

Exercice 1 *Spectre de l'automorphisme réciproque*

Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E .

1. Justifier que $0 \notin \text{Sp}(u)$.
2. Justifier que $\text{Sp}(u^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(u) \right\}$.

Solution (Ex.1 – *Spectre de l'automorphisme réciproque*)

1. $0 \in \text{Sp}(u) \iff \ker(u) \neq \{0\} \iff u$ non injectif : exclu.
2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Alors en composant par u^{-1} , $x = \lambda u^{-1}(x)$ i.e. $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ ce qui prouve que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u^{-1} .

En permutant les rôles de u et u^{-1} , on justifie l'égalité demandée.

Exercice 2 *Valeur propre nulle et injectivité*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $E \neq \{0\}$.

1. Montrer que : $0 \notin \text{Sp}(f) \iff f$ injective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $0 \in \text{Sp}(f^n) \Rightarrow 0 \in \text{Sp}(f)$.
3. On suppose f nilpotent. Montrer que $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Solution (Ex.2 – *Valeur propre nulle et injectivité*)

1. $0 \notin \text{Sp}(f) \iff \ker(f - 0\text{id}) = \{0\} \iff f$ injective.
2. Supposons $0 \in \text{Sp}(f^n)$, donc $\exists x \neq 0_E$ tel que $f^n(x) = 0_E$.
Si $0 \notin \text{Sp}(f)$, alors f est injective donc : $\forall y \neq 0_E, f(y) \neq 0_E$.
Par récurrence immédiate, $f^n(x) \neq 0_E$, ce qui est absurde.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Supposons que $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$. Alors $f^p(x) = \lambda^p x$ d'une part, et $f^p(x) = 0_E$ d'autre part. Donc $\lambda^p = 0$ puisque $x \neq 0_E$. Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(f) \subset \{0\}$.
Mais $0 \in \text{Sp}(f^p)$ puisque $\forall x \in E, f^p(x) = 0_E = 0.x$. Donc par 2. $0 \in \text{Sp}(f)$.
Finalement $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Exercice 3 *L'opérateur « dérivation »*

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : E \rightarrow E, f \mapsto f'$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de D .

Solution (Ex.3 – *L'opérateur « dérivation »*)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$.

$D(f) = \lambda f \Rightarrow f' = \lambda f \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}, f : x \mapsto A \exp(\lambda x)$: il existe des solutions non nulles à $D(f) = \lambda f$.

Bilan : $\text{Sp}(D) = \mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $E_\lambda = \text{Vect}(x \mapsto \exp(\lambda x))$.

Exercice 4 *L'opérateur « primitivation »*

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $P : E \rightarrow E, f \mapsto F$ telle que $\begin{cases} F' = f \\ F(0) = 0 \end{cases}$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de P .

Solution (Ex.4 – *L'opérateur « primitivation »*)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. Soit $F = P(f)$.

$P(f) = \lambda f \Rightarrow F = \lambda F'$

Premier cas : $\lambda \neq 0$

$\exists A \in \mathbb{R}, F : x \mapsto A \exp(x/\lambda)$ et comme $F(0) = 0$, $A = 0$, donc $F = 0_E$, donc $f = F' = 0_E$: il n'existe aucune solution non nulle à $P(f) = \lambda f$.

Second cas : $\lambda = 0$

$F = 0_E$ donc $f = 0_E$. Même conclusion.

Bilan : $\text{Sp}(P) = \emptyset$.

Exercice 5 *L'opérateur « décalage »*

Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$ et $\Delta : E \rightarrow E, u \mapsto v$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Δ .

Solution (Ex.5 – *L'opérateur « décalage »*)

Analyse –

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$.

$\Delta(u) = \lambda u \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \lambda^n$

Comme $u \in E$, $\lambda \in]-1; 1[$.

Synthèse –

$\text{Sp}(\Delta) =]-1; 1[$ et pour $\lambda \in]-1; 1[$, $E_\lambda = \text{Vect}((\lambda^n)_n)$.

Exercice 6 *Matrice de rang 1*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $A = CL$.
2. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $A^2 = \lambda A$.
3. Montrer que λ est une valeur propre de A .

Solution (Ex.6 – *Matrice de rang 1*)

1. $\text{rg}(A) = 1$ donc les n colonnes de A sont proportionnelles à une même colonne

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ non nulle de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}). \text{ Écrivons } A = (a_1 C | a_2 C | \dots | a_n C). \text{ Alors en}$$

posant $L = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $A = CL$.

2. $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$ or $LC = (\sum_i a_i c_i) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. En posant $\lambda = \sum_i a_i c_i$, $A^2 = C(\lambda)L = \lambda CL = \lambda A$.
3. $AC = CLC = C(\lambda) = \lambda C$ avec $C \neq 0$ donc $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Exercice 7 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM$.

Montrer que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi)$.

Solution (Ex.7 – *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

- Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AC = \lambda C$. En prenant la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes valent C , $\varphi(M) = AM = \lambda M$ donc $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$.
- Soit $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(M) = \lambda M$, i.e. $AM = \lambda M$. Soit C une colonne non nulle de M . Alors $AC = \lambda C$, donc $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Exercice 8 *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA.$$

Déterminer les éléments propres de u .

Solution (Ex.8 – *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*)

$$\text{Pour } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :$$

$$AM - MA = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ donc immédiatement :}$$

$$0 \in \text{Sp}(f) \text{ avec } E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$1 \in \text{Sp}(f) \text{ avec } E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$-1 \in \text{Sp}(f) \text{ avec } E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

Bilan : $\text{Sp}(f) = \{-1, 0, 1\}$ avec $\dim E_{-1} + \dim E_0 + \dim E_1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc f est diagonalisable.

Variante : dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ diagonale!}$$

Exercice 9 *Commutant d'une matrice diagonale*

1. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, A est diagonale.

2. Soit λ et μ deux scalaires distincts et p et q deux entiers naturels non nuls.

$$\text{Déterminer les matrices commutant avec } D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p & 0 \\ \hline 0 & \mu I_q \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

Solution (Ex.9 – *Commutant d'une matrice diagonale*)

1. Dans ce qui suit, (i, j) décrit $[[1; n]]^2$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons que $D = (d_{i,j}) = (\lambda_i \delta_{i,j})$ où δ est le symbole de Kronecker.

Par la définition du produit matriciel :

$$\begin{aligned} AD = DA &\iff \forall (i, j), \sum_{k=1}^n a_{i,k} \lambda_k \delta_{k,j} = \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} a_{k,j} \iff \forall (i, j), a_{i,j} \lambda_j = \\ &\lambda_i a_{i,j} \iff \forall (i, j), (\lambda_i - \lambda_j) a_{i,j} = 0 \iff \forall (i, j), (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0) \iff \\ &A \text{ diagonale} \end{aligned}$$

2. Raisonnons par blocs. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et

$B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

$$MD = DM \iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda A & \mu B \\ \hline \lambda C & \mu D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A & \lambda B \\ \hline \mu C & \mu D \end{array} \right) \iff \begin{cases} (\mu - \lambda)B = 0_{p,q} \\ (\lambda - \mu)C = 0_{q,p} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} B = 0_{p,q} \\ C = 0_{q,p} \end{cases} \iff M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \text{ (diagonale par blocs).}$$

Exercice 10 Exemple de réduction d'endomorphismes

Soit $E = \mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E . Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.

$$\begin{aligned} 1. A &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}; & 2. A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ 3. A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; & 4. A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution (Ex.10 – Exemple de réduction d'endomorphismes)

- $\chi_A = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$, $\text{Sp}(f) = \{-1, 1, 2\}$, $E_{-1} = \text{Vect}((-2, 1, 2))$, $E_1 = \text{Vect}((-1, 1, 1))$, $E_2 = \text{Vect}((-2, 1, 1))$, f diagonalisable.
- $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X - 1)^2(X - 2)$, $\text{Sp}(f) = \{1, 2\}$, $E_1 = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$, $E_2 = \text{Vect}((-2, 1, 1))$, f diagonalisable.
- $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X - 1)^2(X - 2)$, $\text{Sp}(f) = \{1, 2\}$, $E_1 = \text{Vect}((-1, 1, 1))$, $E_2 = \text{Vect}((-2, 1, 1))$, f non-diagonalisable.
Remarque : même polynôme caractéristique pour 2. & 3.
- $\chi_A = X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$, $\text{Sp}(f) = \{1\}$, $E_1 = \text{Vect}((-1, 0, 1))$, f non-diagonalisable.

Exercice 11 Dans un espace de polynômes

$E = \mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus 2.

Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme défini par :

$$Q(X) = P(X + 1) + XP'(X)$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
- a) Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?
b) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E formée de vecteurs propres de f .
c) Quelles sont les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :
 $P(X + 1) + XP'(X) = X^2 + X + 1$.

Solution (Ex.11 – Dans un espace de polynômes)

- Pas de problème pour la linéarité.

$$2. M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ où } \mathcal{B} = (1, X, X^2).$$

- $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
- a) $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(M) = \{1, 2, 3\}$ puisque M est triangulaire. $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\text{card}(\text{Sp}(f)) = 3 = \dim(E)$ donc f est diagonalisable.
b) La résolution de $f(P) = \lambda P$ donne : $E_1 = \text{Vect}(1)$, $E_2 = \text{Vect}(X + 1)$ et $E_3 = \text{Vect}(2X^2 + 4X + 3)$. $\mathcal{C} = (1, X + 1, 2X^2 + 4X + 3)$ convient.
c) En raisonnant sur les coefficients par degrés décroissants :
 $X^2 + X + 1 = \frac{1}{2}(2X^2 + 4X + 3) - (X + 1) + \frac{1}{2} \times 1$, les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans $\mathcal{C}$ sont $(1/2, -1, 1/2)$.

Exercice 12 Racines carrées d'endomorphismes diagonalisables

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E .

On suppose que u possède n valeurs propres distinctes deux à deux.

- u est-il diagonalisable ?
Dans la suite, on note $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u et D la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$.
- On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
a) Montrer qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$. Un tel endomorphisme est parfois appelé « racine carrée de u ». Rien ne dit qu'il soit

unique.

- b) Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que $v = P(u)$.
- c) Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = D$. Une telle matrice est appelée « racine carrée de D ».
- Montrer que R et D commutent et en déduire le nombre de racines carrées de D .
- d) Combien existe-t-il d'endomorphismes v tels que $v^2 = u$?
3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- a) À quelle condition *sine qua non* u possède-t-il au moins une racine carrée?
- b) On suppose que u possède au moins une racine carrée. Combien en possède-t-il?
4. On note λ_i pour $i \in [[1; n]]$ les n valeurs propres de u et E_i les sous-espaces propres associés respectivement.
- Pour tout i de $[[1; n]]$, on note p_i le projecteur de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.
- a) Justifier que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- b) Justifier que la famille $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
- c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ pour que

$$\left(\sum_{i=1}^n \mu_i p_i \right)^2 = u.$$

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que u est diagonalisable.
- b) On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les valeurs propres de u et E_i le sous-espace propre associé à i pour $1 \leq i \leq 3$.
- Expliciter une matrice Q inversible telle que $Q^{-1}MQ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et calculer Q^{-1} .
- c) Déterminer les racines carrées du M en distinguant les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- d) Pour chaque racine carrée v du u , donner un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$. On exprimera ces polynômes dans une base de Lagrange bien choisie que l'on explicitera.
- e) Pour tout i de $[[1; n]]$, déterminer la matrice P_i représentant dans la base canonique $\mathcal{C}$ le projecteur p_i de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

- f) Pour chaque racine carrée v de u , exprimer v à l'aide des projecteurs p_i .

Solution (Ex.12 – Racines carrées d'endomorphismes diagonalisables)

1. u est diagonalisable car $\text{Card}(\text{Sp}(u)) = \dim(E)$.
- Dans la suite, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- a) Soit v l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [[1; n]], v(e_i) = \mu_i e_i$ où μ_i est un complexe vérifiant $\mu_i^2 = \lambda_i$.
- Alors : $\forall i \in [[1; n]], v^2(e_i) = \mu_i^2 e_i = \lambda_i e_i = u(e_i)$.
- v^2 et u coïncident sur la base $\mathcal{B}$ donc sont égaux.
- b) Par le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme de degré au plus $n - 1$ tel que : $\forall i \in [[1; n]], P(\lambda_i) = \mu_i$.
- Comme pour tout i de $[[1; n]], u(e_i) = \lambda_i e_i, P(u)(e_i) = P(\lambda_i) e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$.
- Donc $P(u) = v$.
- c) $RD = R^3 = DR$, donc les valeurs propres de D étant deux à deux distinctes, R est diagonale. En notant $R = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$,
- $$R^2 = D \iff \forall i \in [[1; n]], \mu_i^2 = \lambda_i.$$
- Tout complexe non nul ayant exactement 2 racines carrées distinctes, et 0 n'en ayant qu'une, le nombre de racines carrées de D est 2^n si $0 \notin \text{Sp}(D)$ et 2^{n-1} si $0 \in \text{Sp}(D)$.
- d) Comme $v^2 = u \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)^2 = D$, le nombre de racines carrées de u est 2^n si $0 \notin \text{Sp}(u)$ et 2^{n-1} si $0 \in \text{Sp}(u)$.

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- a) u possède une racine carrée si, et seulement si, chaque valeur propre de u possède une racine carrée au moins, donc si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.
- b) u possède au moins une racine carrée, donc ses valeurs propres sont toutes positives. La réponse est alors identique à 2.d).
4. On note λ_i pour $i \in [[1; n]]$ les n valeurs propres de u et E_i les sous-espaces propres associés respectivement.
- Pour tout i de $[[1; n]]$, on note p_i le projecteur de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.
- a) Comme : $\forall j \in [[1; n]], E_j = \text{Vect}(e_j)$, par définition des $p_i, p_i(e_j) =$
- $$\begin{cases} e_j & \text{si } i = j \\ 0_E & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

$$\text{Alors : } \forall j \in [[1; n]], \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i(e_j) = \lambda_j e_j = u(e_j) \text{ donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = u,$$

et : $\forall i \neq j, p_i \circ p_j(e_k) = \begin{cases} p_i(e_j) = 0_E & \text{si } k = j \\ p_i(0_E) = 0_E & \text{si } k \neq j \end{cases}$, donc $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

b) Supposons que $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. En évaluant ces endomorphismes en e_j , on obtient $\alpha_j e_j = 0_E$, avec $e_j \neq 0_E$, donc $\alpha_j = 0$. La famille (p_i) est libre.

c) En développant avec $p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i & \text{si } i \neq j \\ 0_{\mathcal{L}(E)} & \text{si } i = j \end{cases}$, $\left(\sum_{i=1}^n \mu_i p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 p_i$,

et comme la famille (p_i) est libre,

$$\left(\sum_{i=1}^n \mu_i p_i\right)^2 = u \iff \sum_{i=1}^n \mu_i^2 p_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \iff \forall i \in [[1; n]], \mu_i^2 = \lambda_i$$

5. a) $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(M) = \{-1, 0, 1\}$, u est diagonalisable car possédant $\dim(E)$ valeurs propres distinctes.

b) En déterminant les vecteurs propres de M , $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient (ce n'est

pas la seule) et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, M n'a aucune racine carrée.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, M possède exactement 4 racines carrées :

$$R = Q \begin{pmatrix} \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

d) La base de Lagrange pour les points $-1, 0, 1$ est $L_{-1} = \frac{1}{2}(X^2 - X)$, $L_0 = -X^2 + 1$

et $L_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$.

Les racines carrées de M sont alors

$$aL_{-1}(M) + bL_1(M) = \frac{1}{2}((a+b)M^2 - (a-b)M) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

e) Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de p_1 est $E_{1,1}$ car p_1 est le projecteur sur $\text{Vect}(e_1)$

parallèlement à $\text{Vect}(e_2, e_3)$. Donc

$$P_1 = QE_{1,1}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même

$$P_2 = QE_{2,2}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_3 = QE_{3,3}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) $v = ap_1 + bp_3$ avec $a \in \{-i, i\}$ et $b \in \{-1, 1\}$, et on retrouve les matrices racines carrées de M

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

Exercice 13 Sous espace propre de dimension $n-1$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 soit diagonalisable.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une valeur propre λ telle que $\dim E_\lambda = n-1$ soit diagonalisable.

Solution (Ex.13 – Sous espace propre de dimension $n-1$)

- $0 \in \text{Sp}(A)$ avec $\omega(0) \geq \dim \text{Ker}(A) = n-1$, donc $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$, donc $\lambda = \text{Tr}(A)$.

Premier cas : $\text{Tr}(A) = 0$, $\chi_A = X^n$ et $\dim E_0 < \omega(0)$, A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\text{Tr}(A) \neq 0$, $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A))$ et $\dim E_0 = \omega(0)$, $1 \leq \dim E_{\text{Tr}(A)} \leq \omega(1)$, donc $\dim E_{\text{Tr}(A)} = 1$, et A est diagonalisable.

- $\chi_A = (X - \lambda)^{n-1}(X - \mu)$ avec éventuellement $\mu = \lambda$.

$$\chi_A = (X^{n-1} - (n-1)\lambda X^{n-2} + \dots)(X - \mu) = X^n - ((n-1)\lambda + \mu)X^{n-1} + \dots$$

Premier cas : $\text{Tr}(A) = n\lambda$, donc $\mu = \lambda$, $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$ avec $\dim E_\lambda < \omega(\lambda)$, A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\text{Tr}(A) \neq n\lambda$, donc $\mu \neq \lambda$, $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\dim E_\lambda = n-1$ et $\dim E_\mu = 1$, A est diagonalisable.

Notons que 1. n'est qu'un cas particulier de ce cas.

Variante efficace – Quitte à plonger dans $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \mu = \text{Tr}(A) - (n-1)\lambda \in \mathbb{K}.$$

Premier cas : $\mu = \lambda$ (i.e. $\text{Tr}(A) = n\lambda$), $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et $\dim E_\lambda < n$ donc A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\mu \neq \lambda$ (i.e. $\text{Tr}(A) \neq n\lambda$), $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \text{Tr}(A) - (n-1)\lambda\}$ et $\dim E_\lambda + \dim E_{\text{Tr}(A) - (n-1)\lambda} = n$ donc A est diagonalisable.

Exercice 14 Matrice à deux paramètres

Soit $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice diagonale semblable à A .

Solution (Ex.14 – Matrice à deux paramètres)

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.
2. $\text{rg}(A) = 2$ donc $0 \in \text{Sp}(A)$ et $\dim E_0 = 2n - 2 = \omega(0)$ (car diagonalisable). On note λ et μ les deux autres valeurs propres de A (et il n'est pas exclu que $\lambda = \mu$). Comme A est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(\lambda, \mu, 0, \dots, 0)$, $\lambda + \mu = \text{Tr}(A) = 2na$, donc $\mu = 2na - \lambda$.
Quelques idées pour trouver λ et μ :

- la somme des coefficients de chaque est constante, égale à $n(a+b)$ donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$n(a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \lambda = n(a+b) \text{ est une valeur propre. Alors } \mu = n(a-b).$$

- En sommant les $2n$ lignes sur la première ligne, on obtient une factorisation :

$$\chi_A(X) = \det(XI_{2n} - A) = (X - n(a+b)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \times & \times & & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & & \times \end{vmatrix} \text{ donc } \lambda = n(a+b)$$

est une racine de χ_A donc une valeur propre. $\mu = n(a-b)$ est l'autre.

- $\text{Tr}(A^2) = 2n^2(a^2 + b^2)$, et comme A^2 est semblable à $\text{diag}(\lambda^2, \mu^2, 0, \dots, 0)$, $\lambda^2 + \mu^2 = n^2(a^2 + b^2)$.

$$\text{On en tire : } \lambda\mu = \frac{1}{2}((\lambda + \mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2) = n^2(a^2 - b^2).$$

Donc λ et μ sont les racines du trinôme $X^2 - 2naX + n^2(a^2 - b^2)$.

$$\Delta = 4n^2b^2 = (2nb)^2 > 0, \lambda = n(a+b) \text{ et } \mu = n(a-b).$$

Bref, A est semblable à $\text{diag}(n(a+b), n(a-b), 0, \dots, 0)$.

Exercice 15 Sommes constantes en ligne ou en colonne

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice. On suppose que : $\forall i \in [[1; n]], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = s$.

Montrer que $s \in \text{Sp}(A)$.

2. En est-il de même si : $\forall j \in [[1; n]], \sum_{i=1}^n a_{i,j} = s$?

3. Étudier si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Si oui, proposer une matrice diagonale semblable à A .

Solution (Ex.15 – Sommes constantes en ligne ou en colonne)

1. Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AU = sU$ donc $s \in \text{Sp}(A)$ et $U \in E_s$.

Variante : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$: on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ et on factorise la première colonne par $X - s$, alors $\chi_A(X) = (X - s)\det(?)$, et s est racine de χ_A .

2. Cette fois, tA vérifie la propriété de 1., donc $s \in \text{Sp}({}^tA)$. Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^tA)$ donc $s \in \text{Sp}(A)$. Donc $\dim(E_0) + \dim(E_{10}) = 4$ et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: A est diagonalisable.
3. $\text{rg}(A) = 1$ donc $0 \in \text{Sp}(A)$ avec $\dim E_0 = 3$. Par 2., $10 \in \text{Sp}(A)$. Comme $\dim E_{10} \geq 1$ et $\dim E_0 + \dim E_{10} \leq 4$, $\dim E_{10} = 1$.

Exercice 16 *Calculs explicites en dimension 3*

Pour les trois matrices suivantes, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres, en précisant si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, voire dans $\mathbb{C}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution (Ex.16 – *Calculs explicites en dimension 3*)

$$\bullet \chi_M = (X - 1)(X + 1)^2, \text{Sp}(M) = \{-1, 1\}, E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), E_{-1}(M) =$$

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ non diagonalisable, ni dans } \mathbb{R}, \text{ ni dans } \mathbb{C}.$$

$$\bullet \chi_N = (X - 2)^2 \cdot (X - 1), \text{Sp}(M) = \{1, 2\}, E_1(N) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), E_2(M) =$$

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right), \text{ diagonalisable dans } \mathbb{R} \text{ et dans } \mathbb{C}.$$

$$\bullet \chi_L = (X + 1)(X^2 + 1) = (X + 1)(X - i)(X + i), \text{Sp}_{\mathbb{R}}(L) = \{-1\}, \text{Sp}_{\mathbb{C}}(L) = \{-1, i, -i\}, E_{-1}(L) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), E_i(L) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 - i \\ 3 - i \\ 6 \end{pmatrix} \right), E_{-i}(L) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 + i \\ 3 + i \\ 6 \end{pmatrix} \right), \text{ non diagonalisable sur } \mathbb{R}, \text{ mais diagonalisable sur } \mathbb{C}.$$

Exercice 17 *Matrice à un paramètre*

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{K}, n \geq 3 \text{ et } A = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{i.e. } a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in \{1; n\}, \\ 1 & \text{si } i \in [[2; n - 2]]. \end{cases}$$

Étudier, suivant la valeur de α , si A est diagonalisable, et préciser dans tous les cas ses éléments propres.

Solution (Ex.17 – *Matrice à un paramètre*)

$\text{rg}(A) = n - 1$ donc $0 \in \text{Sp}(A)$ et $\dim E_0 = n - 1$.

De plus, $E_0 = \text{Vect}(E_1 - E_2, \dots, E_1 - E_n)$ où $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Du coup $\omega(0) \geq n - 1$ et $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$. Mais comme $\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots$, nécessairement $\lambda = \text{Tr}(A) = 2\alpha + n - 2$.

• Premier cas : $\alpha = 1 - \frac{2}{n}$.

Alors $\lambda = 0$, $\chi_A = X^n$ et $\dim E_0 < \omega(0)$: A n'est pas diagonalisable

• Second cas : $\alpha \neq 1 - \frac{2}{n}$, alors $\text{Sp}(A) = \{0, 2\alpha + n - 2\}$ avec $\dim E_{2\alpha+n-2} = 1$. A

est diagonalisable avec $\chi_A = X^{n-1}(X - (2\alpha + n - 2))$.

$$\text{Enfin : } A \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = (2\alpha + n - 2) \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ donc } E_{2\alpha+n-2} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 18 Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in [1; n]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i < n \\ 1 - n & \text{si } i = n \end{cases}$$

M est-elle diagonalisable ?

Solution (Ex.18 – Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

$\text{rg}(M) = 1$ donc $\dim \text{Ker}(M - 0 \times I_n) = n - 1 \geq 1 : 0$ est valeur propre, avec $\dim(E_0) = n - 1$.

Supposons M est diagonalisable : elle possède alors une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ et étant semblable à $\text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)$, on a : $\text{Tr}(M) = \lambda + (n - 1) \times 0$, donc $\lambda = \text{Tr}(M)$. Or $\text{Tr}(M) = 0$ donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde.

M n'est pas diagonalisable.

Exercice 19 Un espace vectoriel de matrices diagonalisables

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$F = \left\{ M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
2. Justifier que toute matrice $M_{a,b,c}$ de F est diagonalisable.

$$\text{Que valent } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M_{a,b,c})} \lambda \text{ et } \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M_{a,b,c})} \lambda ?$$

3. Donner deux matrices J et K de E telles que (I_n, J, K) soit une base de F .
4. Déterminer les éléments propres de J et K .

5. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Dédurre de la question précédente les vecteurs propres puis les valeurs propres de $M_{a,b,c}$.

Exercice 20 Un endomorphisme sur les endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E . Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose :

$$\varphi(u) = p \circ u.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$, i.e. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
2. Calculer $\varphi \circ \varphi$ et en déduire la diagonalisabilité et le spectre de φ .
3. Montrer que $E_0(\varphi) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(p)\}$ et déterminer une description analogue de $E_1(\varphi)$.

Solution (Ex.20 – Un endomorphisme sur les endomorphismes)

1. $p \circ u \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi(\lambda u + v) = p \circ (\lambda u + v) = \lambda p \circ u + p \circ v = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$.
2. $\varphi^2(u) = p \circ p \circ u = p^2 \circ u = p \circ u = \varphi(u) : \varphi$ est aussi un projecteur. Il est donc diagonalisable, de spectre $\{0; 1\}$.
3.
 - $u \in E_0(\varphi) \iff p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(p)$.
 - $u \in E_1(\varphi) \iff p \circ u = u \iff \text{Im}(u) \subset \text{Im}(p)$.

En effet, l'implication est évidente et si $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(p)$, alors pour tout $x \in E$, $p(u(x)) = u(x)$ car $\text{Im}(p) = E_1(p)$ pour un projecteur.

Exercice 21 Transposition et symétrie

Soit $n \geq 2$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(M) = M^T - M$.

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de f .
3. Déterminer le polynôme caractéristique de f .

Solution (Ex.21 – Transposition et symétrie)

1. $f^2(M) = (M^T - M)^T - (M^T - M) = 2M - 2M^T = -2f(M)$ donc $f^2 = -2f$.
2. $X^2 + 2X = X(X + 2)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de f donc f est diagonalisable.
3. $\text{Sp}(f) \subset \{-2, 0\}$,
 $f(M) = 0 \iff M^T = M \iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $0 \in \text{Sp}(f)$ et $E_0 = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
 $f(M) = -2M \iff M^T = -M \iff M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc $-2 \in \text{Sp}(f)$ et $E_{-2} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Comme f est diagonalisable,

$$\begin{aligned}\omega(0) &= \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \omega(-2) &= \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}, \\ \chi_f &= X^{n(n+1)/2}(X+2)^{n(n-1)/2}.\end{aligned}$$

Exercice 22 Polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 3I_5 = 0_5$ et $\text{Tr}(A) = 9$.
Déterminer χ_A .

Solution (Ex.22 – Polynôme annulateur)

$X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples A donc A est diagonalisable, avec $\text{Sp}(A) \subset \{1, 3\}$.

On a alors $\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda \times \omega(\lambda) = 9$, la seule possibilité étant $\omega(3) = 2$ et $\omega(1) = 3$ puisque $\omega(1) + \omega(3) = 5$.
Donc $\chi_A = (X-1)^3(X-3)^2$.

Exercice 23 Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe le polynôme $f(P)$ défini par

$$f(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. On considère la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par $P_k(X) = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$.
Calculer, pour tout k de $[[0; n]]$, $f(P_k)$.
3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f .
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution (Ex.23 – Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$)

1. La linéarité ne pose aucun souci
On a $\deg(f(P)) \leq n+1$ et en notant a_n le coefficient de X^n dans P , le coefficient de X^{n+1} de $f(P)$ est $na_n - na_n = 0$, donc $\deg(f(P)) \leq n$ et $f(P) \in E$.
2. $\forall k \in [[0; n]]$,
 $f(P_k) = (X^2 - 1)^2[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k} + (n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}] - (nX + 1)(X-1)^k(X+1)^{n-k}$
 $f(P_k) = (X-1)^k(X+1)^{n-k}[k(X+1) + (n-k)(X-1) - nX - 1]$

$$f(P_k) = (2k - n - 1)P_k$$

3. Le calcul précédent fournit $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc f est diagonalisable avec $\text{Sp}(f) = \{2k - n - 1, k \in [[0; n]]\}$ et $n+1$ sous-espaces propres de dimension 1, précisément, pour tout $k \in [[0; n]]$, $E_{2k-n-1} = \text{Vect}(P_k)$.

Exercice 24 Valeur propre de plus grand module

Soit $n \geq 2$. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M est diagonalisable avec $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et : $\forall k \in [[1; n-1]]$, $|\lambda_k| < \lambda_n$.

Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\text{Tr}(M^{p+1})}{\text{Tr}(M^p)} = \lambda_n$.

Solution (Ex.24 – Valeur propre de plus grand module)

En écrivant $D = \text{diag}(\lambda_i)$ et $M = PDP^{-1}$, on a

$$\text{Tr}(M^p) = \text{Tr}(D^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p = \lambda_n^p \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^p + \dots + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right)^p + 1 \right)$$

or $\forall i \in [[1; n-1]]$, $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_n} \right| < 1$, donc $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n} \right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$

et $\text{Tr}(M^p) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_n^p$, d'où la limite annoncée.

Exercice 25 Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E, M \longmapsto M - \text{Tr}(M)I_n$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. Soit $P = X^2 + (n-2)X + 1 - n$. Calculer $P(\varphi)$.
3. Justifier que φ est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant φ dans une base idoine.
4. En déduire $\text{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Solution (Ex.25 – Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. Aucun souci grâce à la linéarité de la trace.
2. Pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
 $\varphi^2(M) = \varphi(M) - \text{Tr}(\varphi(M))\varphi(I_n) = M - \text{Tr}(M)I_n - \text{Tr}(M)(1-n)I_n = M + (n-2)\text{Tr}(M)I_n$.
 $P(\varphi)(M) = M + (n-2)\text{Tr}(M)I_n + (n-2)M - (n-2)\text{Tr}(M)I_n + (1-n)M$, i.e.
 $P(\varphi)(M) = 0_n$.
Donc $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

3. $P = (X - (1 - n))(X - 1)$ est un polynôme annulateur de φ scindé à racines simples donc φ est diagonalisable avec $\text{Sp}(\varphi) \subset \{1 - n, 1\}$.

$\varphi(M) = M \iff \text{Tr}(M) = 0 \iff M \in \ker(\text{Tr})$ donc $1 \in \text{Sp}(M)$ et $\dim(E_1) = \dim(\ker(\text{Tr})) = n^2 - 1$ par la formule du rang appliquée à $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme φ est diagonalisable et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, cela suffit pour affirmer que $1 - n \in \text{Sp}(\varphi)$ et $\dim(E_{1-n}) = 1$.

Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la supplémentarité $E_1 \oplus E_{1-n} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n^2-1 \text{ fois}}, 1 - n).$$

4. $\text{Tr}(\varphi) = n^2 - 1 + 1 - n = n^2 - n$ et $\det(\varphi) = 1 - n$.

Exercice 26 Puissances n -èmes et trigonalisation

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \\ -12 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer χ_M et étudier si M est diagonalisable.
- a) M est-elle trigonalisable?
b) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les de la première ligne valent 1 et telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle T cette matrice.

3. a) Justifier l'existence de trois matrices A , B et C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = A + (-1)^n B + nC.$$

- b) Déterminer A , B et C en fonction I_3 , M et M^2 .

Solution (Ex.26 – Puissances n -èmes et trigonalisation)

1. $\chi_M = X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2 \cdot (X + 1)$

$$\text{mais } \dim E_1 = 3 - \text{rg}(M - I_3) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -8 & -2 & -4 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix} = 1$$

2. a) M est trigonalisable car χ_M est scindé.

$$\text{b) } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{3. a) Récurrence ou Newton : } {}^q qn \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' + (-1)^n B' +$$

$C'n$ avec A', B', C' adéquates.

Alors $M^n = PD^nP^{-1} = A + (-1)^n B + Cn$ où $A = PA'P^{-1}$ etc.

- b) On peut calculer A, B, C à l'aide de P^{-1} .

On peut aussi remarquer :

$$n = 0 \implies A + B = I_3,$$

$$n = 1 \implies A - B + C = M,$$

$$n = 2 \implies A + B + 2C = M^2.$$

$$\text{D'où : } C = \frac{1}{2}(M^2 - I_3), \text{ etc...}$$

Exercice 27 Trigonalisation et suites imbriquées

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que A et B sont semblables, et expliciter une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 0 » et des « 1 » telle que $B = P^{-1}AP$.
- Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 1. \end{cases}$$

Solution (Ex.27 – Trigonalisation et suites imbriquées)

1. $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable.

$$E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et la résolution de } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{donne, avec } (x, y, z) \in \{0, 1\}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

2. Déterminer toutes les suites x , y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$

$$\text{Posons pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Le système imposé équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

$$\text{Or : } X_{n+1} = AX_n \iff X_{n+1} = PBP^{-1}X_n \iff P^{-1}X_{n+1} = BX_n.$$

$$\text{Posons } Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}. \text{ Alors : } \forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = BY_n. \text{ Ainsi :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = 2b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2c_n \end{cases}$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0, c_n = 2^n c_0$ et $b_{n+1} = 2b_n + 2^n c_0$

On remarque que $b_1 = 2b_0 + c_0$,

$$b_2 = 2(2b_0 + c_0) + 2c_0 = 4b_0 + 6c_0 = 2(2b_0 + 2c_0),$$

$$b_3 = 2(4b_0 + 6c_0) + 4c_0 = 4(2b_0 + 3c_0) \dots$$

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2^{n-1}(2b_0 + nc_0)$.

- Cette propriété est vraie au rang 0 : $b_0 = b_0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $b_n = 2^{n-1}(2b_0 + nc_0)$. Alors :

$b_{n+1} = 2b_n + 2^n c_0 = 2^n(2b_0 + nc_0) + 2^n c_0 = 2^n(2b_0 + (n+1)c_0)$. La propriété est héréditaire.

- Par récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2^{n-1}(2b_0 + nc_0)$.

$$\text{Enfin : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = X_n = PY_n = \begin{pmatrix} b_n + c_n \\ a_n + b_n + c_n \\ a_0 + c_n \end{pmatrix}.$$

Si l'on souhaite expliciter a_0 , b_0 et c_0 , il suffit de résoudre :

$$Y_0 = P^{-1}X_0 \iff \begin{cases} a_0 = -x_0 + y_0 \\ b_0 = y_0 - z_0 \\ c_0 = x_0 - y_0 + z_0 \end{cases}$$