Exercice 1 *Exemple de convergence uniforme*

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. À l'aide du théorème spécial des séries alternées, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, R_n est bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.1** – *Exemple de convergence uniforme*)

1. Pour x fixé, le théorème spécial des séries alternées assure la converge puisque $\left(\dfrac{1}{n+x^2}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.

2. Soit $n \geqslant 1$. $\forall x \in \mathbb{R}, |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée.

3. $\forall n \geqslant 1$, $||\mathrm{R}_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc $||\mathrm{R}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la convergence est uniforme.

Exercice 2 *Le concept de convergence normale*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
On suppose les f_n bornées et on suppose que la série numérique $\sum ||f_n||_\infty$ converge.
On dit alors que la série $\sum f_n$ converge *normalement*[1].

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

1. Justifier que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement.

2. Justifier que, pour tout n, R_n est bornée.

3. Justifier que $\sum_n f_n$ converge uniformément.

Solution (**Ex.2** – *Le concept de convergence normale*)

1. Soit $x \in \mathrm{I}$. $\forall n, |f_n(x)| \leqslant ||f_n||_\infty$ donc par comparaison la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge. Donc la série de fonctions $\sup_n f_n$ converge simplement.

2. $\forall x \in \mathrm{I}, |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k||_\infty$ qui est indépendante de x donc R_n est bornée.

3. Soit $\forall n, \rho_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k||_\infty$. On a $||\mathrm{R}_n||_\infty \leqslant \rho_n$ et $\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car ρ_n est le reste d'une série numérique convergente. Donc $||\mathrm{R}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément.

1. Il faut donc interpréter « converger normalement » par « la série des normes $||f_n||_\infty$ converge ». De même que pour une série numérique « converge absolument » s'interprète en « la série des valeurs absolues converge »...

Exercice 3 *Exemples de convergence normale*

1. La série de fonction $\sum f_n$ de l'exercice converge-t-elle normalement ?

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$.

La série $\sum g_n$ converge-t-elle normalement ? Et uniformément ?

Solution (**Ex.3** – *Exemples de convergence normale*)

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f_n||_\infty = \dfrac{1}{n}$ (majorant évident, et atteint en 0). Donc $\sum ||f_n||_\infty$ diverge et la convergence n'est pas normale... ce qui prouve que la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence normale pour autant...

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||g_n||_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ (majorant évident, et atteint en 0). Donc $\sum ||g_n||_\infty$ converge et la convergence est normale, donc uniforme d'après l'exercice précédent.

Exercice 4 *Étude d'une fonction définie par une somme*

On pose, pour $x > 0$ et sous réserve d'existence, $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+n^2x}$.

1. Convergence simple
Justifier que S est définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;\,+\infty[$ on pose $h_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$.

2. Exemple de passage du local au global : continuité
a) La série de fonctions $\sum h_n$ converge-t-elle normalement sur $]\,0\,;\,+\infty[$?
b) Soit $a \in]\,0\,;\,+\infty[$. Justifier que la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[\,a\,;\,+\infty[$.
c) En déduire que S est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

3. Variations sans dérivation
Sans chercher à dériver S, montrer que S est strictement décroissante.

4. Dérivabilité et classe : variations et convexité

a) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$ et retrouver sa variation.

b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe.

5. Utilisations du théorème de la double limite : comportement en $+\infty$

a) À l'aide du théorème de la double limite, justifier : $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier que $\mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6x}$ et retrouver la limite précédente.

c) À l'aide du théorème de la double limite, établir que $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

d) En se plaçant au voisinage de 0, montrer à l'aide du théorème de la double limite que la convergence de la série $\sum h_n$ n'est pas uniforme sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

6. Comparaison série-integrale : comportement en 0

a) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x+1} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \mathrm{S}(x).$$

b) En déduire : $\mathrm{S}(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x)$.

7. Représentation graphique

a) Calculer S(1).

b) Représenter graphiquement S en tenant compte de tous les éléments obtenus au cours de cette étude.

Solution (**Ex.4** – *Étude d'une fonction définie par une somme*)

On pose, pour $x > 0$ et sous réserve d'existence, $\displaystyle \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Pour $x \in\,]\,0\,;\,+\infty[\,, 0 \leqslant h_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum_n h_n(x)$ converge par comparaison. Donc S est définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

2. a) $\|h_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ ne converge pas normalement sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

b) Soit $a \in\,]\,0\,;\,+\infty[$. $\|h_n\|_{\infty,[\,a\,;\,+\infty[} = \dfrac{1}{n+n^2a} \leqslant \dfrac{1}{an^2}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[\,a\,;\,+\infty[$.

c) Pour $a > 0$, les fonctions h_n sont toutes continues sur $[\,a\,;\,+\infty[$ et la convergence est normale donc uniforme, donc S est continue sur $[\,a\,;\,+\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, S est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

3. Soit $0 < x < y$. $\displaystyle \mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(h_n(x) - h_n(y)\big) > 0$ car $\forall n, h_n(x) > h_n(y)$. Donc S est strictement décroissante.

4. Pour tout $n \geqslant 1$, h_n est de classe $\mathcal{C}^2$.

$\forall n \geqslant 1, \forall x > 0, h_n'(x) = \dfrac{-1}{(1+nx)^2}$ et $h_n''(x) = \dfrac{2n}{(1+nx)^3}$.

Soit $a > 0$. Les majorations $\|h_n'\|_{\infty,[\,a\,;\,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{a^2n^2}$ et $\|h_n''\|_{\infty,[\,a\,;\,+\infty[} \leqslant \dfrac{2}{a^3n^3}$ justifient la convergence normale donc uniforme des séries $\sum_n h_n'$ et $\sum_n h_n''$ sur tout $[\,a\,;\,+\infty[\, \subset\,]\,0\,;\,+\infty[$.

Ainsi S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$ et S′ et S″ se calculent par dérivation terme à terme. D'où $\mathrm{S}' < 0$ et $\mathrm{S}'' > 0$: S est strictement décroissante et convexe.

5. Utilisations du théorème de la double limite : comportement en $+\infty$

a) S converge normalement donc uniformément sur $[\,1\,;\,+\infty[$, et pour tout $n \geqslant 1, h_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Le théorème de la double limite justifie alors que : $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b) $\forall x > 0, \forall n \geqslant 1, 0 \leqslant h_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2x}$, d'où $0 \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6x}$ et par encadrement $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

c) Posons $g_n : [\,1\,;\,+\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto xh_n(x) = \dfrac{x}{n+n^2x}$.

$g_n'(x) = \dfrac{n+n^2x-n^2x}{(n+n^2x)^2} > 0$ donc $\|g_n\|_\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \dfrac{1}{n^2}$.

La convergence de $\sum_n g_n$ est normale donc uniforme sur $[\,1\,;\,+\infty[$, donc par le théorème de la double limite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, i.e. $x\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$.

Ainsi $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

d) Si la convergence était uniforme sur $]\,0\,;\,+\infty[$, puisque $h_n(x) \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{1}{n}$, la série $\sum_n \dfrac{1}{n}$ convergerait... ce qui est absurde.

6. Comparaison série-integrale : comportement en 0

a) $\displaystyle \forall x > 0, \forall n \geqslant 1, h_{n+1}(x) \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leqslant h_n(x)$.

En sommant pour n parcourant $\mathbb{N}^*$,

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x+1} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \mathrm{S}(x).$$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}-\frac{x}{1+tx}\mathrm{d}t=\left[\ln\frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty}=-\ln(x)+\ln(1+x)$

Ainsi : $\forall x>0, -\ln(x)+\ln(1+x)\leqslant \mathrm{S}(x)\leqslant -\ln(x)+\ln(x+1)+\dfrac{1}{1+x}$.

En divisant par $-\ln(x)$, on obtient $\dfrac{\mathrm{S}(x)}{-\ln(x)}\xrightarrow[x\to 0]{} a1$, i.e. $\mathrm{S}(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln(x)$.

Exercice 5 *Intégrale et somme*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad f_n(x)=\begin{cases}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x\in\,]0\,;\,1]\,,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. Soit $x\in[0\,;\,1]$. Justifier l'existence, puis calculer : $\quad f(x)\overset{\text{déf.}}{=}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$.

2. Montrer que la convergence de la série des f_n est uniforme sur $[0\,;\,1]$.

3. **Intégration terme à terme par CVU sur un segment**

En déduire l'égalité : $\quad\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Solution (**Ex.5** – *Intégrale et somme*)

Remarque préalable :

$$f_n(x)=\begin{cases}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x\in\,]0\,;\,1]\,,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

définit une fonction continue sur $[0\,;\,1]$.

1. • Pour $x=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad f_n(x)=0$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ existe et vaut 0.

• Pour $x\in[0\,;\,1[$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad f_n(x)=(-x^2)^{n+1}$ donc, puisque $-x^2\in\,]-1\,;\,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ existe et vaut $-x^2\times\dfrac{1}{1-(-x^2)}\ln n=\dfrac{-x^2\ln x}{1+x^2}$.

Finalement : pour tout $x\in[0\,;\,1]$, $f(x)\overset{\text{déf.}}{=}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\frac{-x^2\ln x}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$.

Notons que $\mathrm{R}_\mathrm{N}(0)=0$.

Par le critère spécial des séries alternées, pour $x\in\,]0\,;\,1]$,

$|\mathrm{R}_\mathrm{N}(x)|=\left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x\right|\leq x^{2\mathrm{N}+4}\,|\ln x|$

Étudions $\varphi:\,]0\,;\,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto x^{2\mathrm{N}+4}\,|\ln x|=-x^{2\mathrm{N}+4}\ln x$.

$\varphi(1)=0=\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x)$, et $\forall x\in\,]0\,;\,1]\,$,

$\varphi'(x)=-(2\mathrm{N}+4)x^{2\mathrm{N}+3}\ln x-x^{2\mathrm{N}+3}=-x^{2\mathrm{N}+3}((2\mathrm{N}+4)\ln x+1)$, donc φ atteint son maximum en $\exp\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right)$.

Il vaut $-\exp\left(-\dfrac{2\mathrm{N}+4}{2\mathrm{N}+4}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$

Donc $||\mathrm{R}_\mathrm{N}||_\infty\leq\dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$, et par encadrement $||\mathrm{R}_\mathrm{N}||_\infty\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{}0$: la convergence est bien uniforme sur $[0\,;\,1]$.

3. Rappelons que $\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$ converge car $\displaystyle\int_\mathrm{A}^1\ln x\mathrm{d}x=-1-\mathrm{A}\ln\mathrm{A}+\mathrm{A}\xrightarrow[\mathrm{A}\to 0^+]{}-1$, ainsi que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par équivalence à la première, et $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ qui est faussement impropre puisque $\dfrac{x^2\ln x}{1+x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$.

$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par linéarité.

Chaque f_n étant continue sur $[0\,;\,1]$ et la convergence étant uniforme, la permutation somme/intégrale est licite :

$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x\mathrm{d}x$

Une intégration par parties permettra de conclure :

$\displaystyle\int_0^1x^{2n+2}\ln x\mathrm{d}x\overset{\text{IPP}}{=}\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{2n+3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n+3}$

$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$, et enfin

$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 6 *Une intégrale somme de série*

Intégration terme à terme sur un intervalle

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(\exp(\mathrm{e}^{-x})-1\big)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}$ en justifiant l'existence des deux membres.

Solution (**Ex.6** – *Une intégrale somme de série*)

1. $f : x \mapsto \exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$ avec $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ intégrable.
Donc f est intégrable par équivalence de fonctions positives.

2. a) $\dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{\mathrm{e}^{-nx}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ d'après le critère de D'Alembert.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-x})^n}{n!} = \exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1 = f(x)$.

3. Montrer que : $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$

- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}/n!$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
- $\displaystyle\sum_{n\geq1} f_n \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} \mathrm{S}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
- S est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
- $\displaystyle\sum_{n\geq1} \int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n \times n!}$ converge car $\forall n \geq 1, 0 \leq \dfrac{1}{n.n!} \leq \dfrac{1}{n!}$ et la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n!}$ converge.

Par le théorème d'interversion,
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x, \text{ i.e. } \mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}.$$

Exercice 7 *Une intégrale somme de série*

Pour tout u de $]0\,;\,1]$, on pose : $f(u) = \dfrac{\exp(u) - 1}{u}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore $f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}$ le prolongement obtenu.

2. a) Exprimer, pour tout u de $[0\,;\,1]$, $f(u)$ sous forme d'une somme d'une série de fonctions.

b) Montrer finalement que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

Solution (**Ex.7** – *Une intégrale somme de série*)

1. $\mathrm{e}^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $f(u) \xrightarrow[u\to0]{} 1 \in \mathbb{R}$.

2. a) $\forall u \in [0\,;\,1]\,, f(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n!}$.

b)
- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : u \mapsto u^{n-1}/n!$ est continue sur $[0\,;\,1]$.
- $\displaystyle\sum_{n\geq1} f_n \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} f$ sur $[0\,;\,1]$.
- f est continue sur $[0\,;\,1]$.
- $\displaystyle\sum_{n\geq1} \int_0^1 |f_n(u)|\,\mathrm{d}u = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n \times n!}$ converge car $\forall n \geq 1, 0 \leq \dfrac{1}{n.n!} \leq \dfrac{1}{n!}$ et la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n!}$ converge.

Par le théorème d'interversion,
$$\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(u)\mathrm{d}u, \text{ i.e. } \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}.$$

Exercice 8 *Harmoniquement*

On pose : $\forall \in\,]-1\,;\,+\infty[\,,\quad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie, continue et croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ et en déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en -1.

3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{S}(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

b) En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Solution (**Ex.8** – *Harmoniquement*)

1. Montrer que S est définie et continue sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Surtout ne pas séparer la série en deux séries divergentes !!!

- Je note : $f_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ pour $n \geq 1,\ x > -1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in\,]-1\,;\,+\infty[\,,\quad |f_n(x)| \overset{\text{déf.}}{=} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right| = \dfrac{|x|}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}$.

Par convergence de la série de Riemann de paramètre 2, $\displaystyle\sum_{n\geq1} f_n(x)$ converge simplement sur $]-1\,;\,+\infty[$.

S est définie sur $]-1\,;\,+\infty[$.

- Soit a et b tels que $-1 < a < 0$ et $1 < b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,b]} = \sup_{x\in[\,a\,;\,b]} \dfrac{|x|}{n(n+x)} \leq \dfrac{b}{n(n+a)}$, or $\dfrac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^2}$ donc $\sum_{n\geq+} \dfrac{b}{n(n+a)}$ converge équivalence, et par comparaison $\sum_{n\geq 1} ||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,b]}$ converge.
La convergence est normale, donc uniforme, sur $[\,a\,;\,b]$. Comme chaque f_n est continue sur $[\,a\,;\,b]$, S est continue sur $[\,a\,;\,b]$. Et comme ceci est valable pour tout a et b tels que $-1 < a < 0 < 1 < b$, S est continue sur $]-1\,;\,+\infty[$.

• Chaque f_n est croissante ($f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} > 0$...), donc par sommation S est croissante.

2. • Soit $x > -1$. Je note $\mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(x)$.

$$\mathrm{S_N}(x+1) - \mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n+1+x} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\mathrm{N}+1+x}.$$

Passons à la limite lorsque $\mathrm{N} \longrightarrow +\infty$: $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

• Dans $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(x+1) - \dfrac{1}{1+x}$, faisons tendre x vers -1^+ : $\lim_{x\to-1^+} \mathrm{S}(x+1) = \mathrm{S}(0)$ par continuité, or $\mathrm{S}(0) = 0$. Donc $\mathrm{S}(x+1) = o\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$, donc $\mathrm{S}(x+1) - \dfrac{1}{1+x} \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{-1}{x+1}$.

Ainsi : $\mathrm{S}(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{-1}{x+1}$.

3. a) $\mathrm{S}(0) = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{S}(n+1) - \mathrm{S}(n) = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\mathrm{S}(n+1) = \mathrm{S}(n) + \dfrac{1}{n+1}$... d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

b) *Culture nécessaire :* $\mathrm{S}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Par croissance de S : $\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor) \leq \mathrm{S}(x) \leq \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor + 1)$
donc $\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor) \leq \mathrm{S}(x) \leq \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor) + \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}$
donc $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \leq \dfrac{\mathrm{S}(x)}{\ln x} \leq \dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} + \dfrac{1}{(\ln x)(\lfloor x \rfloor + 1)}$.

• $\dfrac{1}{(\ln x)(\lfloor x \rfloor + 1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ sans souci,

• $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} = \dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln \lfloor x \rfloor} \times \dfrac{\ln \lfloor x \rfloor}{\ln x}$ or $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln \lfloor x \rfloor} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ (culture !)

• $\ln \lfloor x \rfloor = \ln\big(x + (\lfloor x \rfloor - x)\big) = \ln\big(x(1 + \dfrac{\lfloor x \rfloor - x}{x})\big)$
$\ln \lfloor x \rfloor = \ln x + \ln\big(1 + \dfrac{\lfloor x \rfloor - x}{x}\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ car $\ln\big(1 + \dfrac{\lfloor x \rfloor - x}{x}\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $\dfrac{\lfloor x \rfloor - x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ouf ! On a bien : $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc par encadrement $\dfrac{\mathrm{S}(x)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$,

$$\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

Exercice 9 *Étude d'une fonction définie par une somme*

Soit, sous réserve d'existence, $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

2. Montrer que f est décroissante.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. a) Montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

b) En posant $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale précédente, déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Solution (**Ex.9** – *Étude d'une fonction définie par une somme*)

Soit, sous réserve d'existence, $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

• Si $x < 0$, $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série diverge grossièrement. De même si $x = 0$ car alors $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$.

Si $x > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} n^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \lim_{m\to+\infty} \dfrac{m^4}{(\mathrm{e}^x)^m} = 0$ par croissance comparée (car $\mathrm{e}^x > 1$). Donc $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = o\left(1/n^2\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann.

$$\mathcal{D} =]\,0\,;\,+\infty[.$$

• Soit $a \in]\,0\,;\,+\infty[$.

$\forall x \in [\,a\,;\,+\infty[, \left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| \leq \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ or par ce qui précède $f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ converge.

Donc la série converge normalement donc uniformément sur $[\,a\,;\,+\infty[$. Comme

chaque f_n est continue sur $[a\,;\,+\infty[$, f est continue sur $[a\,;\,+\infty[$.
Ceci étant valable pour tout $a \in]0\,;\,+\infty[$, f est continue sur $\mathcal{D}$.

2. Chaque f_n est décroissante sur $\mathcal{D}$, donc par sommation f est décroissante sur $\mathcal{D}$.

3. a) Soit $x \in \mathcal{D}$.
Par décroissance de $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ sur $[0\,;\,+\infty[$,
$$\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
En sommant de $k=0$ à N la minoration et en passant à $\mathrm{N} \longrightarrow +\infty$:
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq f(x).$$
En sommant de $k=1$ à N la majoration et en passant à $\mathrm{N} \longrightarrow +\infty$:
$$f(x) - \mathrm{e}^0 \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
Ainsi : $\forall x \in \mathcal{D},\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$

b) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u \overset{\mathrm{IPP}}{=} \left[2u\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u = \frac{2}{x^2}$.
On déduit alors de a)
$$1 \leq \frac{x^2}{2}f(x) \leq \frac{x^2}{2} + 1,$$
donc par encadrement $\dfrac{x^2}{2}f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

c) a) et le calcul initial de b) donne
$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}.$$
Or $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \geq 1,$
donc par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Exercice 10 *Domaine de définition troué*

Pour $x \geq 0$, on pose : $\qquad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1. Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}^+$, $\mathrm{S}(x)$ est-elle définie ?

2. Former une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(1/x)$ pour $x \neq 0$.

3. Étudier la continuité de S sur $[0\,;\,1[$ puis sur $]1\,;\,+\infty[$.

4. Dresser le tableau de variation de S en précisant ses limites.

Solution (**Ex.10** – *Domaine de définition troué*)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, soit $f_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Pour $x \geq 0$, on pose : $\qquad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1. Si $x \in [0\,;\,1[$, $0 \leq f_n(x) \leq x^n$ donc $\mathrm{S}(x)$ existe par comparaison à la série géométrique.
Si $x = 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ donc la série diverge grossièrement et $\mathrm{S}(x)$ n'existe pas.
Si $x > 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ donc $\mathrm{S}(x)$ existe par comparaison à la série géométrique de raison $\dfrac{1}{x} \in]0\,;\,1[$.
Donc S est définie sur $\mathcal{D} = [0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.

2. $\forall x \in \mathcal{D}\setminus\{0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(1/x) = \dfrac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \dfrac{x^{2n}}{x^n(x^{2n}+1)} = f_n(x)$, donc
$$\forall x \neq 0,\quad \mathrm{S}(1/x) = \mathrm{S}(x).$$

3. Étudier la continuité de S sur $[0\,;\,1[$ puis sur $]1\,;\,+\infty[$.
Soit $a \in]0\,;\,1[$. La majoration précédente donne $||f_n||_{\infty,[0\,;\,a]} \leq a^n$. Or la série géométrique $\displaystyle\sum_n a^n$ converge. Donc S converge normalement donc uniformément sur $[0\,;\,a]$. Comme chaque f_n est continue, S est continue sur $[0\,;\,a]$. Comme a est arbitraire dans $[0\,;\,1[$, S est continue sur $[0\,;\,1[$.
Comme sur $]1\,;\,+\infty[$, $\mathrm{S} : x \mapsto \mathrm{S}(1/x)$, S est continue sur $]1\,;\,+\infty[$ par composition.

4. • Pour tout n, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$ donc f_n est croissante sur $[0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
Par sommation, S est croissante sur $[0\,;\,1[$ et décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$.
• Par continuité, $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{S}(0) = 0$.
• $\forall x \in [0\,;\,1[,\quad \mathrm{S}(x) \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{x}{2(1-x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty,$
donc par comparaison $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.
• De $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(1/x)$ on tire par composition avec les limites précédentes

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty \text{ et } \mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0.$$

Exercice 11 *Non dérivable en 0*

On pose, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. Montrer que $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. La convergence de la série des f_n est-elle uniforme ? normale ?

3. Justifier que S est continue $[0\,;\,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad \dfrac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} \geq \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)}$.

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Solution (**Ex.11** – *Non dérivable en 0*)

On pose, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. Montrer que $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

$\forall n \geq 1, f_n(0) = 0$ donc S(0) existe.

$\forall x \neq 0, |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3\,|x|}$ assure la convergence simple de S(x) par équivalence à la série de Riemann de paramètre 3.

2. De $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq (1-n\,|x|)^2 = 1 + n^2x^2 - 2n\,|x|$ on tire $2n\,|x| \leq 1+n^2x^2$ puis $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

D'où $||f_n||_\infty \leq \dfrac{1}{2n^2}$, ce qui assure la convergence normale, donc uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

3. • La convergence uniforme et la continuité de chaque f_n assure la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

• Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_n'(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$

Soit $a > 0$ et x tel que $|x| \geq a$. Alors

$|f_n'(x)| \leq \dfrac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} \leq \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \dfrac{1}{n(1+n^2a^2)} \leq \dfrac{1}{n^3a^2}$

Donc $||f_n||_{\infty,]-\infty\,;\,a]\cup[a\,;\,+\infty[} \leq \dfrac{1}{n^3a^2}$. Ceci assure la convergence normale donc uniforme sur tout $]-\infty\,;\,a] \cup [a\,;\,+\infty[$ où $a > 0$. Donc que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. a) Soit $x > 0$.

$$\frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par comparaison à une intégrale :

$$\frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2x^2)}\mathrm{d}t$$

Par le changement $u = tx$!

$$\frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} \geq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)}.$$

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Comme $\dfrac{1}{u(1+u^2)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u}$, par équivalence de fonctions positives avec $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ non intégrable sur $]0\,;\,1]$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$: S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 12 *Une permutation série/intégrale*

1. Justifier l'existence et calculer la valeur de : $\quad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad f_n :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto 2x\exp\big(-(2n+1)x\big)$.

2. a) Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on exprimera à l'aide de la fonction sh.

b) Montrer que : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 13 *Étude de dérivabilité*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx}$,

et, sous réserve d'existence, $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathcal{D}_f$ de $f = [0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

3. a) La convergence de $\sum f_n'$ est-elle normale sur $[\,0\,;\,+\infty[$? Et sur $[\,a\,;\,+\infty[$ où $a > 0$?

Solution (**Ex.13** – *Étude de dérivabilité*)

1. Si $x < 0$, $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
Si $x \geq 0$, $\left(\dfrac{1}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx}\right)_n$ est une suite décroissante de limite nulle donc par le théorème de Leibniz, la série converge.
Donc $\mathcal{D}_f = [\,0\,;\,+\infty[$.

2. D'après le théorème de Leibniz,
$\forall x \in [\,0\,;\,+\infty[\,, |\mathrm{R_N}(x)| = \left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq |f_{\mathrm{N}+1}(x)| \leq \dfrac{1}{1+(\mathrm{N}+1)^2}$, donc
$||\mathrm{R_N}||_\infty \leq \dfrac{1}{\mathrm{N}^2}$ donc $||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$.
La convergence est uniforme et pour tout n, f_n est continue sur $[\,0\,;\,+\infty[$ donc f est continue sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

3. Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$ et on peut raisonner de même pour la majoration du reste :
$\left|\left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n'\right|\right|_\infty \leq \dfrac{1}{\mathrm{N}}$, donc $\left|\left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n'\right|\right|_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$.
La convergence étant uniforme, la somme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

4. a) $||f_n'||_\infty \geq |f_n'(0)| \geq \dfrac{n}{1+n^2}$ or $\dfrac{n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, donc par équivalence de termes généraux positifs, puis par minoration, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} ||f_n'||_\infty$ diverge. La convergence n'est pas normale sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Alors (*attention à la place des valeurs absolues !*) :
$\forall x \geq a, |f_n'(x)|' = -\dfrac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx} < 0$ donc :
$||f_n'||_\infty = |f_n'(a)| = \dfrac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{-a}\right)^n$,
et comme $\mathrm{e}^{-a} \in \,]\,0\,;\,1[$, la série géométrique de raison e^{-a} converge, donc par équivalence de termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} ||f_n'||_{\infty,[\,a\,;\,+\infty[}$ converge.

Il y a convergence normale sur tout intervalle $[\,a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$... ce qui n'entraîne pas la convergence normale sur $]\,0\,;\,+\infty[$.