converge si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}$ par équivalence et par les séries de Riemann.

Comme $u_n = (u_n-v_n)+v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge ssi $a>\dfrac{1}{2}$.

Par équivalence de suites positives et Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exercice 14 *Nature*

Nature de $\sum u_n$ pour $u_n = \left(\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{n}\right)\right)^{-n^2}$ $(\forall n \geq 1)$.

Solution (**Ex.14** – *Nature*)

$u_n = \exp\left(-\dfrac{n}{\mathrm{e}}+o(n)\right)$ donc $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 15 *Valeur approchée d'une somme*

1. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{2n^3+1}$.
2. On note S_N sa somme partielle d'ordre N et S sa somme.

a) Quelle est le signe de S ?
b) Déterminer un entier N tel que $|\mathrm{S}-\mathrm{S_N}| \leq 10^{-2}$.
c) En déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Solution (**Ex.15** – *Valeur approchée d'une somme*)

1. $\left(\dfrac{1}{2n^3+1}\right)_{n\geq 0}$ étant décroissante de limite nulle, le théorème de Leibniz s'applique et assure la convergence de la série alternée.

2. a) Le signe de S est celui du premier terme, donc positif.

b) $|\mathrm{S}-\mathrm{S_N}| = \left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n^3+1}\right| = |\mathrm{R_N}| \leq \dfrac{1}{2(\mathrm{N}+1)^3+1}$.

$\dfrac{1}{2(\mathrm{N}+1)^3+1} \leq 10^{-2} \iff 2(\mathrm{N}+1)^3+1 \geq 100 \iff (\mathrm{N}+1)^3 \geq \dfrac{99}{2} \iff \mathrm{N} \geq 3$ car N est entier.

$\mathrm{N}=3$ convient.

c) $\mathrm{S_3} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{17} - \dfrac{1}{55} \left(= \dfrac{1984}{2805} \simeq 0,71\right)$ est une valeur approchée de S à 10^{-2} près.