

Exercice 1 Norme et morphisme injectif

Soit (F, N) un espace vectoriel normé. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que u est injective.

Montrer que la fonction $N \circ u : x \mapsto N(u(x))$ est une norme sur E .

Solution (Ex.1 – Norme et morphisme injectif)

Vérifions les 4 axiomes d'une norme.

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Comme N est positive, $N \circ u$ est positive.
- (ii) Si $N \circ u(x) = 0$ alors $u(x) = 0$ car N est une norme, donc $x = 0$ car u est injective.
- (iii) $N \circ u(\lambda x) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N \circ u(x)$ car u est linéaire et N est une norme.
- (iv) $N \circ u(x + y) = N(u(x) + u(y)) \leq N \circ u(x) + N \circ u(y)$ car u est linéaire et N est une norme.

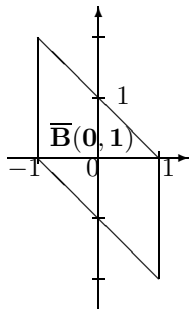
Exercice 2 Une norme sur $\mathbb{R}^2$

Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $M(x) = \max(|x_1|, |x_1 + x_2|)$.

1. Montrer que M est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité fermée de M .
3. Trouver des constantes λ et μ strictement positives telles que $\forall x \in \mathbb{R}^2, M(x) \leq \lambda \|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq \mu M(x)$, les constantes λ et μ étant aussi petites que possible.

Solution (Ex.2 – Une norme sur $\mathbb{R}^2$)

1. On vérifie sans problème les 4 axiomes d'une norme.
2. $|x_1| \leq 1 \iff -1 \leq x_1 \leq 1$,
 $|x_1 + x_2| \leq 1 \iff -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1 \iff -1 - x_1 \leq x_2 \leq 1 - x_1$
 La boule unité fermée est le parallélogramme suivant :



3. $\bar{B}(0, 1)$ est incluse dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et contient le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

• Donc $M(x) = 1 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{5}$.

Par homogénéité, pour tout vecteur x non nul,

$$\|x\|_2 = \left\| M(x) \left(\frac{1}{M(x)} x \right) \right\|_2 = M(x) \left\| \frac{1}{M(x)} x \right\|_2 \leq M(x) \sqrt{5}$$

Comme $\|(-1, 2)\|_2 = \sqrt{5} = \sqrt{5} M((-1, 2))$ puisque $M((-1, 2)) = 1$, $\mu = \sqrt{5}$.

• De même, $\|x\|_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow M(x) \leq 1$ donc $\|x\|_2 = 1 \Rightarrow M(x) \leq \sqrt{2}$, donne par un raisonnement analogue, pour tout $x \neq 0$, $M(x) \leq \sqrt{2} \|x\|_2$, avec égalité pour $x = (1/2, 1/2)$, donc $\lambda = \sqrt{2}$.

Exercice 3 Normes et convergence dans $\mathbb{R}[X]$

Pour tout polynôme réel P , écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X_k$, on note

$$\|P\| = \sup_{x \in [0; 1/2]} |P(x)| \text{ et } N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Prouver que $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ et vers 1 pour la norme N .
3. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X .

Solution (Ex.3 – Normes et convergence dans $\mathbb{R}[X]$)

1. • $\|\cdot\|$ est la norme infinie sur $[0; 1/2]$. Pour la séparation, on notera que $\|P\| = 0$ entraîne que P possède une infinité de racines donc est le polynôme nul.
 • Pour N , on notera qu'il n'y a aucun problème de convergence des séries puisque pour tout polynôme P de coefficients (a_k) , la suite (a_k) est nulle à partir d'un certain rang. Pour la séparation, on notera que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} = 0$ entraîne $\forall k \geq 1, a_k = 0$, et qu'alors $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| = 0$ entraîne de plus $a_0 = 0$.
2. • $\|X^n\| = \frac{1}{2^n}$ donc $\|X^n - 0\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : X^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} 0$
 • $N(X^n - 1) = 0 + \frac{1}{n}$ donc $N(X^n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : X^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} 1$

3. Je propose $M : P \mapsto |a_0| + \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} \dots$ à vérifier !

Exercice 4 Intersection d'ouverts

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x_0 \in E$. Montrer l'égalité

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overset{\circ}{B}\left(x_0, 1 + \frac{1}{n}\right) = \overline{B}(x_0, 1).$$

Solution (Ex.4 – Intersection d'ouverts)

Raisonnons par double inclusion.

- Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overset{\circ}{B}\left(x_0, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x - x_0\| < 1 + \frac{1}{n}$. Par prolongement des inégalités *LARGES* en passant à la limite, $\|x - x_0\| \leq 1$, donc $x \in \overline{B}(x_0, 1)$. Ceci prouve la première inclusion.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \overline{B}(x_0, 1)$. $\|x - x_0\| \leq 1$, donc $\|x - x_0\| < 1 + \frac{1}{n}$, donc $x \in \overset{\circ}{B}\left(x_0, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

Comme ceci est vrai pour tout n , l'inclusion réciproque est vraie.

Exercice 5 Caractérisation des limites de puissances d'une matrice

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$. Montrer que $B^2 = B$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = B$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$.
3. Qu'a-t-on démontré ?

Solution (Ex.5 – Caractérisation des limites de puissances d'une matrice)

1. $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$ entraîne (suite extraite) $A^{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$. Mais $A^{2k} = (A^k)^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B^2$ par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite : $B^2 = B$.
2. Avec $A = B$, on a par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B$, donc $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$.
3. Une matrice B est limite de la suite des puissances d'une matrice si, et seulement si, $B^2 = B$.

Exercice 6 Maillage et quadrillage du plan

Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z} \text{ ou } y \in \mathbb{Z}\}$.

1. Représenter M . Justifier sa nature topologique (ouvert ou fermé).
2. Représenter Q . Justifier sa nature topologique (ouvert ou fermé).
3. Quelle est la nature topologique de $U = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}]m; m+1[\times]n; n+1[$?

Solution (Ex.6 – Maillage et quadrillage du plan)

1. M est le maillage constitué de tous les points à coordonnées entières : $M = \mathbb{Z}^2$. Tout revient à déterminer la nature de $\mathbb{Z} \dots$ qui est fermé.
Attention ! On peut écrire $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\}$ mais rien n'assure qu'une réunion infinie de fermés soit fermée.
Plein de méthodes ...
• *Racines d'une fonction continue* –
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi x)$. f est continue et $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$ est fermé, donc $\mathbb{Z}^2$ aussi.
• *Caractérisation séquentielle* –
Soit (u_n) une suite convergente de $\mathbb{Z}$, de limite ℓ . Alors, avec $\varepsilon = 1/4$ dans la définition de la limite,
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \ell - 1/4 \leq u_n \leq \ell + 1/4.$$
Or $[\ell - 1/4; \ell + 1/4]$ ne contient qu'un entier : appelons-le m .
Alors : $\forall n \geq n_0, u_n \in [\ell - 1/4; \ell + 1/4] \cap \mathbb{Z} = \{m\}$, donc $\forall n \geq n_0, u_n = m$.
Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = m$, et par unicité de la limite, $\ell = m$, donc $\ell \in \mathbb{Z}$.
Ce qui prouve que $\mathbb{Z}$ est fermé.
• *Réunion et intersection* –
En revanche, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n; n+1[$ est une réunion d'ouverts donc est ouverte.
Par complémentarité, $\mathbb{Z}$ est fermé.
2. Q est le quadrillage constitué des droites horizontales et verticales du plan.
 $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{Z}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sin(\pi x) = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sin(\pi y) = 0\}$.
Comme $(x, y) \mapsto \sin(\pi x)$ et $(x, y) \mapsto \sin(\pi y)$ sont continue sur $\mathbb{R}^2$, Q est la réunion de deux fermés donc est fermé.
3. $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2,]m; m+1[\times]n; n+1[$ est ouvert. U est une réunion d'ouverts donc est ouvert.
Remarque : Q et U sont complémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Dès lors, rien d'étonnant que U soit ouvert puisque Q est fermé, et réciproquement.

Exercice 7 Une fonction lipschitzienne

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$. Soit $f : E \rightarrow E$ définie par
$$f(x) = \|x\| a.$$

Montrer que f est lipschitzienne. f est-elle continue ?

Solution (Ex.7 – Une fonction lipschitzienne)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2, \|f(x) - f(y)\| = \| \|x\| a - \|y\| a \| = \|(\|x\| - \|y\|)a\| = \| \|x\| - \|y\| \| \times \|a\|$$

Or pour toute norme $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$, donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \|a\| \|x - y\| \text{ et } f \text{ est } \|a\| \text{--lipschitzienne.}$$

Question de cours : toute fonction lipschitzienne est continue...

Exercice 8 Deux normes équivalentes sur un espace de dimension infinie

Dans $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, on considère :

$$N : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \nu : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

1. Montrer que N et ν sont des normes sur E .

2. a) Pour $f \in E$, quelle relation y a-t-il entre $f(0)$, $f(1)$ et $\int_0^1 f'(t) dt$?

b) Montre que : $\forall f \in E, \nu(f) \leq 2N(f)$.

c) Établir une inégalité majorant $N(f)$ à l'aide de $\nu(f)$.

3. Soit $M : f \mapsto |f(0)| + \sup_{[0; 1]} |f'| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. On admet que M est une norme sur E .

a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$.

Calculer $N(f_n)$ et $M(f_n)$.

b) M et N sont-elles des normes équivalentes ?

Solution (Ex.8 – Deux normes équivalentes sur un espace de dimension infinie)

1. • N et ν sont positives et homogènes par positivité et homogénéité de la valeur absolue, et positivité de l'intégrale.

$$\bullet N(f) = 0 \text{ (resp. } \nu(f) = 0) \text{ entraîne } \begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ (resp. } f(1) = 0) \\ \int_0^1 |f'(t)| dt = 0 \end{cases} \quad \text{Or } |f'| \text{ est}$$

continue et positive, d'intégrale nulle sur $[0; 1]$, donc f' est nulle sur $[0; 1]$, donc f est constante sur $[0; 1]$. Comme $f(0) = 0$ (resp. $f(1) = 0$), f est la fonction nulle de E . N et ν vérifient la séparation.

$$2. a) \int_0^1 f'(t) dt = [f(t)]_0^1 = f(1) - f(0)$$

b) Soit $f \in E$. De 2.a) je tire : $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t) dt$ puis $|f(1)| \leq |f(0)| +$

$$\int_0^1 |f'(t)| dt \leq N(f)$$

$$\nu(f) = |f(0)| + \int_0^1 f'(t) dt \leq N(f) + N(f) \leq 2N(f)$$

c) On raisonne de même avec : $|f(0)| \leq |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \nu(f)$ issue de 2.a).

On obtient : $N(f) \leq 2\nu(f)$.

Commentaire : $\forall f \in E, \frac{1}{2}N(f) \leq \nu(f) \leq 2N(f)$, on dit que N et ν sont équivalentes.

Exercice 9 Un ouvert dans un espace de fonctions

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On se propose de démontrer que

$$U = \{f \in E / \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\}$$

est un ouvert de E .

1. Première méthode –

a) Soit $f \in E$. Justifier : $\exists a \in [0; 1], \forall x \in [0; 1], f(x) \geq f(a)$.

b) Soit $f \in U$ et a défini comme précédemment. On pose $m = f(a)$. Montrer que $B(f, m)$ n'est pas vide et que $B(f, m) \subset U$.

c) Qu'a-t-on démontré ?

2. Seconde méthode – On définit la fonction φ par :

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \min_{x \in [0; 1]} \{f(x)\}.$$

a) Justifier que φ est correctement définie.

b) Montrer que φ est continue sur E .

c) Justifier que U est un ouvert de E .

3. Que peut-on dire de $F = \{f \in E / \forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0\}$? Justifier.

Solution (Ex.9 – Un ouvert dans un espace de fonctions)

1. Première méthode –

a) f est continue sur le segment $[0; 1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure : $\exists a \in [0; 1], \forall x \in [0; 1], f(x) \geq f(a)$.

b) Comme $f > 0$, $m > 0$. Donc $B(f, m)$ n'est pas vide.

Soit $g \in B(f, m)$. $\|g - f\|_\infty < m$ donc :

$\forall x \in [0; 1], |g(x) - f(x)| < m$, donc $g(x) > f(x) - m$, donc $g(x) > 0$ par définition de m .

Ainsi, $g \in U$. Donc $B(f, m) \subset U$.

c) On a démontré : $\forall f \in U, \exists m > 0, B(f, m) \subset U$. C'est-à-dire : U est un ouvert.

2. Seconde méthode –

- a) Pour tout $f \in E$, f est continue sur le segment $[0; 1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure, donc $\min_{x \in [0; 1]} \{f(x)\}$ existe : φ est correctement définie.
- b) Soit $f \in E$. Montrons que φ est continue en f .
 Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in E$ tel que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.
 Alors : $\forall x \in [0; 1], |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.
 Donc : $\forall x \in [0; 1], f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$.
 On en tire :
 $\forall x \in [0; 1], g(x) \geq \min f - \varepsilon$, donc $\min g \geq \min f - \varepsilon$, i.e. $\varphi(f) - \varphi(g) \leq \varepsilon$,
 et aussi :
 $\forall x \in [0; 1], f(x) + \varepsilon \geq \min g$, donc $\min f + \varepsilon \geq \min g$, i.e. $\varphi(g) - \varphi(f) \leq \varepsilon$.
 Ainsi : $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \varepsilon$.
 Donc φ est continue en f . Et comme f est quelconque dans E , φ est continue sur E .
- c) $U = \{f \in E / \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\} = \{f \in E / \varphi(f) > 0\}$ avec φ continue sur E , donc U est un ouvert de E .
3. La seconde méthode montre que F est fermé.

Exercice 10 Nature des sous-espaces vectoriels en dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. a) Quelle est la nature topologique (fermé ou ouvert) de E ?
 b) Quelle est la nature de $\{0\}$?
 Dans la suite F désigne un sous-espace vectoriel de E de dimension d , telle que $d \in [[1; n-1]]$. On note $(e_1, \dots, e_d)$ une base de F , que l'on complète en base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$ de E . On suppose : $\forall i \in [[1; n]], \|e_i\| = 1$.
2. Soit $r > 0$.
 a) Justifier que $u = \frac{r}{2}e_n \in \mathcal{B}(0, r) \setminus F$.
 b) Qu'en déduire quant à la nature topologique de F ?
3. a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de F . On suppose que la suite f converge vers un vecteur ℓ .
 En exploitant les suites coordonnées, montrer que $\ell \in F$.
 b) Quelle est la nature topologique de F ?
4. On se propose de justifier la nature de F d'une autre façon. Soit $G = \text{Vect}(e_{d+1}, \dots, e_n)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G .
 a) Justifier que p est continue.
 b) En déduire la nature topologique de F .
5. Justifier que F est convexe.

Exercice 11 $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. a) Quelle est la nature topologique de $\mathbb{K}^*$?
 b) En déduire que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 a) On pose, pour tout x de $\mathbb{K}$, $P(x) = \det(A + xI_n)$.
 Justifier que f n'a qu'un nombre fini de racines non nulles.
 b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $A_k = A + \frac{1}{k}I_n$. Justifier qu'il existe un entier K_0 tel que

$$\forall k \geq k_0, A_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

 c) En déduire que A est limite d'une suite de matrices inversibles.
 d) Qu'en déduire ?
3. Soit $(A_k)_k \in \mathbb{N}$ une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A.$$

 a) A est-elle inversible ?
 b) On suppose de plus que : $A_k^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$.
 Montrer que A et B sont inversibles, en précisant A^{-1} .

Solution (Ex.11 - $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 a) P est un polynôme en x de degré n ($P(X) = \chi_A(-X)$), il n'admet qu'un nombre fini de racines, donc un nombre fini de racines non nulles.
 b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \stackrel{\text{déf.}}{=} A + \frac{1}{n}I_n$.
 Soit $r \stackrel{\text{déf.}}{=} \min\{|x| / P(x) = 0 \text{ et } x \neq 0\}$ si P admet des racines non nulles et $r \stackrel{\text{déf.}}{=} 1$ sinon.
 Dès que $\frac{1}{n} < r$ (i.e. $n > \frac{1}{r}$), A_n est inversible. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$. Donc A est limite d'une suite de matrices inversibles.
2. Par continuité du produit :
 $AB = \lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k) \lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k^{-1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k A_k^{-1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} I_n = I_n$, donc A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Exercice 12 Exponentielle de matrices particulières

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $S_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} M^j$.

On appelle *exponentielle de M* , si elle existe, la limite de la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$, notée e^M .

1. Dans les cas suivants, montrer que e^M existe et la calculer :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \text{b) } M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose M diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que

$$D = P^{-1}MP.$$

Montrer que e^D et e^M existent, et donner une relation entre elles.

3. Calculer e^M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution (Ex.12 – Exponentielle de matrices particulières)

1. Dans les cas suivants, montrer que e^M existe et la calculer :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b+abc+bc^2 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix},$$

et par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} a^k & b \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} c^i \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a^k & b \frac{a^k - c^k}{a - c} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a \neq c, \\ \begin{pmatrix} a^k & bka^{k-1} \\ 0 & b^k \end{pmatrix} & \text{si } a = c. \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{a^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e^a, \quad \sum_{j=0}^k \frac{b^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e^b, \quad \text{donc :}$$

$$\bullet \text{ pour } a \neq c, S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^a & \frac{b(e^a - e^c)}{a - c} \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

$$\bullet \text{ pour } a = c, S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

b) $M^2 = a^2 I_2$ donc, en posant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^{2k} = a^{2k} I_2$ et $M^{2k+1} = a^{2k+1} N$.

$$S_{2j} = \left(\sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \right) I_2 + \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) N$$

$$\text{Or : } \sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{e^a + e^{-a}}{2}, \quad \text{et : } \sum_{i=0}^{j-1} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

$$\text{donc } S_{2j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix}$$

$$\text{Comme } S_{2j+1} = \left(\sum_{i=0}^j \frac{a^{2i}}{(2i)!} \right) I_2 + \left(\sum_{i=0}^j \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) N,$$

$$\text{donc } S_{2j+1} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement : } S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^a + e^{-a} & e^a - e^{-a} \\ e^a - e^{-a} & e^a + e^{-a} \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

$$\text{c) } M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall k \geq 3, M^k = 0.$$

$$\text{La série n'a que trois termes non nuls, donc converge : } e^M = \begin{pmatrix} 1 & a & b + \frac{ac}{2} \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose M diagonalisable.

Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que

$$D = P^{-1}MP.$$

En notant $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a : $\forall j \in \mathbb{N}, D^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$.

$$\text{Notons pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}, T_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j.$$

$$\text{Donc } T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^D.$$

Comme : $\forall j \in \mathbb{N}, M^j = P D^j P^{-1}$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, S_k = P T_k P^{-1}$.

$$\text{Donc : } S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} P e^D P^{-1} \stackrel{\text{déf.}}{=} e^M.$$

Ainsi e^D et e^M existent, et $P e^D P^{-1} = e^M$.

3. On a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = 2^{n-1} M$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k = I_2 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 2^{k-1} \right) M = I_2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 2^k \right) M$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_2 + \frac{1}{2}(e^2 - 1)M \text{ d'où } \exp(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^2 & 1 - e^2 \\ 1 - e^2 & 1 + e^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Parties de $\mathbb{R}^2$

Chacune des parties

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq x\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$$

$$\text{et } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq \lfloor x \rfloor \leq 2\}$$

est-elle

1. ouverte ?
2. fermée ?
3. bornée ?
4. convexe ?

On pourra commencer par les représenter pour se faire une idée...