

Exercice 1 Étude d'une fonction définie par une intégrale à paramètre
on pose pour tout $x \in [0; +\infty[$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}.$$

- Continuité** - Justifier que f est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
- Variation sans dérivation** - Montrer que f est décroissante strictement.
- Dérivabilité** - Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et retrouver ses variations.
- Limite** - Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 2 Un calcul de l'intégrale de Dirichlet

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie sous réserve d'existence par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt.$$

- Justifier que f est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
- Déterminer sa limite en $+\infty$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et calculer f'' .
- En déduire f sur $]0; +\infty[$, puis $f(0)$.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet : $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Solution (Ex.2 – Un calcul de l'intégrale de Dirichlet)

- Soit $g : [0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ et $h :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$.
 - Pour $x \in [0; +\infty[$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.
 - Pour $t \in]0; +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0; +\infty[$.
 - $\forall (x, t) \in [0; +\infty[\times]0; +\infty[$, $|g(x, t)| \leq h(t)$,
où h est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, avec
 - $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{1}{2}$ car $1 - \cos t \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2}$, donc $\int_0^1 h(t) dt$ converge (faussetment impropre),
 - $\forall t \geq 1, 0 \leq h(t) \leq \frac{2}{t^2}$ donc $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ converge,
donc h est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$.
Ainsi, f est définie et continue sur $[0; +\infty[$.
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$, il existe T tel que $\forall t \geq T, h(t) \leq 1$.

Comme h est continue sur $]0; T]$ et est prolongeable en une fonction continue sur $[0; T]$, h est majorée sur $[0; T]$.

Donc h est majorée sur $]0; +\infty[$.

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0; +\infty[, 0 \leq h(t) \leq M$.

$\forall x \in [0; +\infty[, \forall t \in]0; +\infty[, 0 \leq g(x, t) \leq M e^{-xt}$.

Par croissance de l'intégrale, $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x}$.

Par encadrement, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- Pour $t \in]0; +\infty[, x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$.

Regardons les dérivées par rapport à x de g :

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{\cos t - 1}{t} e^{-xt} \right| = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \stackrel{\text{déf.}}{=} h_1(t)$$

h_1 est prolongeable par continuité en 0 (limite nulle) et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc continue et intégrable sur $]0; +\infty[$.

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = (1 - \cos t) e^{-xt} \leq 2e^{-xt}$$

Plaçons-nous sur $[a; +\infty[\subset]0; +\infty[$ afin de majorer par une quantité indépendante de x .

$$\forall x \in [a; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = (1 - \cos t) e^{-xt} \leq 2e^{-at}$$

et $h_2 : t \mapsto 2e^{-at}$ est intégrable d'après le cours car $a > 0$.

Par le théorème de dérivation, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a; +\infty[\subset]0; +\infty[$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et f'' se calcule par dérivation sous l'intégrale.

Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt} dt = \frac{1}{x} -$$

$$\mathcal{R}e \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \mathcal{R}e \left(\frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

- Pour $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} k.$$

Or on démontre comme en 2. que f' tend vers 0 en $+\infty$. Donc $k = 0$ et

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

En primitivant à nouveau grâce à des intégrations par parties,

$$f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) + x - \text{Arctan}(x) + \kappa$$

$$f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan}(x) + \kappa$$

Déterminons κ grâce à la limite en $+\infty$:

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2) + \ln(1 + 1/x^2) = 2\ln(x) + 1/x^2 + o(1/x^2)$$

$$\text{D'où : } f(x) = -\frac{1}{2x} + o(1/x) - \text{Arctan}(x) + \kappa \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + \kappa$$

$$\text{Or d'après 2., } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \kappa = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Finalement : } f(x) = x \ln x - \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Comme } f \text{ est continue en } 0, f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \text{ donc}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 Explicitation grâce à une équation différentielle

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de définition, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. On admet que l'intégrale de Gauß $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ vaut $\sqrt{\pi}$. Déterminer une expression explicite (i.e. sans intégrale) de f .

Solution (Ex.3 – Explicitation grâce à une équation différentielle)

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t^2}$. φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par parité et car $\varphi(t) = o(e^{-t})$ en $+\infty$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

① Pour $t \in \mathbb{R}, x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

② Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue et dominée par φ .

③ Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t \sin(xt) e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

④ $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |t| \varphi(t)$ or $t \mapsto |t| \varphi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, paire et vérifiant $|t| \varphi(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$.

En observant que $\frac{de^{-t^2}}{dt} = -2te^{-t^2}$, une intégration par parties s'impose.

$u : t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{2}$ et $v : t \mapsto \sin(xt)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = 0$ car $|u(t)v(t)| \leq u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{x}{2} f(x)$. f est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $y' + \frac{x}{2} y = 0$.

3. Les solutions de cette équation homogène sont les fonction $x \mapsto K e^{-x^2/4}$ avec $K \in \mathbb{R}$ arbitraire.

L'énoncé donne la condition initiale $f(0) = \sqrt{\pi}$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$.

Exercice 4 Recherche d'un équivalent

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs de limite $+\infty$.
Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n f(x_n) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Solution (Ex.4 – Recherche d'un équivalent)

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Soit $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{e^{-2t}}{x+t}$.

L'énoncé peut laisser penser qu'on va rencontrer une difficulté en 0. Soit $a > 0$.
Plaçons-nous sur $[a; +\infty[$.

① Pour $t \in]0; +\infty[, x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[a; +\infty[$.

② Pour $x \in [a; +\infty[, t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$.

③ $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; +\infty[, |g(x, t)| \leq \frac{e^{-2t}}{a}$ or $t \mapsto e^{-2t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par le théorème de continuité, f est définie et continue sur $[a; +\infty[$.

Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, f est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

2. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs de limite $+\infty$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x_n g(x_n, t) = \frac{x_n e^{-2t}}{x_n + t}$.

Appliquons le théorème de convergence dominée.

- ① Pour tout $t \in]0; +\infty[$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-2t}$ car $\frac{x_n}{x_n + t} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.
- ② $t \mapsto e^{-2t}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
- ③ $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[$, $|f_n(t)| \leq e^{-2t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ est une fonction intégrable de référence sur $]0; +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, pour toute n f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}.$$

3. Pour toute suite (x_n) de limite $+\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n f(x_n) = \frac{1}{2}$. Par caractérisation séquentielle de la limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \frac{1}{2}$.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Exercice 5 Calcul d'une intégrale à deux paramètres

1. Soit $0 < \alpha \leq \beta$. Montrer que $I(\alpha, \beta) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ existe.
2. Dans cette question, on se propose de calculer $I(\alpha, \beta)$ à l'aide d'une fonction définie par une intégrale.
On pose, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) = I(1, x)$.
a) Montrer que f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $[1; +\infty[$.
b) En déduire une expression explicite de f , puis de $I(\alpha, \beta)$.

Solution (Ex.5 – Calcul d'une intégrale à deux paramètres)

1. Soit $0 < \alpha \leq \beta$.
• $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
• Au voisinage de 0, $\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} = \frac{1 - \alpha t + o(t) - 1 + \beta t - o(t)}{t} = \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \beta - \alpha$ donc $I(\alpha, \beta)$ est faussement impropre donc convergente en 0.

- $t^2 \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} = o(1/t^2)$ donc $I(\alpha, \beta)$ converge en $+\infty$ par domination.

Donc pour $0 < \alpha \leq \beta$, $I(\alpha, \beta) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ existe.

2. On pose, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) = I(1, x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

a) Soit $g : [1; +\infty[\times]0; +\infty[, (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$.

C'est parti pour la dérivation $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale...

- ① Pour $t \in]0; +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$.
- ② Pour $x \in [1; +\infty[$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue intégrable sur $]0; +\infty[$ par la première question (c'est $I(x, 1)$).
- ③ Pour $x \in [1; +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x} g(x, t) = e^{-xt}$ est continue (et même déjà intégrable).
- ④ $\forall (x, t) \in [1; +\infty[\times]0; +\infty[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x} g(x, t) \right| \leq e^{-t}$ avec $t \mapsto e^{-t}$ intégrable.

Par le théorème de dérivation, f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et : $\forall x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

- b) En primitivant, et en observant que $f(1) = 0$, on a : $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) = \ln(x)$.
Soit $0 < \alpha \leq \beta$. Posons $u = \alpha t$, changement $\mathcal{C}^1$ strictement monotone dans $I(\alpha, \beta)$.
$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt \stackrel{u=\alpha t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\beta u/\alpha}}{u} du = f(\beta/\alpha) = \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \beta - \ln \alpha.$$

Exercice 6 Étude d'une fonction

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

1. Montrer que f est définie, paire et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$. À l'aide du changement de variable $u = xt$, déterminer un équivalent de f en $\pm\infty$.

Solution (Ex.6 – Étude d'une fonction)

1. $g(x, t) = \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[$.

Commençons par remarquer que, si $f(x)$ existe, alors $f(-x)$ existe et vaut $f(x)$: f est paire sur son domaine de définition qui est forcément symétrique par rapport à 0.

- À t fixé, $x \mapsto g(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- À x fixé, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$, et intégrable car prolongeable par continuité en 0 ($g(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} x^2$) - d'où intégrale faussement impropre en 0 -, et $g(x, t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$.

- À x fixé, $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
- Grâce à la majoration usuelle : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$, on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right| \leq |x| e^{-t}.$$

Plaçons nous sur $[-a; a]$ avec $a > 0$ quelconque. Alors :

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right| \leq a e^{-t}.$$

Or $t \mapsto a e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0; +\infty[$. Donc f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $[-a; a]$, ceci pour tout $a > 0$.

Donc f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Le changement $u = xt$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif tant que $x \neq 0$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt \stackrel{u=xt}{=} x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-u/x} du$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de $[1; +\infty[$ tendant vers $+\infty$.

Soit, pour tout n , $h_n : t \mapsto \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-u/x_n}$. On a :

- pour tout n , h_n continue sur $]0; +\infty[$,
- $h_n \xrightarrow{CVS} h : u \mapsto \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$,
- De l'inégalité classique : $\forall u \in \mathbb{R}, |1 - \cos u| \leq u^2$, on tire :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in]0; +\infty[, |h_n(u)| \leq e^{-u}$ (car $x_n \geq 1$)
 avec $u \mapsto e^{-u}$ continue et intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(u) du = \int_0^{+\infty} h(u) du$,

$$\text{i.e. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} f(x_n) = \frac{\pi}{2}.$$

Par caractérisation séquentielle de la limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Autrement dit : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} x$. Et par parité, $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2} x$.

Exercice 7 Une famille d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; +\infty[$, soit $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}$.

1. Montrer que I_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^3}$.

Solution (Ex.7 – Une famille d'intégrales)

1. Soit deux réels a et A tels que $0 < a < A$.

Soit $f_n : [a; A] \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{1}{(t^2 + x^2)^n}$.

- Pour $t \in [0; +\infty[$, $x \mapsto f_n(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a; A]$.
- Pour $x \in [a; A]$, $t \mapsto f_n(x, t)$ est continue et intégrable sur $[0; +\infty[$ car $f_n(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ où $2n > 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est intégrable et ces deux fonctions sont positives.

- Pour $x \in [a; A]$, $t \mapsto \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(t^2 + x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

- $\forall (x, t) \in [a; A] \times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2nA}{(t^2 + a^2)^{n+1}}$,

or $\varphi : t \mapsto \frac{2nA}{(t^2 + a^2)^{n+1}} = 2nA f_{n+1}(a, t)$ est continue et intégrable sur $[0; +\infty[$ d'après le second point.

Donc I_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; A]$, et ceci pour tout $[a; A] \subset]0; +\infty[$, donc I_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[, I'_n(x) = -2nx I_{n+1}(x)$.

Pour $x > 0$, $I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \left[\frac{1}{x} \text{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$.

Puis $I_2(x) = -\frac{1}{2x} I'_1(x) = \frac{\pi}{4x^3}$, puis $I_3(x) = -\frac{1}{4x} I'_2(x) = \frac{3\pi}{16x^5}$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^3} = I_3(1) = \frac{3\pi}{16}$.

Exercice 8 Étude d'une fonction

Soit, sous réserve d'existence, $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

1. Montrer que f est définie sur $] -1; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.

3. Montrer que $h :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout $x > -1$.

Solution (Ex.8 – Étude d'une fonction)

1. Soit $g :]-1; +\infty[\times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$.
 Soit $x \in]-1; +\infty[$. $t \mapsto g(x, t)$ est continue et positive sur $]0; 1[$.
 De plus, $g(x, t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1$ donc l'intégrale définissant $f(x)$ est faussment impropre donc convergente en 1.
 Enfin, $g(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t^x}{\ln t}$ donc $g(x, t) = o(t^x)$ en 0, donc $g(x, t) = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right)$, or $-x < 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$ est intégrable sur $]0; 1/2]$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1/2]$.
 Ceci assure l'existence de $f(x)$.
2. • Pour $t \in]0; 1[, x \mapsto g(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.
 • Pour $x > -1, t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1[$ (d'après 1)).
 • Pour $x > -1, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x$ est continue.
 • $\left[t \mapsto \frac{1}{t} \text{ n'étant pas intégrable sur }]0; 1[, \text{ on va devoir éviter } -1!!!\right]$
 Soit a tel que $-1 < a < 0$.
 $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; 1[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = (1-t)t^x \leq t^x \leq t^a$
 (car $t \in]0; 1[\implies \ln(t) < 0 \implies a \ln(t) \geq x \ln(t) \implies t^a \geq t^x$)
 or $\varphi : t \mapsto t^a = \frac{1}{t^{-a}}$ est intégrable sur $]0; 1[$ (car $a > -1$ donc $-a < 1$).
 Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$, et ceci pour tout $a \in]-1; 0[$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.
3. h est continue sur $]0; 1[$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
 De plus : $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 1$, donc h est prolongeable en fonction continue sur le segment $[0; 1]$, donc h est bornée sur $]0; 1[$.
 Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0; 1[, |h(t)| \leq M$.
 Alors : $\forall x > -1, \forall t \in]0; 1[, |f(x)| = \left| \int_0^1 h(t) t^x dt \right| \leq \int_0^1 |M t^x| dt \leq \frac{M}{x+1}$.
 Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
4. On a par dérivation sous l'intégrable :

$$\forall x > -1, f'(x) = \int_0^1 t^{x+1} - t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Donc : } \exists K \in \mathbb{R}, \forall x > -1, f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + K$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x+1} = 0 \text{ donc } K = 0.$$

$$\text{Ainsi : } \forall x > -1, f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}.$$