Table des matières

1 Nombres réels et complexes

1.1 Majorant et minorant d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}$.

$\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ est un majorant de P si $\forall x \in \mathrm{P}, x \leq \mathrm{M}$.

$m \in \mathbb{R}$ est un minorant de P si $\forall x \in \mathrm{P}, m \leq x$.

1.2 Maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}$.

(i) $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ est le maximum de P si $\mathrm{M} \in \mathrm{P}$ et $\forall x \in \mathrm{P}, x \leq \mathrm{M}$. On note alors $\mathrm{M} = \max(\mathrm{P})$.

(ii) $m \in \mathbb{R}$ est le minimum de P si $m \in \mathrm{P}$ et $\forall x \in \mathrm{P}, m \leq x$. On note alors $m = \min(\mathrm{P})$.

☞ Toute partie même non vide de P n'admet pas nécessairement un maximum et/ou un minimum.

1.3 Borne supérieure et borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$

(i) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée sup(P) : c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{P}) \iff \forall x < \mathrm{M},\ \exists y \in \mathrm{P},\ x < y \leq \mathrm{M}$. (ii) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée sup(P) : c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{P}) \iff \forall x < \mathrm{M},\ \exists y \in \mathrm{P},\ x < y \leq \mathrm{M}$.

1.4 Partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est définie par :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et } quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

1.5 Segments et intervalles de $\mathbb{R}$

(i) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Le *segment* $[\,a\,;\ b]$ est défini par

$$[\,a\,;\ b] \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}.$$

(ii) Une partie P de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (a, b) \in \mathrm{P} \textit{ avec } a \leq b, \quad [\,a\,;\ b] \subset \mathrm{P}.$$

1.6 **Inégalité triangulaire**

$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \quad \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \leq |x|+|y|.$

1.7 **Formulaire dans $\mathbb{C}$**

① $\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

② $\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = e^{\mathcal{R}e(z)} e^{i\mathcal{I}m(z)}$

③ $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 = z\overline{z}$ et $|e^z| = e^{re(z)}$

④ Euler : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

⑤ De Moivre : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos(t)+i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$

⑥ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n = 1 \iff \exists! k \in [\![0\,;\ n-1]\!],\ z = \omega_k \overset{\text{déf.}}{=} \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$

⑦ $\mathbb{U}_n = \{\omega_k | k \in [\![0\,;\ k-1]\!]\}$ et $\forall n \geq 1, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$

1.8 **Formulaire trigonométrique**

① $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

② $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1,\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

③ $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

$\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$

$\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$

④ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)},\ \tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

⑤ $a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi)$ où $\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

1.9 **Équation du second degré à coefficients réels**

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $\quad ax^2 + bx + c = 0.$

Soit $\Delta \overset{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac.$

① Si $\Delta > 0$, alors $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, racines réelles distinctes.

② Si $\Delta = 0$, alors $x = \dfrac{-b}{2a}$, racine réelle double.

③ Si $\Delta < 0$, alors $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, racines complexes conjuguées.

1.10 **Équation du second degré à coefficients complexes**

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $\quad az^2 + bz + c = 0.$

Soit $\Delta \overset{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac$ et δ tel que $\delta^2 = \Delta$

① Si $\Delta \neq 0$ alors $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, racines distinctes.

② Si $\Delta = 0$, alors $z = \dfrac{-b}{2a}$, racine double.

1.11 **Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit**

$$\begin{cases} a+b = \mathrm{S} \\ ab = \mathrm{P} \end{cases} \iff \begin{cases} a \text{ et } b \text{ sont les solutions de} \\ z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0. \end{cases}$$

1.12 **Coefficients binomiaux, formule du binôme**

① $\dbinom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments distincts parmi n sans tenir compte de l'ordre. C'est aussi le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à $n$éléments.

② $\dbinom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$

③ $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$, relation de Pascal : $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$

④ Formule du binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, \quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

2 Suites et sommes de référence

2.1 **Suites arithmétiques**

① La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est *arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall n \geq n_0, \qquad u_{n+1} - u_n = r.$$

On notera que la raison r est indépendante de l'indice n.

② Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

- $\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r\,;$
- $\forall n \geq n_0, \quad \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \frac{(n-n_0+1)(u_{n_0}+u_n)}{2},$

alias : $\dfrac{(\textit{nombre de termes}) \times (\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2}$

2.2 **Suites géométriques**

① La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,
$$\forall n \geq n_0, \qquad u_{n+1} = q u_n.$$
On notera que la raison q est indépendante de l'indice n.

② Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.
- $\forall n \geq n_0, \quad u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}$;
- $\forall n \geq n_0, \quad \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \begin{cases} u_{n_0} \dfrac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} \text{si } q \neq 1 \\ (n-n_0+1)u_{n_0} \text{si } q = 1 \end{cases}$

alias : $(premier\ terme) \times \dfrac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$
- Si $u_{n_0} \neq 0$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} sign(u_{n_0}) \times (\infty) & \text{si } q > 1 \\ u_{n_0} & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ n'existe\ pas & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3 Suites arithmético-géométriques

① La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *arithmético-géométrique* si, et seulement si,
$$\exists a \neq 1, \exists b \neq 0, \forall n \geq n_0, \qquad u_{n+1} = a u_n + b \qquad (\mathcal{R})$$
On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n.

② Comme $a \neq 1$, il existe un unique réel ℓ tel que $(\mathcal{E})$: $\qquad \ell = a\ell + b.$
$(\mathcal{R}) - (\mathcal{E})$ donne : $\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell).$
La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a, de premier terme $u_{n_0} - \ell$, et on a :
$$\forall n \geq n_0, \qquad u_n = a^{n-n_0}(u_{n_0} - \ell) + \ell.$$

③ Deux interprétations pour ℓ. D'une part, la suite $(\ell)_{n\geq n_0}$ est l'unique suite constante vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$. D'autre part (lorsque $u_{n_0} \neq \ell$), la suite u converge si, et seulement si, $a \in]-1\,;\ 1[$. Et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

① La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2* si, et seulement si,
$$\exists a \in \mathbb{K}, \exists b \in \mathbb{K}^*, \forall n \geq n_0, \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \qquad (\mathcal{R}).$$
On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n.

② **Théorème dans** $\mathbb{R}$, *i.e.* quand $(a, b, u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathbb{R}^4$.
Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:
$$(\mathcal{E}) \qquad x^2 - ax - b = 0.$$
- *Premier cas :* $(\mathcal{E})$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$
- *Deuxième cas :* $(\mathcal{E})$ possède une unique racine réelle r.

Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = (\alpha + \beta n) r^n.$
- *Troisième cas :* $(\mathcal{E})$ ne possède pas de racine réelle mais deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.

Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) r^n.$

③ **Théorème dans** $\mathbb{C}$, *i.e.* quand $(a, b, u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathbb{C}^4$.
Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:
$$(\mathcal{E}) \qquad x^2 - ax - b = 0.$$
- *Premier cas :* $(\mathcal{E})$ possède deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.

Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$
- *Deuxième cas :* $(\mathcal{E})$ possède une unique racine complexe r.

Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = (\alpha + \beta n) r^n.$

2.5 Sommes finies de référence

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; ② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; ③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

④ $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\leq i,j\leq n, i\neq j} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$

2.6 Gestion des sommes doubles

Cas d'indices indépendants
$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{1\leq i\leq m, 1,\leq j\leq n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{i,j}\right)$$
Cas d'indices dépendants
$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i} u_{i,j}\right) = \sum_{1\leq j\leq i\leq m} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m} u_{i,j}\right)$$

3 Théorèmes de première année sur les suites

3.1 Suite bornée, minorée, majorée

Notez que dans les définitions suivantes, les réels B, m *et* M *sont indépendants de l'indice (muet)* n *et ne dépendent que de la suite* u *considérée.*

① La suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* si, et seulement si,
$$\exists \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \mathrm{B}.$$
② La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *minorée* si, et seulement si,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n.$$
③ La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *majorée* si, et seulement si,
$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \mathrm{M}.$$
④ La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

3.2 Définition de la convergence d'une suite

La suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

3.3 Corollaire immédiat pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

À savoir justifier.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ si, et seulement si,}$$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ tq\ a < \ell < b, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad a < u_n < b.$$

3.4 Unicité de la limite

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

3.5 Limites infinies

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si, et seulement si,

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n \geq \mathrm{M}.$$

On écrit alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si, et seulement si,

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n \leq \mathrm{M}.$$

On écrit alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

3.6 Théorème de convergence monotone

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **croissante**.

u est convergente si, et seulement si, u est majorée.

u diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, u n'est pas majorée.

On notera que, pour une suite u croissante, « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ » a toujours un sens.

3.7 Suites extraites

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

① Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application **strictement croissante**.

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est appelée *suite extraite* de la suite u. La fonction φ est appelée *fonction extractrice*.

② Les exemples les plus fréquents de suites extraites de u sont les suites (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

③ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

④ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, les deux suites extraites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.

On utilise fréquemment ④ ou ③ pour **justifier qu'une suite diverge**.

3.8 Théorème des suites adjacentes

• Deux suites u et v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* si

① l'une croît,

② l'autre décroît,

③ la suite $v - u$ converge vers 0.

• Si les suites u et v sont adjacentes, alors elles sont convergentes, vers une même limite.

De plus, si u croît, v décroît et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_m \leq \ell \leq v_n.$$

3.9 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$, *i.e.* a est un point de I ou une borne de I, éventuellement égale à $-\infty$ ou $+\infty$.

Alors f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $u \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ de limite a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.

4 Théorèmes d'analyse de première année

4.1 Théorème de Rolle

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors : $\exists c \in]\,a\,;\ b[, \quad f'(c) = 0$.

4.2 Théorème des accroissements finis

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

Alors : $\exists c \in]\,a\,;\ b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4.3 Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{R}$

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

① **On suppose qu'il existe $(m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$** tels que : $\forall x \in]\,a\,;\ b[\,, m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$.
Alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.

② **On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$** tels que : $\forall x \in]\,a\,;\ b[\,, |f'(x)| \leq \mathrm{M}$.
Alors : $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}\,|b-a|$.

4.4 Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{C}$

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in]\,a\,;\ b[\,, |f'(x)| \leq \mathrm{M}$.

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}\,|b-a|$.

4.5 Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Si $f'(x)$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a, alors $\dfrac{f(x)-f(x)}{x-a}$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

En particulier, si ℓ est finie, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

4.6 **Théorème fondamental de l'analyse**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en a.

4.7 **Formule de Taylor avec reste intégral**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

4.8 **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On **suppose qu'il exsite** une constante M telle que $\forall x \in \mathrm{I}, \left|f^{(n+1)}\right| \leqslant \mathrm{M}$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{I}, \left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) + - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}.\left|x-a\right|^{n+1}}{(n+1)!}$$

4.9 **Formule de Taylor-Young**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

$$\forall h \ tq \ a+h \in \mathrm{I},\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o\big(h^n\big)$$

4.10 **Sommes de Riemann**

Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$. Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$.

$$\text{Soit} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{n=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } \mathrm{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{n=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Si f est continue sur $[\,a\,;\ b]$, alors :

$$s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

4.11 **Convexité**

① f est convexe sur I si
$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \forall \lambda \in [\,0\,;\ 1\,], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

② Si f est convexe, alors $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

③ Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$.

5 Équations différentielles

1. Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1

Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues.

$$(\mathcal{E})\ y' + a(t)y = b(t),$$
$$(\mathcal{E}_0)\ y' + a(t)y = 0.$$

Résolution de l'équation homogène

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_l)$ est

$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto k\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}, k \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}\big)$$

où A désigne une primitive de a sur I.

☞ Si on ne sait pas expliciter A (i.e primitiver a), on peut écrire en vertu du théorème fondamental de l'analyse

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ t \mapsto k \exp\left(-\int_{t_0}^t a(t)\mathrm{d}u\right), k \in \mathbb{K} \right\}$$

2. Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition

Soit $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathrm{E} = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E})\}.$$

3. Recherche d'une solution particulière par la méthode de la « variation de la constante »

On cherche une solution $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ de la forme

$$z(t) = k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}.$$

☞ Si on ne se trompe, les « $k(t)$ » se simplifient et on doit obtenir

$$k'(t) = b(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\mathrm{d}u\right)$$

Il reste à primitiver pour obtenir une solution.

4. Théorème de Cauchy linéaire

Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in \mathrm{I}$, $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

5. Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continue.

$$(\mathcal{E})\ y'' + ay' + by = c(t),$$

$$(\mathcal{E}_0)\ y'' + ay' + by = 0.$$

L'équation caractéristique associé à $(\mathcal{E}_0)$ est

$$(\mathcal{EC})\ z^2 + az + b = 0.$$

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Résolution dans $\mathbb{C}$

• Si $\Delta \neq 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto e^{\lambda_1 t}, t \mapsto e^{\lambda_2 t}\big).\end{aligned}$$

• Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto t e^{\lambda t}\big).\end{aligned}$$

Résolution dans $\mathbb{R}$

• Si $\Delta > 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto e^{\lambda_1 t}, t \mapsto e^{\lambda_2 t}\big).\end{aligned}$$

• Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto t e^{\lambda t}\big).\end{aligned}$$

• Si $\Delta < 0$, soit $\lambda = a \pm ib$ une solution de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0 &= \{t \mapsto (c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)) e^{at}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \cos(bt) e^{at}, t \mapsto \sin(bt) e^{at}\big).\end{aligned}$$

6. Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition

Soit $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathrm{E} = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E})\}.$$

7. Seconds membres particuliers

☞ **Second membre** $c : t \mapsto \mathrm{A}e^{\lambda t}$ avec $\mathrm{A} \in \mathbb{K}$.

• Si λ non racine de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto \mathrm{B}e^{\lambda t}$.

• Si λ racine simple de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto \mathrm{B}te^{\lambda t}$.

• Si λ racine double de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto t^2 e^{\lambda t}$.

☞ **Second membre** $c : t \mapsto \mathrm{A}\cos(\omega t)$ **ou** $c : t \mapsto \mathrm{A}\sin(\omega t)$

On suppose ni $i\omega$ ni $-i\omega$ solutions de $(\mathcal{EC})$.

Alors il existe (λ, μ) tel que $t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$ soit solution de $(\mathcal{E})$.

8. Théorème de Cauchy linéaire

Soit $a, b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in \mathrm{I}$, $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)\\ y(t_0) = y_0\\ y'(t_0) = y'_0\end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

6 Polynômes

6.1 Degré

① $\deg(0) = -\infty$

② $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \leqslant \max(\deg(\mathrm{P}), \deg(\mathrm{Q}))$ avec égalité si (mais pas seulement) $\deg(\mathrm{P}) \neq \deg(\mathrm{Q})$.

③ $\deg(\mathrm{PQ}) \leqslant \deg(\mathrm{P}) + \deg(\mathrm{Q})$

④ $\deg(\mathrm{P} \circ \mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P})\deg(\mathrm{Q})$ si Q non nul

6.2 Formule de Leibniz

$$(\mathrm{PQ})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{P}^{(k)}\mathrm{Q}^{(n-k)}$$

6.3 Division euclidienne

Soit A un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et B un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Alors il existe deux polynômes Q et R tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R} \quad \text{avec } \deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B}).$$

6.4 Formule de Taylor et translation

① $\displaystyle \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{\deg(\mathrm{P})} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k$

② $\displaystyle \mathrm{P}(\mathrm{X}+a) = \sum_{k=0}^{\deg(\mathrm{P})} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}\mathrm{X}^k$

6.5 Racines et multiplicité

Il y a équivalence entre

① a est une racine d'ordre de multiplicité $\mu \in \mathbb{N}^*$ de P

② $(\mathrm{X}-a)^{\mu}$ divise P et $(\mathrm{X}-a)^{\mu+1}$ ne divise pas P

③ $\begin{cases}\mathrm{P}(a) = 0\\ \mathrm{P}'(a) = 0\\ \vdots\\ \mathrm{P}^{(\mu-1)}(a) = 0\end{cases}$ et $\mathrm{P}^{(\mu)}(a) \neq 0$

6.6 Théorème de D'Alembert-Gauβ et conséquence

① Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ possède (au moins) une racine complexe.

② Tout polynôme de degré au plus n admettant strictement plus de n racines comptées avec leur multiplicité est nul.

6.7 Polynômes réels et racines complexes

① Si P est un polynôme à coefficients réels admettant une racine complexe α de multiplicité μ, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité μ.

② Les racines complexes d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées.

6.8 Polynômes irréductibles

① Le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

② Autrement dit, P non constant est irréductible si, et seulement si, $P = AB$ entraîne A ou B est constant.

6.9 Caractérisation des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

① Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du premier degré

$$P = aX + b = a\big(X - \frac{-b}{a}\big) \quad \text{avec } a \neq 0.$$

② Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré

$$P = aX + b = a\big(X - \frac{-b}{a}\big) \quad \text{avec } a \neq 0$$

et les polynômes du second degré sans racines réelles

$$P = aX^2 + bX + c \quad \text{avec } b^2 - 4ac < 0.$$

6.10 Liens coefficients-racines

① Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $d = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ un polynôme **scindé** de $\mathbb{K}[X]$ c'est-à-dire pouvant se décomposer en $P = a_d \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{\mu_i}$.

Alors $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu_i = -\frac{a_{d-1}}{a_d}$ et $\prod_{i=1}^{r} \alpha_i^{\mu_i} = (-1)^d \frac{a_0}{a_d}$.

② En particulier, les racines α et β du trinôme $X^2 - sX + p$ vérifient
$\alpha + \beta = s$ et $\alpha\beta = p$.

6.11 Décomposition des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$

① Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut se factoriser

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k}$$

où les α_k sont les racines de P, de multiplicité respective μ_k, λ est le coefficient dominant de P et $\sum_{k=1}^{r} \mu_k = \deg(P)$.

② Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut se factoriser

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k} \times \prod_{j=1}^{s} (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{\nu_k}$$

où les α_k sont les racines de P, de multiplicité respective μ_k, $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ pour tout j de $[\![1\,;\, s]\!]$, λ est le coefficient dominant de P et $\sum_{k=1}^{r} \mu_k + 2\sum_{j=1}^{s} \mu_j = \deg(P)$.

6.12 Cas de $X^n - 1$

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$$

où $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$ est l'ensemble des racines n-ièmes de 1.

6.13 Décomposition en éléments simples

① On appelle fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ le quotient de P par Q, défini en tout point où Q ne s'annule pas.

② Les pôles de F sont les racines du polynôme Q.

③ On dit que le pôle a de F est simple lorsque a est une racine simple de Q.

④ Si Q est scindé à racines simples (donc les pôles de F sont tous simples) s'écrit $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$, alors il existe un polynôme E et n scalaires $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ tels que

$$F = E + \frac{b_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{b_n}{X - a_n}$$

où E s'obtient par division euclidienne de P par Q et chaque b_k s'appelle le résidu de a_k.

⑤ Dans le cas précédent, on peut montrer que $b_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$.

⑥ On rencontre fréquemment

$$\frac{1}{X(X+a)} = \frac{1/a}{X} - \frac{1/a}{X+a}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{X^2 - a^2} = \frac{1/(2a)}{X-a} - \frac{1/(2a)}{X+a}$$

et notamment les cas $a = \pm 1$.

6.14 **Base de Lagrange, définition**

Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

On appelle *base de Lagrange* associée aux points $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de polynômes définie par

$$\forall i\in[\![0\,;\,n]\!],\quad \mathrm{L}_i=\frac{\displaystyle\prod_{0\leqslant k\leqslant n,k\neq i}(\mathrm{X}-a_k)}{\displaystyle\prod_{0\leqslant k\leqslant n,k\neq i}(a_i-a_k)}=\prod_{0\leqslant k\leqslant n,k\neq i}\frac{\mathrm{X}-a_k}{a_i-a_k}$$

6.15 **Base de Lagrange, propriétés**

① $\forall i\in[\![0\,;\,n]\!],\quad \deg(\mathrm{L}_i)=n.$

② $\forall (i,j)\in[\![0\,;\,n]\!]^2,\quad \mathrm{L}_i(a_j)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j,\\ 0 & \text{si } i\neq j.\end{cases}$

③ $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

④ Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{P}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}(a_i)\mathrm{L}_i$

⑤ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\mathrm{L}_i=1$, polynôme constant.

6.16 **Interpolation de Lagrange**

Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ et $(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $n+1$ points de $\mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme L de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall i\in[\![0\,;\,n]\!],\quad \mathrm{L}(a_i)=b_i,$$

c'est

$$\mathrm{L}=\sum_{i=0}^{n}b_i\mathrm{L}_i.$$

7 Déterminants

7.1 **Définition**

$\det(:)\,\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ est l'unique application φ vérifiant :

- φ linéaire par rapport à chaque colonne (donc n-linéaire)
- φ antisymétrique par rapport aux colonnes
- $\varphi(\mathrm{I}_n)=1$.

Pour $\mathrm{A}=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(()\,\mathrm{A})$ appelé déterminant de A se note

$$\det(\mathrm{A})=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

7.2 **Règles de calcul**

Soit $\mathrm{A}=\big(\mathrm{C}_1|\dots|\mathrm{C}_n\big)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

① Si une colonne de A est nulle, alors $\det(()\,\mathrm{A})=0$.

② La permutation de deux colonnes de A change $\det(()\,\mathrm{A})$ en $-\det(()\,\mathrm{A})$.

③ Si deux colonnes de A sont colinéaires, alors $\det(()\,\mathrm{A})=0$.

④ Si les colonnes de A forment une famille liée, alors $\det(()\,\mathrm{A})=0$.

⑤ La substitution $\mathrm{C}_j+\lambda\mathrm{C}_k\to\mathrm{C}_j$ (où $j\neq k$) ne modifie pas $\det(()\,\mathrm{A})$.

⑥ L'ajout à C_j d'une combinaison linéaire des autres colonnes de A ne modifie pas $\det(()\,\mathrm{A})$.

⑦ La substitution $\lambda\mathrm{C}_j\to\mathrm{C}_j$ multiplie $\det(()\,\mathrm{A})$ par λ.

⑧ $\det(()\,\mathrm{A}^{\mathrm{T}})=\det(()\,\mathrm{A})$, donc les **règles** précédentes sont **valables** en travaillant **sur les lignes comme sur les colonnes**.

⑨ La multiplication de A par λ multiplie $\det(()\,\mathrm{A})$ par λ^n.

7.3 **Mineurs, cofacteurs et comatrice**

- Mineur d'indice (i,j), $\mathrm{M}_{i,j}$ déterminant obtenu en supprimant i-ème et j-ème colonne ;
- Cofacteur de $a_{i,j}$: $\mathrm{A}_{i,j}\overset{\text{déf.}}{=}(-1)^{i+j}\mathrm{M}_{i,j}$.
- Comatrice de A : $com(\mathrm{A})\overset{\text{déf.}}{=}\big(\mathrm{A}_{i,j}\big)_{1\leq i,j\leq n}$.

Développement suivant la j-ème colonne, la i-ème ligne

$$\det(\mathrm{A})=\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}\mathrm{A}_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\mathrm{M}_{k,j},$$

$$\det(\mathrm{A})=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\mathrm{A}_{i,k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{i,k}\mathrm{M}_{i,k}.$$

7.4 **Matrices triangulaires, diagonales**

Leur déterminant est le produit de leurs coefficients diagonaux.

7.5 **Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**

$$\text{Si A} = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \det(A) = \det(A_1)\dots\det(A_n)$$

(où $A_1, \dots, A_n$ sont n matrices carrées).

7.6 **Propriétés théoriques**

① $\det\left(A^T\right) = \det(A)$,

② $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

③ $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$, et dans ce cas : $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

④ Invariance par similitude :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A).$$

⑤ Conséquence : pour $f \in \mathcal{L}(E)$ (avec $\dim E < +\infty$), $\det(f) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E.

⑥ $f \in \mathcal{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$.

7.7 **Déterminant tridiagonal -** *(À savoir refaire)*

$$D_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}_n \quad (\text{où } n \geq 3),$$

$$\text{avec } D_1(a,b,c) = |a|_1,\ D_2(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}_2$$

se calcule en développant par rapport à première colonne, puis la première ligne : on obtient la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :
$$D_n(a,b,c) = aD_{n-1}(a,b,c) - bcD_{n-2}(a,b,c).$$

7.8 **Déterminant de Vandermonde -**

Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$V(a_1,...,a_n) \overset{\text{déf.}}{=} \det\left(\left(a_i^{j-1}\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$V(a_1) = 1$, et,
$$\forall n \geq 2,\ V(a_1,...,a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(a_j - a_i).$$

8 Fonctions réelles de deux variables

8.1 **Disque ouvert (ou boule ouverte) de $\mathbb{R}^2$**

Soit $M = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in]0\,;\ +\infty[$. Le disque ouvert de centre M et de rayon r est l'ensemble
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\}.$$

8.2 **Ouverts de $\mathbb{R}^2$**

La partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte si
$$\forall M \in U, \exists r > 0, \mathcal{D}(M,r) \subset U.$$

8.3 **Ouverts de référence**

- $]a\,;\ b[\times]c\,;\ d[$ (avec éventuellement $a = -\infty$, $b = +\infty$, $c = -\infty$ et/ou $d = +\infty$) est un ouvert.
- L'intersection et la réunion de deux ouverts est un ouvert.

8.4 **Graphe ou surface représentative**

Le graphe d'une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ ou sa surface représentative est l'ensemble
$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y)\right\}$$
C'est la surface d'équation $z = f(x,y)$

8.5 **Lignes de niveau**

La ligne de niveau $k \in \mathbb{R}$ de la fonction f définie sur U est l'ensemble
$$\mathcal{L}_k = \left\{(x,y) \in U | f(x,y) = k\right\}$$
$\mathcal{L}_k = \emptyset$ si f ne prend jamais la valeur k.

8.6 **Limites et continuité**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit M_0 un point de U.

① On dit que f tend vers la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en M_0 si
$$\forall\varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall M \in U, \big(\|M - M_0\| \leqslant r \Longrightarrow |f(M) - f(M_0)| \leqslant \varepsilon\big)$$
On écrit alors $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = \ell$ ou $f(M) \xrightarrow[M\to M_0]{} \ell$.

② On dit que f est continue en M_0 si $f(M) \xrightarrow[M\to M_0]{} f(M_0)$.

③ On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point de U

8.7 **Critères de continuité**

① Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

② La somme, la différence, le produit et le quotient à dénominateur ne s'annulant pas de deux fonctions continues sont continues.

③ Si $f : U \to R$ et $g : f(U) \to R$ sont continues, alors $g \circ f : U \to R$ est continue.

8.8 **Dérivée partielle d'ordre 1**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. On dit que f admet en M_0 une dérivée partielle première par rapport x (respectivement y) si la limite suivante existe :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)).$$
$$\text{resp. } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)).$$
Autrement dit, lorsqu'elles existent, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la dérivée en y_0 de la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$.

8.9 **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

$f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si :

• f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune des variables en tout point de U ;

• les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} : U \to \mathbb{R}$ sont continues sur U.

8.10 **Stabilités algébriques**

• Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $fg : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, et si g ne s'annule pas sur U, $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

• Soit $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et $g : V \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ avec $f(U) \subset V$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$.

8.11 **Développement limité d'ordre 1**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors en tout $M_0 = (x_0, y_0)$ de U f admet le développement limité à l'ordre 1 suivant :
$$\forall H = (h, k) \in \mathbb{R}^2 \textit{ avec } M_0 + H \in U,$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o\left(\|(h, k)\|\right).$$

8.12 **Gradient**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Le gradient de f en $M_0 \in U$ est le vecteur de $\mathbb{R}^2$:
$$\nabla f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right).$$

8.13 **Réécriture du D.L. d'ordre 1**

Avec les notations précédentes
$$f(M_0 + H) = f(M_0) + \nabla f(M_0).H + o\left(\|H\|\right)$$
où $\nabla f(M_0).H$ désigne le produit scalaire de $\nabla f(M_0)$ et H.

8.14 **Extremum local, extremum global**

• Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f atteint un maximum (resp. minimum) local en $a \in D$ s'il existe un voisinage ouvert V de a (i.e. un ouvert contenant a) tel que :
$$\forall x \in V \cap D, \quad f(x) \leq f(a)$$
$$(\text{resp. } \forall x \in V \cap D, \quad f(x) \geq f(a))$$
• Si l'inégalité est stricte sauf en a, l'extremum est qualifié de « *strict* ».

• Si l'inégalité est vérifiée pour tout x de D (et pas seulement sur $V \cap D$), l'extremum est qualifié de « global ».

8.15 **Condition nécessaire d'extremum**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si f atteint un extremum en $a \in U$, alors $\nabla f(a) = 0$.

8.16 **Point critique**

Un point $a \in U$ où le gradient s'annule s'appelle un point critique.

8.17 **Point col ou point selle**

On appelle « point col » ou « point selle » un point critique sans extremum.

9 Séries numériques

9.1 • *Série Géométrique* - $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$.

Dans ce cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

• *Série de Riemann* - $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

• *Série exponentielle* - $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout x de $\mathbb{R}$. Sa somme est $\exp(x)$.

9.2 **Divergence grossière**

Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge *grossièrement*.

9.3 Série des différences

La série $\sum_{n\geqslant n_0} \big(u_{n+1} - u_n\big)$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

9.4 Critère de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite ne s'annulant pas.

- Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in [\,0\,;\ 1[$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument.
- Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \,]\,1\,;\ +\infty]$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

9.5 Absolue convergence

Si la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est **absolument convergente**.

Remarque : lorsqu'elles convergent, les séries de référence du premier point sont absolument convergente.

9.6 Critères de convergence

•*Comparaison* - Si $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).

•*Domination, négligeabilité* - Si $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$ (en particulier si $u_n = o\left(v_n\right)$) et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ est **absolument** convergente alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).

•*Équivalence* - Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec v_n de signe constant au voisinage de $+\infty$ alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature.

9.7 Théorème spécial des séries alternées (Leibniz)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Alors :

- $\sum_{n\geq n_0} (-1)^n u_n$ converge, ainsi que $\sum_{n\geq n_0} (-1)^{n+1} u_n$,
- $\mathrm{R_N} = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^{\mathrm{N}+1} u_{\mathrm{N}+1}$ (*i.e.* de son premier terme),
- on a la majoration : $|\mathrm{R_N}| \leq u_{\mathrm{N}+1}$.

9.8 Formule de Stirling

$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$

9.9 Constante γ d'Euler - Hors programme mais utile

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. En conséquence, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

9.10 Produit de Cauchy

① Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques. Le produit de Cauchy de ces séries est la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ où : $\forall n \geq 0, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

② Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ convnerge et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

10 Intégrales généralisées

10.1 Intégrales de Riemann

- Pour $a > 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

10.2 Intégrales de référence en exp et ln

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ existe si, et seulement si, $\alpha \in \,]\,0\,;\ +\infty[$, et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$ dans ce cas.
- $\displaystyle\int_0^1 \ln t \mathrm{d}t$ existe et vaut -1.

10.3 Translation de la variable

- $f :]\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ est intégrable en a^+ si, et seulement si, $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+.
- De même sur $[\,a\,;\ b[$: f intégrable en b^- ssi $t \mapsto f(b-t)$ intégrable en 0^+.

10.4 Intégrales faussement impropres

Pour $f : [\,a\,;\ b[\,(b \neq +\infty) \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{t\to b} f(t)$ existe et est finie, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

existe. f est prolongeable par continuité en b et on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est *faussement impropre*.

Idem pour $f :]\,a\,;\ b] \, (a \neq -\infty) \to \mathbb{R}$ continue de limite finie en a.

Une intégrale n'est jamais faussement impropre en $-\infty$ ou $+\infty$

10.5 **Absolue convergence, inégalité triangulaire et intégrabilité**

Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existe, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe, et on a l'*inégalité triangulaire* :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On dit dans ce cas que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* ou que f est *intégrable* sur $]\,a\,;\ b[$.

10.6 **Critères de convergence**

Pour $f, g : [\,a\,;\ b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux, éventuellement $b = +\infty$.

Les critères ci-dessous sont valables aussi pour $f, g :]\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ en permutant les rôles de a et de b.

•*Comparaion - Version signée*

On suppose $\boxed{\mathbf{0 \leq}}\, f \leq g$. Alors

(i) si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

(ii) si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

•*Comparaion - Version intégrabilité*

Si $|f| \leq g$ et g est intégrable sur $[\,a\,;\ b[$ alors f est intégrable sur $[\,a\,;\ b[$.

•*Domination, négligeabilité* -

Si $f = \mathcal{O}(g)$ en b (en particulier si $f = o(g)$) et g est intégrable sur $[\,a\,;\ b[$ alors f est intégrable sur $[\,a\,;\ b[$.

•*Équivalence - Version signée*

Mise en garde : « f et g sont **de signe constant** » n'est **pas équivalent à** « f et g sont **de même signe** ».

Si $f \sim g$ en b et **si f et g sont de signe constant** alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

•*Équivalence - Version intégrabilité*

Si $f \sim g$ en b alors f est intégrable sur $[\,a\,;\ b[$ si, et seulement si, g l'est.

10.7 **Changement de variable**

Soit $\varphi :]\,a\,;\ b[\to \mathbb{R}$ (où éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) une bijection $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Soit $f : \varphi\big(]\,a\,;\ b[\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Alors $\displaystyle\int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et égales en cas d'existence. En général, on baptise $u :]\,a\,;\ b[\to \mathrm{R}, t \mapsto \varphi(t)$ et on écrit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$. Autrement dit, on assimile la nouvelle variable à la fonction φ.

10.8 **Intégration par parties**

Soit $u, v :]\,a\,;\ b[\to \mathbb{R}$ (où éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\displaystyle\lim_{t\to a^+} u(t)v(t)$ **et** $\displaystyle\lim_{t\to b^-} u(t)v(t)$ **existent et sont finies**, alors $\displaystyle\int_a^b u'v$ et $\displaystyle\int_a^b uv'$ sont de même nature.

En cas d'existence, on a : $\displaystyle\int_a^b u'v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv'$.

10.9 **Fonction continue positive d'intégrale nulle**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ **continue et intégrable** sur l'intervalle I. Si $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f| = 0$ alors $f = 0$ sur I.

11 Suites de fonctions

I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11.1 **Convergence simple.**

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ où, pour tout $n \geq n_0$, $f_n : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ converge simplement vers $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ si : $\forall x \in \mathrm{I},\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

(ce qui sous-entend l'existence de ces limites).

On écrit alors $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f$.

11.2 **Norme uniforme ou infinie.**

Sur l'espace $\mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur l'intervalle I, la fonction

$$||.||_\infty : \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x\in\mathrm{I}} |f(x)|$$

est une norme, appelée norme infinie ou norme de la convergence uniforme.

11.3 **Propriété de $||.||_\infty$**

① $\forall f \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $||f||_\infty \geq 0$.

② $\forall f \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $\big(||f||_\infty = 0\big) \iff f = 0$ (fonction nulle sur I).

③ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $||\lambda f||_\infty = |\lambda| \,.\, ||f||_\infty$.

④ $\forall (f, g) \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})^2$, $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$.

11.4 **Convergence uniforme.**

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si :

① pour tout $n \geq n_0$, $f_n - f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est bornée,

② $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On écrit alors $f_n \overset{\mathcal{CVU}}{\longrightarrow} f$.

11.5 **Stabilité de la continuité par convergence uniforme.**

Si, pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue et si $f_n \overset{\mathcal{CVU}}{\longrightarrow} f$ alors f est continue.

11.6 **Interversion limite-intégrale sur un segment**

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ suite de fonctions continues sur un segment $[\,a\,;\,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers une fonction f, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Mise en garde

Le théorème précédent ne s'applique pas si

⋆ l'intervalle n'est pas un segment, en particulier pour des intégrales généralisées ;

⋆ les fonctions ne sont pas continues : « continues par morceaux » est une hypothèse insuffisante.

11.7 **Théorème de dérivabilité, classe $\mathcal{C}^1$**

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose :

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

② la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ **converge simplement** sur I vers une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$,

③ la suite $(f_n')_{n\geq n_0}$ **converge uniformément** sur I vers une fonction $g : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec $f' = g$, autrement dit :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty}(f_n').$$

11.8 **Théorème de dérivabilité, classe $\mathcal{C}^k$**

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose :

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

② pour tout $i \in [\![\,0\,;\ k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})_{n\geq n_0}$ **converge simplement** sur I vers une fonction $g_i : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$,

③ la suite $(f_n^{(k)})_{n\geq n_0}$ **converge uniformément** sur I vers une fonction $g_k : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$.

Alors la limite g_0 simple de la suite (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, avec pour tout $i \in [\![\,1\,;\ k]\!]$, $f^{(i)} = g_i$, autrement dit :

$$\forall i \in [\![\,1\,;\ k]\!]\,,\quad \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(i)} = \lim_{n\to+\infty}(f_n^{(i)}).$$

11.9 **Théorème de convergence dominée**

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Si :

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue par morceaux,

② la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f,

③ la fonction f est continue par morceaux,

④ **hypothèse de domination uniforme** – il existe une fonction $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et **intégrable sur I** telle que :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathrm{I},\quad |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

Alors :

- les fonctions f_n $(\forall n \geq n_0)$ et f sont intégrables sur I,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\mathrm{I} f_n\right)$ existe et vaut $\displaystyle\int_\mathrm{I} f$.

Mise en garde

Pour que le théorème s'applique, il faut que la fonction dominante $\boldsymbol{\varphi}$ **soit indépendante de $\boldsymbol{n}$**, de là l'adjectif « uniforme » : la même fonction φ domine toutes les fonctions f_n.

Remarque

Il n'est pas nécessaire de vérifier au préalable l'intégrabilité des fonctions f_n et de f : c'est une conclusion du théorème.

12 Séries de fonctions

12.1 **Convergence simple (CVS)**

$\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in \mathrm{I}$,la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f_n(x)$ converge.

Dans ce cas, la **fonction** $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ s'appelle la **somme** de $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f_n$.

12.2 **Convergence uniforme (CVU)**

$\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge uniformément si la suite $(\mathrm{S_N})$ des sommes partielles converge uniformément, i.e. si la suite $(\mathrm{R_N})$ de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle :

$$||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0.$$

En effet,

$$\mathrm{S_N} \overset{\mathcal{CVU}}{\longrightarrow} \mathrm{S} \iff ||\mathrm{S_N} - \mathrm{S}||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff ||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

12.3 **Convergence normale (CVN)**

$\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge normalement si :

• pour tout $n \geq n_0$, f_n est bornée,
• la série numérique $\sum_{n\geq n_0} ||f_n||_\infty$ converge.

12.4 **Relations entre modes de convergence**

• La convergence normale entraîne la convergence uniforme.
• La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
• La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ entraîne la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers la fonction nulle ($||f_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

12.5 **Continuité de la somme**

Soit I un intervalle.

Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue sur I,

② $\sum_{n\geq n_0} f_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \mathrm{S}$

alors S est continue sur I.

12.6 **Classe $\mathcal{C}^1$**

Soit I un intervalle.

Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

② $\sum_{n\geq n_0} f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} \mathrm{S}$,

③ $\sum_{n\geq n_0} f_n' \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \mathrm{T}$

alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{S}' = \mathrm{T}$, i.e.

$$\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n'(x).$$

12.7 **Classe $\mathcal{C}^k$**

Soit I un intervalle.

Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

② pour tout $i \in [\![0\,;\ k-1]\!]$, $\sum_{n\geq n_0} f_n^{(i)} \xrightarrow{\mathcal{CVS}} \mathrm{S}_i$,

③ $\sum_{n\geq n_0} f_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \mathrm{S}_k$,

alors S_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tout $i \in [\![1\,;\ k]\!]$,

$$\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)}(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n^{(i)}(x).$$

12.8 **Du local au global**

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

• Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout segment $[a\,;\ b] \subset \mathrm{I}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
• Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur une famille d'intervalle $(\mathrm{I}_a)_{a\in\mathrm{A}}$ inclus dans I telle que $\bigcup_{a\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_a = \mathrm{I}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Avertissement Pour autant, la convergence normale ou uniforme sur tout $[a\,;\ b] \subset \mathrm{I}$ n'entraîne pas la CVN ou CVU sur I tout entier. Par exemple pour les $f_n : \mathrm{I} =]-1\,;\ 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$,

• $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = \sup_{-1<x<1} |x^n| = 1$ donc pas de CVN sur I
• pour tout $[-a\,;\ a] \subset \mathrm{I}$, $||f_n||_{\infty,[-a\,;\ a]} = \sup_{-a\leqslant x\leqslant a} |x^n| = a^n$ donc CVN sur $[-a\,;\ a]$

12.9 **Théorème de la double limite**

Soit une série $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ de fonctions définies sur un intervalle I.

Si

① $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ converge uniformément sur I,

② pour tout $n \geqslant n_0$, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie),

alors

• la série $\sum \ell_n$ converge,
• la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ell_n, \quad i.e \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

12.10 **Intégration terme à terme sur un segment en cas de CV uniforme**

Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue sur **le segment** $[a\,;\ b]$,

② $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge uniformément sur **le segment** $[a\,;\ b]$,

alors $$\int_a^b \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

12.11 **Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle**

Soit I un intervalle *quelconque*. On suppose :

Si

① pour tout n, f_n c.p.m. et intégrable sur I,

② $\sum_{n\geq n_0} f_n \xrightarrow{cvs} \mathrm{S}$ sur I,

③ S est c.p.m. sur I,

④ la série numérique $\sum_n \left(\int_{\mathrm{I}} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ converge,

alors S est intégrable sur I et

$$\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

13 Séries Entières

13.1 **Lemme d'Abel**

Soit (a_n) suite de nombres complexes. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

13.2 **Rayon de convergence**

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est :

$$\mathrm{R} = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+ / (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} = [\,0\,;\ +\infty].$$

13.3 **Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence**

Version complexe –

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

(i) si $|z| < \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument,

(ii) si $|z| > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Version réelle –

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

(i) si $x \in\,]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[$, alors $\sum a_n x^n$ converge absolument,

(ii) si $x < -\mathrm{R}$ ou $x > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

13.4 **Comparaison asymptotique et rayon de convergence**

$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geq \mathrm{R}_b$.
- Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

13.5 **Deux propriétés bien pratiques**

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{R}\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$;
- $\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

13.6 **Critère de Jean le Rond D'Alembert pour les séries entières**

On suppose qu'il existe n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0, \quad a_n \neq 0$.

Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [\,0\,;\ +\infty]$, alors $\mathrm{R}\left(\sum a_n z^n\right) = \dfrac{1}{\ell} \in [\,0\,;\ +\infty]$.

13.7 **Opérations sur les séries entières**

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, même rayon.
- $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ avec $\mathrm{R} = min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$, $\mathrm{R} \geq \mathrm{R}_a$ si $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.
- **Produit de Cauchy** – Soit $\forall n \geq 0, c_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$ avec $\mathrm{R}_c \geq \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$.

13.8 **Régularité de la somme d'une série entière**

- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[\,a\,;\ b] \subset\,]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[$ de son intervalle ouvert de convergence.
- La somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ est continue sur $]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[$, resp. $\mathrm{D_O}(0, \mathrm{R})$ lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}$.
- La somme d'une série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[\,,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[\,,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

13.9 **Intégration et primitive**

Soit f somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

- Pour tout $[a\,;\,b] \subset]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_a^b t^n \mathrm{d}t\right)$.
- En particulier, la primitive F de f s'annulant en 0 est définie par :

$$\forall x \in]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\,, \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

13.10 Lien avec le développement de Taylor

Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence non nul, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

13.11 Unicité du développement en série entière

- Si $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur $]-r\,;\,r[$ avec $r > 0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.
- *Corollaire pour les fonctions paires, impaires*

f paire sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$,

f impaire sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$.

13.12 Développements en série entière de référence

☞ *Variable réelle*

- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ et $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ et $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\forall x \in]-1\,;\,1[, \qquad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
- $\forall x \in]-1\,;\,1[, \qquad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ et $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
- $\forall x \in]-1\,;\,1[, \qquad \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1\,;\,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

☞ *Variable complexe*

- $\forall z \in \mathcal{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}, \qquad \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

13.13 Propriétés de l'exponentielle complexe

- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
- $\forall z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$$

14 Intégrales à paramètre

14.1 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{K}$. Soit a une borne de I (éventuellement $a = \pm\infty$). Soit $g : \mathrm{I} \times \mathrm{J}$,On suppose que :

① pour tout x de I, $t \mapsto g(x,t)$ est c.p.m. surJ,

② pour tout t de J, $g(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$,

③ $t \mapsto \ell(t)$ est c.p.m. sur J,

④ **hypothèse de domination :** il existe une fonction $\varphi : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et **intégrable** telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}, \quad |g(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction ℓ intégrable sur J, et : $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\int_{\mathrm{J}} g(x,t)\mathrm{d}t\right)$ existe et vaut $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} \ell(t)\mathrm{d}t$.

14.2 Théorème de continuité

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{K}$. On suppose :

① pour tout $t \in \mathrm{J}$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur I (la propriété à transmettre),

② pour tout $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur J,

③ **hypothèse de domination :** il existe une fonction $\varphi : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}, \qquad |g(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{J}} g(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

14.3 Théorème de dérivation sous l'intégrale $\mathcal{C}^1$

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{K}$. On suppose :

① pour tout $t \in \mathrm{J}$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (la propriété à transmettre), ② pour tout $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,

③ pour tout $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,

④ **hypothèse de domination :** il existe une fonction $\varphi : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{J}} g(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad f'(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

14.4 **Théorème de dérivation sous l'intégrale classe $\mathcal{C}^n$**

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{K}$. On suppose :

① pour tout $t \in \mathrm{J}$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I (la propriété à transmettre),

② pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k} g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,

③ pour tout $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n}{\partial x^n} g(x,t)$ est continue par morceaux sur J,

④ **hypothèse de domination :** il existe une fonction $\varphi : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}, \qquad \left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{J}} g(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!], \forall x \in \mathrm{I}, \qquad f^{(k)}(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial^k}{\partial x^k} g(x,t)\mathrm{d}t.$$

15 Version assouplie des 3 théorèmes de régularité

Si on peine à trouver une domination uniforme en x (voire si une telle domination n'existe pas), on peut se contenter de prouver que f est définie et continue resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$ sur une famille d'intervalles I_i telle que $\bigcup\limits_i \mathrm{I}_i = \mathrm{I}$.

Par exemple, $\mathrm{I} = \mathbb{R} = \bigcup\limits_{a>0} [-a\,;\, a]$, $\mathrm{I} = [0\,;\, +\infty[\,=\, \bigcup\limits_{0<a} [0\,;\, a]$, $\mathrm{I} = \,]0\,;\, +\infty[\,=\, \bigcup\limits_{0<a<b} [a\,;\, b]$, etc...

16 Espaces vectoriels normés

16.1 Une **norme** $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel E vérifie les axiomes :

(i) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}(x) \geq 0$ (positivité) ;

(ii) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$ (séparation) ;

(iii) $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\ \mathrm{N}(x)$ (homogénéité) ;

(iv) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \mathrm{N}(x+y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

Le couple (E, N) est un *espace vectoriel normé* (evn). On dit aussi que E est muni de la norme N. On note souvent $||.||$ pour N.

16.2 La **distance associée à la norme** $||.||$ est définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad d(x,y) = ||x-y||.$$

La **distance d'un vecteur à une partie** $\mathrm{P} \subset \mathrm{E}$ est, si elle existe, $d(x,\mathrm{P}) = \inf\limits_{y \in \mathrm{P}} d(x,y) = \inf\limits_{y \in \mathrm{P}} ||x-y||$.

16.3 *Propriétés de la norme.* Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ un evn. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{E}^3$.

(i) $||0_{\mathrm{E}}|| = 0$,

(ii) $\big|\, ||x|| - ||y|| \,\big| \leq ||x-y||$ et $\big|\, ||x|| - ||y|| \,\big| \leq ||x+y||$,

(iii) $\big|\, ||x-y|| - ||y-z|| \,\big| \leq ||x-z||$ i.e $\big|d(x,y) - d(y,z)\big| \leq d(x,z)$.

16.4 **Norme induite sur un sous-espace** Soit (E, N) un evn et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\mathrm{N}|_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ est une norme, dite *norme induite* par N sur F, et $(\mathrm{F}, \mathrm{N}|_{\mathrm{F}})$ est un evn.

16.5 **Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

(i) $||x||_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *(norme de Manhattan)*

(ii) $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *(norme de la géométrie euclidienne canonique)*

(iii) $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ *(loi du plus fort)*

Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) $||\mathrm{M}||_1 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$ (ii) $||\mathrm{M}||_2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\right) = \sqrt{\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}^2}$

(iii) $||\mathrm{M}||_\infty = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$

16.6 **Normes sur un espace produit, sur un espace somme**

(i) Soit $(\mathrm{E}_1, ||.||_{\mathrm{E}_1}), \ldots, (\mathrm{E}_p, ||.||_{\mathrm{E}_p})$ p $\mathbb{K}-$evn. Alors

$$\mathrm{N} : \mathrm{E}_1 \times \ldots \mathrm{E}_p \to \mathbb{R}, (u_1, \ldots, u_p) \mapsto \sup_{1 \leq i \leq p} ||u_k||_{\mathrm{E}_k}$$

est une norme sur l'espace produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \mathrm{E}_k$.

(ii) Soit $(E_1, ||.||_{E_1}), \dots, (E_p, ||.||_{E_p})$ p sous-espaces supplémentaire de E. Alors

$$N : E \to \mathbb{R}, u = u_1 + \dots + u_p \mapsto \sup_{1 \le i \le p} ||u_k||_{E_k}$$

est une norme sur l'espace E.

(iii) En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors en posant, pour tout x de E, $N(x) = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on définit une norme sur E. On peut aussi poser $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ou $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

16.7 Boules et sphères

Soit $(E, ||.||)$ evn, d distance associée à $||.||$. Soit $a \in E$ et $r \in [0\,;\ +\infty[$.

(i) *Boule ouverte de centre a de rayon r :*

$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\} = \{x \in E / \, ||a - x|| < r\}.$$

(ii) *Boule fermée de centre a de rayon r :*

$$\overline{\mathcal{B}(a, r)} = \{x \in E / d(a, x) \le r\} = \{x \in E / \, ||a - x|| \le r\}.$$

(iii) *Sphère de centre a de rayon r :*

$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\} = \{x \in E / \, ||a - x|| = r\}.$$

Pour $r = 1$, on parle de **boule unité** et de **sphère unité**.

16.8 Parties convexes

(i) Dans E, le segment $[x\,;\ y]$ d'extrémité $x \in E$ et $y \in E$ est : $[x\,;\ y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y / \lambda \in [0\,;\ 1]\}$.

(ii) $C \subset E$ est un convexe ou une partie convexe de E si : $\forall (x, y) \in C^2, \quad [x\,;\ y] \subset C$.

(iii) Les boules sont des convexes, toute intersection de convexes est convexe.

16.9 Parties bornées

$P \subset E$ est une partie bornée de E si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in P, ||x|| \le M$.

Caractérisation : il y a équivalence entre

(i) P est bornée, (ii) P est incluse dans une boule, (iii) $\exists N \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in P, d(x, y) \le N$.

Réfutation : P n'est pas bornée si, et seulement si, il existe une suite (u_n) d'éléments de P telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||u_n|| \ge n$.

16.10 Suites bornées

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée si $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, autrement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, ||u_n|| \le M.$$

L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

16.11 Applications bornées

Soit X un ensemble. $f : X \to E$ est une application bornée si $\{f(x) / x \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, autrement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, ||f(x)|| \le M.$$

L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel de E^X.

16.12 Suites convergentes

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente si

$$\exists \ell \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \ge n_0, \quad ||u_n - \ell|| \le \varepsilon.$$

Dans ce cas, ℓ est unique et s'appelle la limite de la suite u. Notations usuelles.

Caractérisation : (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si, $||u_n - \ell|| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

16.13 *Propriétés :*

(i) Toute suite convergente est bornée.

(ii) Si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont deux suites convergentes d'éléments de E de limite respective ℓ et m, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, vers $\lambda u + \mu v$.

(iii) Si $u = (u_n)$ est une suite convergente d'éléments de E de limite ℓ et (k_n) une suite de scalaires convergente de limite λ, alors $(k_n u_n)$ converge, vers $\lambda \ell$.

16.14 Équivalence des normes en dimension finie

La convergence et la limite d'une suite ne dépendent pas de la norme choisie lorsque E est de dimension finie. Autrement dit, si N et $||.||$ sont deux normes sur E, alors : $\lim_{n \to +\infty} N(u_n - \ell) = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} ||u_n - \ell|| = 0$.

16.15 Suites coordonnées

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Tout u_n se décompose de manière unique sous la forme : $u_n = u_n^{(1)} e_1 + \dots + u_n^{(p)} e_p = \sum_{i=1}^{p} u_n^{(i)} e_i$.

Pour $i \in [\![1\,;\ n]\!]$, $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ est la i-ème suite coordonnée de (u_n) dans la base $\mathcal{B}$.

16.16 Convergence par coordonnées

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. La suite $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, chacune de ses suites coordonnées dans $\mathcal{B}$ converge.

Dans ce cas : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \big(\lim_{n \to +\infty} u_n^{(i)} \big) e_i$.

16.17 Suites extraites, fonctions extractrices

Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de u toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où la fonction extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Suite extraite d'une suite convergente : Toute suite extraite d'une suite convergente converge, vers la même limite.

Critère de divergence : Si deux suites extraites ont des limites distinctes...

16.18 Parties ouvertes, voisinages d'un point

$x \in \Omega$ est un point *intérieur à* Ω si $\exists r > 0, \mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$.

Une partie $\mathcal{V}$ est un *voisinage de x* si x est intérieur à $\mathcal{V}$.

Ω partie ouverte si : $\forall x \in \Omega, \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \Omega$.

16.19 **Parties fermées**

La partie F de E est un *fermé* ou une partie fermée si son complémentaire $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{F}$ dans E est une partie ouverte de E.

16.20 (i) $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés.

(ii) Toute réunion d'ouverts et toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est une partie ouverte.

(iii) Toute réunion d'un nombre fini de fermés et toute intersection de fermés est une partie fermée.

16.21 **Caractérisation séquentielle des fermés**

F est un fermé si, et seulement si, pour **toute** suite convergente $(f_n)_n$ d'éléments de F, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \in \mathrm{F}$... on ne s'échappe pas de F facilement, il est fermé !

16.22 **Équivalence des topologies en dimension finie**

Si E est de dimension finie, toutes les normes de E définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

16.23 **Point adhérent, adhérence, notation**

a est *adhérent* à A si toute boule ouverte centrée en a rencontre A et on note $\overline{\mathrm{A}}$ l'ensemble des points adhérents, appelé *l'adhérence* de A :

$$a \in \overline{\mathrm{A}} \iff \forall r > 0, \mathcal{B}(a,r) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathrm{A}, ||x-a|| < \varepsilon.$$

Caractérisation séquentielle des points adhérents : a est adhérent à A s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers A.

Corollaire : $\overline{\mathrm{A}}$ est fermée, $\overline{\mathrm{A}} = \bigcap\limits_{\mathrm{F\ fermé}\ \supset \mathrm{A}} \mathrm{F}$, A fermé ssi $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$.

16.24 **Point intérieur, intérieur, notation**

$x \in \Omega$ est un point *intérieur à* Ω si $\exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \Omega$ et on note $\mathring{\mathrm{A}}$ l'ensemble des points intérieurs, appelé *l'intérieur* de A.

Propriété : $\mathring{\mathrm{A}}$ est ouvert, $\mathring{\mathrm{A}} = \bigcup\limits_{\Omega\ \mathrm{ouvert}\ \subset \mathrm{A}} \Omega$, A ouvert ssi $\mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$.

16.25 **Frontière ou bord, notation**

La *frontière* ou la *bord* de A est $\mathrm{F}r(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$.

16.26 **Continuité, inégalités et nature topologique**

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ continue et k un réel.

- $\{x \in \mathrm{E t.q.} f(x) \geq k\}$, $\{x \in \mathrm{E t.q.} f(x) \leq k\}$ et $\{x \in \mathrm{E t.q.} f(x) = k\}$ sont des fermés ;
- $\{x \in \mathrm{E t.q.} f(x) > k\}$, $\{x \in \mathrm{E t.q.} f(x) < k\}$ et $\{x \in \mathrm{E t.q.} f(x) \neq k\}$ sont des ouverts.

16.27 **Limites de fonctions, notations**

$(\mathrm{E}, ||.||_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}, ||.||_{\mathrm{F}})$ deux evn, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$. Soit a un point adhérent à A. f admet une limite en a si

$$\exists \ell \in \mathrm{F}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad ||x-a||_{\mathrm{E}} \leq \alpha \Rightarrow ||f(x)-\ell||_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, ℓ est unique et s'appelle la limite de f en a.

Caractérisation séquentielle de la limite : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si, et seulement si, pour **toute** suite (u_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

16.28 **Équivalence des normes en dimension finie**

La convergence et la limite d'une fonction ne dépendent pas de la norme choisie lorsque E est de dimension finie. Autrement dit, si N et $||.||$ sont deux normes sur E, alors : $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{N}(f(x)-\ell) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} ||f(x)-\ell|| = 0$.

16.29 **Fonctions coordonnées**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de F. $f : \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Pour tout x de A, $f(x)$ se décompose de façon unique sous la forme : $\quad f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i(x)e_i$. Les $f_i : \mathrm{A} \to \mathbb{K}$ sont les fonctions coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

16.30 **Convergence par coordonnées**

f admet une limite ℓ en a si, et seulement si, chacune des fonctions coordonnées admet une limite en a, et dans ce cas : $\quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum\limits_{i=1}^{p} \lim\limits_{x\to a} f_i(x)e_i$.

16.31 **Opérations algébriques**

(i) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \text{et } g(x) \xrightarrow[x\to a]{} m) \Rightarrow (\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\ell + m\mu$.

(ii) Si $\lambda : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$, $(\lambda(x) \xrightarrow[x\to a]{} k \text{et } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell) \Rightarrow (\lambda(x)f(x) \xrightarrow[x\to a]{} k\ell$.

(iii) $f : \mathrm{X} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{Y} \subset \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ telles que $f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y}$ et soit $a \in \overline{\mathrm{X}}$.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathrm{Y}}$ et $g \xrightarrow[y\to \ell]{} m$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} m$.

16.32 **Continuité ponctuelle, continuité globale**

$f : \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est continue en $a \in \mathrm{A}$ si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Propriétés usuelles :

(i) L'ensemble des fonctions continues sur A $\mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$ est un sous-espace vectoriel de F^{A}.

(ii) La composée de fonctions continues est continue.

(iii) $\big(f : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ continue en $a\big)$ entraîne $\big(f$ bornée au voisinage de $a\big)$ (i.e. sur $\mathrm{B}(a,r) \cap \mathrm{A}$ avec $r > 0$)

16.33 **Continuité par coordonnées en dimension finie**

(i) $f : \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ (avec E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$) est continue en $a \in \mathrm{A}$ si, et seulement si, toutes ses applications coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont continues en a.

(ii) $f : \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ (avec E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$) est continue sur A si, et seulement si, toutes ses applications coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont continues sur A.

16.34 **Fonctions à valeurs réelles continues sur un fermé borné**

Soit K une partie fermée et bornée (= "compact") de E.

Alors toute fonction continue $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, $\exists(m,\mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$ et $\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathrm{A}, \quad m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$ avec $f(a) = m$ et $f(b) = \mathrm{M}$.

16.35 **Application k-lipschitzienne**

$f : \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est lipschitzienne de rapport $k \in [0\,;\,+\infty[$ si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{A}^2, \quad ||f(x) - f(y)|| \leq k\,||x-y||.$$

16.36 **Propriétés**

(i) $||.||$ est 1-lipschitzienne

(ii) La composition conserve la lipschitzianattitude : f (resp. g) k_1-lipschitzienne (resp. k_2-lipschitzienne) telles que $g \circ f$ existe entraîne $g \circ f$ $k_1 k_2-$lipschitzienne.

(iii) Toute application lipschitzienne est continue

16.37 **Applications linéaires continues en dimension quelconque**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}, ||u(x)||_{\mathrm{F}} \leq k\,||u||_{\mathrm{E}}$ alors u est continue.

16.38 **Applications linéaires continues en dimension finie**

En dimension **finie** :

(i) Toue application linéaire, bilinéaire, voire multilinéaire est continue.

(ii) $\mathrm{Tr}\,(:)\,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ et $\det\,(:)\,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ sont continues.

(iii) Pour E euclidien : $\langle .,. \rangle : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}$ est continue.

(iv) Le produit matriciel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}), (\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ est continu.

(v) La composition des endomorphismes $\circ$ est continue.

(vi) det est $n-$linéaire par rapport aux colonnes donc $\det : \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)^n \to \mathbb{K}$ est continue.

(vii) Les fonctions polynomiales $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}, (x_1,\dots,x_p) \mapsto \displaystyle\sum_{0 \leq i_1,\dots,i_p \leq d} a_{i_1,\dots,ip} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}$ sont continues.

(viii)$\chi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{M}}$ est continue.

17 Fonctions vectorielles de la variable réelle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point.

17.1 **Dérivée en un point**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathrm{I}$. f est dérivable en a si la fonction τ_a « *taux de variation en a* »

$$\tau_a : \mathrm{I} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \frac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big)$$

admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a.

Dans ce cas, ℓ est la dérivée de f en a, et se note $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

17.2 **Caractérisation par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1**

f est dérivable en a si, et seulement si, il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ telle que $\lim\limits_{t \to a} \varepsilon(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$ tels que :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t).$$

17.3 **Dérivabilité sur un intervalle**

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Dans ce cas, on note $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n, a \mapsto f'(a)$ la fonction dérivée de f sur I.

17.4 La dérivabilité entraîne la continuité

17.5 **Fonctions coordonnées**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle fonctions coordonnées de f les n fonctions $f_i : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i.$$

17.6 **Dérivation par coordonnées**

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ si, et seulement si, les n fonctions coordonnées f_i $(1 \leq i \leq n)$ sont dérivables en a. Dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i = \big(f_1'(a),\dots,f_n'(a)\big).$$

17.7 **Extension à tout $\mathbb{R}-$espace de dimension finie**

Les définitions et propriétés précédentes s'étendent à toutes fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ où E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n, notamment et assez fréquemment $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

17.8 **Combinaisons linéaires**

Si $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ dérivables alors $\lambda f + \mu g$ dérivable avec

$$\forall a \in \mathrm{I}, \qquad \big(\lambda f + \mu g\big)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

17.9 **Composition par une application linéaire**

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ dérivable et $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire alors $\mathrm{L}(f) : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p, t \mapsto \mathrm{L}(f)(t)$ dérivable avec

$$\forall a \in \mathrm{I}, \qquad \big(\mathrm{L}(f)\big)'(a) = \mathrm{L}\big(f'(a)\big).$$

17.10 **Composition par une application bilinéaire**

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p$ dérivables et $\mathrm{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ bilinéaire alors $\mathrm{B}(f,g) : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^q, t \mapsto \mathrm{B}\big(f(t), g(t)\big)$ dérivable avec

$$\forall a \in \mathrm{I}, \qquad \big(\mathrm{B}(f,g)\big)'(a) = \mathrm{B}\big(f'(a), g(a)\big) + \mathrm{B}\big(f(a), g'(a)\big).$$

☞ Notamment, B peut être le produit des fonctions à valeurs réelles, le produit matriciel, un produit scalaire, le déterminant vis à vis de ses n colonnes. On se souviendra que dans le contexte opératoire, « bilinéaire » est synonyme de « distributif ».

17.11 **Composition par une application multilinéaire**

Si $f_1 : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$, $f_2 : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$, …, $f_n : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ sont n applications dérivables et $\mathrm{B} : \mathrm{E}^n \to \mathbb{R}^q$ est une application $n-$linéaire alors
$\mathrm{B}(f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^q, t \mapsto \mathrm{B}\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$ est dérivable avec

$$\forall a \in \mathrm{I}, \qquad \big(\mathrm{B}(f_1, f_2, \dots, f_n)\big)'(a) = \mathrm{B}\big(f_1'(a), f_2(a), ..., f_n(a)\big) + \mathrm{B}\big(f_1(a), f_2'(a), ..., f_n(a)\big) + \dots + \mathrm{B}\big(f_1(a), f_2(a), ..., f_n'(a)\big).$$

17.12 **Composition d'applications dérivables**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{J}(\subset \mathbb{R}) \to \mathrm{I}$ dérivables, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J avec

$$\forall b \in \mathrm{J}, \qquad \big(f \circ \varphi\big)'(b) = \varphi'(b) f'\big(\varphi(b)\big).$$

17.13 **Dérivée k-ème**

La dérivée $k-$ème de $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est définie, sous réserve d'existence, par récurrence en posant :

$$f^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k} = \mathrm{D}^k f = \begin{cases} f & \text{si } k = 0 \\ \big(f^{(k-1)}\big)' & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ respectivement $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ resp. $\mathcal{C}$ de I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

17.14 **Classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}$**

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.

f est de classe $\mathcal{C}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k de $\mathbb{N}$, ou, ce qui revient au même, f est indéfiniment dérivable.

17.15 **Combinaison linéaire**

Si f et g sont $\mathcal{C}^k$ sur I alors $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^k$ sur I avec

$$\big(\lambda f + \mu g\big)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

En particulier $\mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\big(\mathbb{R}^n\big)^{\mathrm{I}}$.

17.16 **Formule de Leibniz**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathrm{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire. Alors $\mathrm{B}(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec

$$\forall a \in \mathrm{I}, \qquad \big(\mathrm{B}(f, g)\big)^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{B}\big(f^{(i)}, g^{(k-i)}\big)(a)$$

17.17 **Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{J}(\subset \mathbb{R}) \to \mathrm{I}$ de classe $\mathcal{C}^k$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

18 Calcul différentiel et extremums

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique $\mathbb{R}^p$.

18.1 **Dérivée directionnelle**

Soit $f : \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathbb{R}^p$. On dit que f admet en a une dérivée dans la direction de v si la limite suivante existe :

$$\mathrm{D}_v f(a) \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a))$$

Remarque -

• si on pose $g :]-r\,;\ r[\to \mathbb{R}, t \mapsto f(a + tv)$, cela équivaut à la dérivabilité de g en 0, et alors $\mathrm{D}_v f(a) = g'(0)$.

18.2 **Dérivée partielle d'ordre 1**

Soit $f : \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. $a \in \mathrm{U}$. On dit que f admet en a une dérivée partielle première par rapport à la $i-$ème variable si la limite suivante existe :

$$\partial_i f(a) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te_i) - f(a))$$

Calcul pratique

En posant $a = (a_1, \dots, a_p)$, $\partial_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée en a_i de $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$. D'un point de pratique, on l'obtient en considérant que seule la $i-$ème coordonnée varie.

Remarque - $\partial_i f(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)$.

18.3 **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

$f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si :

① f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune des variables en tout point de U ;

② pour tout $i \in [\![1\,;\ p]\!]$, la fonction $\partial_i f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est continue sur U.

18.4 **Stabilités algébriques**

① Soit $f, g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $fg : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, et si g ne s'annule pas sur U, $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

② Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ avec $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$, alors $g \circ f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$.

18.5 **Différentielle**

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La différentielle de f en a, notée $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, est l'application linéaire :

$$\mathrm{d}f(a) : h = (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a) h_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

Notation

« $\mathrm{d}f(a)(h)$ » se note aussi « $\mathrm{d}f(a).h$ » en raison du lien avec le produit scalaire.

18.6 **Développement limité d'ordre 1**

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, en tout a de U, f admet le développement limité à l'ordre 1 suivant :

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p \ tq \ a + h \in \mathrm{U},$$
$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a) h_i + ||h||\, \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, soit encore

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + ||h||\, \varepsilon(h).$$

18.7 **Gradient**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$. Le gradient de f en $a \in \mathrm{U}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^p$:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

18.8 **Différentielle et gradient**

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{d}f(a).h = \big(\nabla f(a) \mid h\big) = \mathrm{D}_h f(a).$$

18.9 **Dérivation d'une fonction composée**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit γ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, à valeurs dans U.

La fonction $f \circ \gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, de dérivée

$$t \mapsto \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(\gamma(t)).\gamma_i'(t)$$

18.10 **Règle de la chaîne avec** $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$

Soit $f : \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x, y : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $(x, y)(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$.

Soit enfin $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial u}}(u,v) &= \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}(x(u,v),y(u,v))\boldsymbol{\frac{\partial x}{\partial u}}(u,v) + \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}(x(u,v),y(u,v))\boldsymbol{\frac{\partial y}{\partial u}}(u,v) \\
\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial v}}(u,v) &= \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}(x(u,v),y(u,v))\boldsymbol{\frac{\partial x}{\partial v}}(u,v) + \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}(x(u,v),y(u,v))\boldsymbol{\frac{\partial y}{\partial v}}(u,v)
\end{aligned}$$

18.11 **Cas des coordonnées polaires**

$f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}, (\rho, \theta) \mapsto f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, telles que : $\forall (\rho, \theta) \in \mathrm{V}, (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathrm{U}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) &= -\rho\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)
\end{aligned}$$

18.12 **Fonctions constantes sur un ouvert convexe**

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. f est constante sur U si et seulement si pour tout a de U, $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})}$.

18.13 **Dérivée partielle d'ordre 2**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$. On appelle, sous réserve d'existence, dérivées partielles d'ordre 2 de f les dérivées partielles des dérivées premières de f. On les note :

$$\partial_{i,j} f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i} \text{ et } \partial_{i,i} f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_i}$$

18.14 **Fonctions de classe** $\mathcal{C}^2$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ si elles admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues.

18.15 **Théorème de Schwarz**

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de **classe** $\mathcal{C}^2$.

Alors en tout point a de U,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Autrement dit, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$$

18.16 **Matrice hessienne**

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathrm{U}$. La matrice hessienne de f en a est

$$\mathrm{H}_f(a) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a) & \dots & \partial^2_{1,p} f(a) \\ \partial^2_{2,1} f(a) & \partial^2_{2,2} f(a) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial^2_{p,1} f(a) & \dots & \dots & \partial^2_{p,p} f(a) \end{pmatrix} = \big(\partial^2_{i,j} f(a)\big)$$

•Par le théorème de Schwarz, $\mathrm{H}_f(a) \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$

18.17 **Développement limité d'ordre 2**

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathrm{U}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^p$

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \partial^2_{i,j} f(a) h_i h_j + ||h||^2 \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} \mathrm{H}_f(a) h + o\left(||h||^2\right)$$

18.18 **Extremum global, extremum local**

• Soit D un domaine de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$.

On dit que f atteint un maximum (resp. minimum) local en $a \in \mathrm{U}$ s'il existe un voisinage ouvert V de a (i.e. un ouvert contenant a) tel que :

$$\forall x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{D}, \quad f(x) \geq f(a)$$
$$(\text{resp. } \forall x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{D}, \quad f(x) \leq f(a))$$

• Si l'inégalité est stricte sauf en a, l'extremum est qualifié de « *strict* ».

• Si l'inégalité est vérifiée pour tout x de D (et pas seulement sur $\mathrm{V} \cap \mathrm{D}$), l'extremum est qualifié de « *global* ».

18.19 **Condition nécessaire d'extremum**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f atteint un extremum en $a \in \mathrm{U}$, alors $\nabla f(a) = 0$.

18.20 **Point critique**

Un point $a \in \mathrm{U}$ où le gradient s'annule s'appelle un point critique.

18.21 **Point col ou point selle**

On appelle « point col » ou « point selle » un point critique sans extremum.

18.22 **Condition suffisante d'ordre 2**

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f.

① Si $\mathrm{H}_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (i.e. $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_f(a)) \subset]\,0\,;\,+\infty[$), f atteint un minimum local en a.

② Si $-\mathrm{H}_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (i.e. $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_f(a)) \subset]-\infty\,;\,0[$), f atteint un maximum local en a.

③ Si $\mathrm{H}_f(a)$ possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors f n'atteint pas d'extremum en a.

④ **Attention -** Si 0 est valeur propre et si les autres valeurs propres sont toutes de même signe, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

18.23 **Existence d'extremum sur un fermé borné**

Toute fonction continue $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ avec K fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.

18.24 **Dans la pratique**

• Sur un ouvert : on cherche les points critiques puis on analyse ce qu'il s'y passe.

• Sur un fermé borné : on cherche les éventuels points critiques à l'intérieur puis on étudie les variations de la fonction sur la frontière. On compare ensuite les extremums sur la frontière avec les valeurs de la fonction aux éventuels points critiques intérieurs.

19 Rappels et compléments d'algèbre

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

19.1 **Espaces vectoriels de référence**

•$\boldsymbol{\mathbb{K}^n}$ est un espace de **dimension n** admettant $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ pour **base canonique** avec

$$e_1 \overset{\text{déf.}}{=} (1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 \overset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\vdots$$
$$e_n \overset{\text{déf.}}{=} (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

•$\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ est un espace de **dimension n** admettant $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n)$ pour **base canonique** avec

$$\mathrm{E}_1 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E}_2 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathrm{E}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = x_1 \mathrm{E}_1 + x_2 \mathrm{E}_2 + \cdots + x_n \mathrm{E}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{E}_i$.

•$\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est un espace de **dimension np** admettant $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ pour **base canonique** où, pour tout (i,j), $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Pour tout $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{M} = \displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}$.

•$\boldsymbol{\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]}$ est un espace de **dimension** $\mathbf{n+1}$ admettant $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n)$ pour **base canonique**.

19.2 $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une **application linéaire** ssi :
$$\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

19.3 Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire. Le **noyau** de f est :
$$\mathrm{Ker}(f) \overset{\text{déf.}}{=} \{u \in \mathrm{E} / f(u) = 0_{\mathrm{F}}\}.$$

19.4 Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire. L'**image** de f est :
$$\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf.}}{=} \{f(u)/u \in \mathrm{E}\} = \{v \in \mathrm{F} / \exists u \in \mathrm{E} \ tq \ f(u) = v\}.$$

19.5 **Détermination pratique de l'image**

$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire avec E de dimension fine n.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(\mathcal{B})\big) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$.

¡La famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ n'est pas nécessairement libre !

19.6 **Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice**

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

i. M est inversible.
ii. $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = n$.
iii. $\det(()\,\mathrm{M}) \neq 0$.
iv. Le système $\mathrm{MU} = 0$ admet une unique solution ($\mathrm{U} = 0$!).
v. $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$

19.7 **Caractérisation des isomorphismes en dimension finie**

Soit E et F de dimension finie, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire.

• Si $\dim \mathrm{E} \neq \dim \mathrm{F}$ alors f n'est pas un isomorphisme.

• Si $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$ alors il y a équivalence entre :

i. f est un isomorphisme.
ii. f est injective.
iii. f est surjective.
iv. $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{F}$ $(= \dim \mathrm{E})$.
v. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.
vi. $\det(()\,f) \overset{\text{déf.}}{=} \det(()\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$.

19.8 Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n. La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, est
$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}),$$
autrement dit : les colonnes de $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ sont formés des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la bases $\mathcal{B}$.

19.9 **Passage réciproque**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible, et
$$\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$$

19.10 **Formules de changement de bases**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

• Soit x un vecteur de E. Alors :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x) = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$$

• Soit f un endomorphisme de E. Alors :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

19.11 **Similitude**

Deux matrices carrées A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que
$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$
On a alors $\mathrm{A} = \left(\mathrm{P}^{-1}\right)^{-1}\mathrm{BP}^{-1}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}$.

19.12 **Trace**

• La trace de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

• $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \mathrm{A} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$ est une forme linéaire.

• $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$

• $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$

19.13 **Somme directe de deux sous-espaces.**

Soit F et G deux sous-espaces de E. Il y a équivalence entre :

i. la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe (notée $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$), *ii.* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$,

iii. $\forall u \in \mathrm{F} + \mathrm{G}, \exists ! (f, g) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad u = f + g$,

et en dimension finie :

iv. $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G}$,

v. en concaténant une base de F et une base de G on obtient une base de F + G.

19.14 **Somme directe de p sous-espaces.**

Soit $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$ p sous-espaces de E. Il y a équivalence entre :

i. La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe (notée $\displaystyle\bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathrm{F}_i$).

ii. $\forall u \in \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i, \exists ! (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p, \quad u = \sum_{i=1}^{p} u_i$.

iii. $\forall (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p \quad \Big(\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq p} u_i = 0\Big) \Rightarrow (\forall i \in [\![1\,;\,p]\!], u_i = 0)$.

et en dimension finie :

iv. $\dim \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{F}_i$.

v. en concaténant des bases respectives des F_i, j'obtiens une base de leur somme.

19.15 **Sous-espace stable par un endomorphisme**

Le sous-espace vectoriel F de E est dit stable par l'endomorphisme u de E si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, c'est-à-dire si pour tout x de F, $u(x) \in \mathrm{F}$.

19.16 **Caractérisations de la stabilité**

Soit E de dimension finie et u un endomorphisme de E.

① Le sous-espace F de E est stable par u si, et seulement si, il existe un supplémentaire G de F tel que la matrice représentant u dans une base adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ est triangulaire supérieure par blocs.

② u est diagonalisable par blocs si, et seulement si, il existe p sous-espaces de E supplémentaires et stables par u.

19.17 **Polynômes d'endomorphismes et polynômes de matrices carrées**

Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$.

(i) $\forall u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}), \quad \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = (\mathrm{PQ})(u) = \mathrm{Q}(u) \circ \mathrm{P}(u)$,

(ii) $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = (\mathrm{PQ})(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{A})$,

(iii) $\forall u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}), \quad \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u))$ est stable par u.

19.18 **Base de Lagrange, définition**

Soit $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

On appelle *base de Lagrange* associée aux points $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de polynômes définie par

$$\forall i \in [\![0\,;\, n]\!], \quad \mathrm{L}_i = \frac{\prod\limits_{0 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} (\mathrm{X} - a_k)}{\prod\limits_{0 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} (a_i - a_k)} = \prod_{0 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} \frac{\mathrm{X} - a_k}{a_i - a_k}$$

19.19 **Base de Lagrange, propriétés**

① $\forall i \in [\![0\,;\, n]\!], \quad \deg(\mathrm{L}_i) = n$.

② $\forall (i,j) \in [\![0\,;\, n]\!]^2, \quad \mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

③ $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

④ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\mathrm{L}_i$

⑤ $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i = 1$, polynôme constant.

19.20 **Interpolation de Lagrange**

Soit $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ et $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points de $\mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme L de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall i \in [\![0\,;\, n]\!], \quad \mathrm{L}(a_i) = b_i,$$

c'est

$$\mathrm{L} = \sum_{i=0}^{n} b_i \mathrm{L}_i.$$

20 Réduction des endomorphismes, diagonalisation des matrices carrées

20.1 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi

$$\exists u \in \mathrm{E}, u \neq 0 \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$

• $u \in \mathrm{E}$ est un **vecteur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi

$$u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$

• Le **spectre** de f noté $\mathrm{Sp}(f)$ est l'ensemble des ses valeurs propres.

• Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ de f est

$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \{u \in \mathrm{E} / f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}).$$

20.2 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi

$$\exists \mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{U} \neq 0 \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$

• $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de la matrice** (parfois appelée colonne propre) $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi

$$\mathrm{U} \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$

• Le **spectre** de M noté $\mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ est l'ensemble des ses valeurs propres.

• Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ de M est

$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \{\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n).$$

20.3 Le **polynôme caractéristique de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est le polynôme $\chi_f(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}id_{\mathrm{E}} - f)$.

• On a, pour E de dimension n, $\chi_f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$.

20.4 Le **polynôme caractéristique de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$.

• On a, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(\mathrm{M})$.

20.5 **Cas particulier des matrices triangulaires**

• Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) $\mathrm{T} = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{t_{i,i} / i \in [\![1\,;\, n]\!]\}.$$

- Son polynôme caractéristique est alors $\chi_{\mathrm{T}}(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - t_{i,i})$.

20.6 **Caractérisation des valeurs propres** d'un endomorphisme

Il y a équivalence entre :
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$
- $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \neq \{0\}$
- $\mathrm{rg}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) < \dim(\mathrm{E})$
- $\chi_f(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de f).

20.7 **Caractérisation des valeurs propres** d'une matrice d'ordre n

Il y a équivalence entre :
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$
- $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible
- $\mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$
- $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de M).

20.8 **Multiplicité d'une valeur propre**

On appelle multiplicité de la valeur propre λ notée $\mu(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.

20.9 **Polynômes et éléments propres**

① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$ tels que $\varphi(u) = \lambda u$. Alors :

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi^k(u) = \lambda^k u$,

(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\varphi)(u) = \mathrm{P}(\lambda)u$. [Remarque : $\mathrm{P}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]

② Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mathrm{U}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}$. Alors :

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k\mathrm{U} = \lambda^k \mathrm{U}$,

(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{U} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{U}$. [Remarque : $\mathrm{P}(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]

20.10 **Polynômes annulateurs et valeurs propres**

① Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors les valeurs propres de φ sont parmi les racines de P.

② Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les valeurs propres de M sont parmi les racines de P.

20.11 **Théorème de Cayley-Hamilton**

① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors $\chi_\varphi(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

② Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0_n$.

20.12 **À propos des sous-espace propre** version endomorphisme
- Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $\dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f - \lambda id_{\mathrm{E}})$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

20.13 **À propos des sous-espace propre** version matrice
- Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

20.14 **Condition suffisante de diagonalisabilité**
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Soit f un endomorphisme de E. Si $Card(\mathrm{Sp}(\mathrm{F})) = dim(\mathrm{E})$, alors f est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.
- Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $Card(\mathrm{Sp}(\mathrm{M})) = n$, alors M est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.
- Si χ_f (resp. χ_{M}) est scindé à racines simples, alors f (resp. M) est diagonalisable.

20.15 **Théorème général de diagonalisabilité** version endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit f un endomorphisme de E. Il y a équivalence entre :
- f est diagonalisable ;
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ;
- les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E ;
- $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = \dim(\mathrm{E})$;
- χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;
- il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de f.

20.16 **Théorème général de diagonalisabilité** version matrice

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :
- M est diagonalisable ;
- il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de colonnes propres de M ;
- les sous-espaces propres de M sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = n$;
- χ_{M} est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}), \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;
- il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de M.

20.17 La matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.
- M est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

20.18 Un endomorphisme φ de E est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentant φ est triangulaire.
- φ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

• Dans un $\mathbb{C}-$espace vectoriel (de dimension finie) tout endomorphisme est trigonalisable.

20.19 **Cas des matrices symétriques réelles**
Toute matrice symétrique réelle S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, toutes ses valeurs propres sont réelles et χ_S est scindé sur $\mathbb{R}$.

21 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, muni d'un produit scalaire à partir de 3.

21.1 **Produit scalaire & norme euclidienne associée**
Un *produit scalaire* $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto \langle u,v \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire vérifiant :

(a) φ est *linéaire à gauche* :
$\forall (u,v,w) \in \mathbb{E}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda u + v, w) = \lambda \varphi(u,w) + \varphi(v,w)$;

(b) φ est *symétrique* :
$\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2,\ \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$;
1. et 2. prouvent que φ est bilinéaire symétrique (opératoirement parlant $\langle .,. \rangle$ est distributif et commutatif).

(c) φ est *positive* :
$\forall u \in \mathbb{E},\ \varphi(u,u) \geq 0$;

(d) φ est *définie* :
$\forall u \in \mathbb{E},\ (\varphi(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0)$;
3. et 4. prouvent que φ est définie positive.

La *norme euclidienne* associée est
$$||.|| : E \to \mathbb{R}, u \mapsto \sqrt{\langle u,u \rangle}.$$

21.2 **Produits scalaires usuels**

☞ Canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,

de norme associée : $||(x_1,\ldots,x_n)|| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale.

☞ Canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X,Y \rangle = X^T.Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(noter que $X^T Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$)

de norme associée : $||X|| = \sqrt{X^T.X} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est orthonormale.

☞ Canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A,B \rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T.B\right) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$

de norme associée : $||A|| = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(()\,A^T.B\right)} = \sqrt{\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$.

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

☞ Sur $\mathcal{C}([a\,;\,b],\mathbb{R})$: $\langle f,g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.

21.3 **Identités remarquables**... *le p.s. est commutatif et distributif*
$\forall (u,v) \in E^2, ||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u,v \rangle + ||v||^2$;
$\forall (u,v) \in E^2, \langle u,v \rangle = \dfrac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right)$.
$\forall (u,v) \in E^2, \langle u,v \rangle = \dfrac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$.

21.4 **Théorème de Pythagore**
• $u \perp v \Longleftrightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.
• Si la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale, alors $\left|\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i\right|\right|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$.

21.5 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
$$\forall (u,v) \in E^2,\ |\langle u,v \rangle| \leq ||u||\,||v||,$$
avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires.
On utilise souvent cette inégalité en l'élevant au carré (évitant les $|.|$ et $\sqrt{.}$) :
$$\forall (u,v) \in E^2,\ \langle u,v \rangle^2 \leq ||u||^2\,||v||^2.$$

21.6 **Inégalité triangulaire**
$$\forall (u,v) \in E^2,\ ||u+v|| \leq ||u|| + ||v||,$$
avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires *de même sens*, c'est-à-dire : $\exists k \in [0\,;\,+\infty[, v = ku$ ou $u = kv$.

21.7 **Vecteurs, familles, sous-espaces ortogonaux**
① Par définition : $u \perp v \Longleftrightarrow \langle u,v \rangle = 0$.
② La famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.
③ La famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est orthonormale si ses vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux.
Autrement dit :
$(u_1,\ldots,u_p)$ est orthonormale ssi $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\quad \langle u_i,u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

④ Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si
$$\forall (u,v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, u \perp v = 0.$$

21.8 Orthogonal d'un sous-espace

Soit F un sous-espace de E. On appelle *orthogonal de F*, noté $\mathrm{F}^\perp$, l'ensemble
$$\mathrm{F}^\perp \overset{\text{déf.}}{=} \left\{u \in \mathrm{E} | \forall v \in \mathrm{F}, u \perp v\right\}.$$
$\mathrm{F}^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.

21.9 Liberté des familles orthogonales et orthonormales

① Toute famille orthogonale de vecteurs *tous non nuls* est libre.

② Toute famille orthonormale de vecteurs est libre.

21.10 Caractérisation de l'orthogonalité de sous-espaces

Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_q)$. Alors
$$\mathrm{F} \perp \mathrm{G} \text{ si, et seulement si, } \forall (i,j) \in [\![1\,;\, p]\!] \times [\![1\,;\, q]\!], \quad u_i \perp v_j.$$

21.11 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs. On pose :

① $e_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$;

② successivement pour tout $k \in [\![2\,;\, p]\!]$, $\quad e_k = \dfrac{u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle \, e_i}{\left|\left| u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle \, e_i \right|\right|}$.

Alors

① la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale,

② $\forall k \in [\![1\,;\, p]\!], \quad \mathrm{Vect}\big(u_1, \dots, u_k\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1, \dots, e_k\big)$.

21.12 Espace euclidien

On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}-$espace vectoriel de *dimension finie* muni d'un produit scalaire.

21.13 Existence et intérêt des bases orthonormales

① Dans tout espace euclidien, il existe des bases orthonormales.

② Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E. Alors :

•*coordonnées et norme d'un vecteur :*
$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i \text{ et } ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

•*produit scalaire de deux vecteurs*
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, \langle y, e_i \rangle,$$
$$\langle x, y \rangle = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{Y} \text{ et } ||x|| = \sqrt{\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X}} \text{ si } \mathrm{X} = \mathcal{M}_\mathcal{B}(x) \text{ et } \mathrm{Y} = \mathcal{M}_\mathcal{B}(y).$$

•*matrice d'un endomorphisme*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{M} = (m_{i,j}) = \mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$. Alors :
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!], \qquad m_{i,j} = \langle f(e_j, e_i \rangle.$$

21.14 LE supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien, $\mathrm{F}^\perp$, appelé *supplémentaire orthogonal de F*, est caractérisé par les propriétés *équivalentes* suivantes :

① $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ et $\mathrm{F} \perp \mathrm{F}^\perp$;

② $\mathrm{F} \perp \mathrm{F}^\perp$ et $\dim\left(\mathrm{F}^\perp\right) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F})$;

③ pour tout sous-espace G de E, on a : $\mathrm{G} \perp \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$;

④ en concaténant une base orthogonale de F et une base orthogonale de $\mathrm{F}^\perp$, j'obtiens une base orthogonale de E.

21.15 Les supplémentaires orthogonaux vont par paire

$\left(\mathrm{F}^\perp\right)^\perp = \mathrm{F}$, ou encore : $\left(\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp\right) \iff \left(\mathrm{F} = \mathrm{G}^\perp\right)$.

21.16 Projection orthogonale

Soit F sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E. La projection orthogonale sur F notée p_F est la projection sur F dans la direction de (ou parallèlement à) $\mathrm{F}^\perp$.

En conséquence des propriétés générales des projecteurs :
$$\mathrm{Im}(p_\mathrm{F}) = \mathrm{SEP}(p_\mathrm{F}, 1) = \mathrm{F} \text{ et } \mathrm{Ker}(p_\mathrm{F}) = \mathrm{SEP}(p_\mathrm{F}, 0) = \mathrm{F}^\perp.$$

21.17 Calcul du projeté orthogonal d'un vecteur

Soit p_F la projection orthogonale sur $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. On a :

① $v = p_\mathrm{F}(u) \iff \begin{cases} v \in \mathrm{F} \\ v - u \in \mathrm{F}^\perp \end{cases}$

② pour toute base orthonormale $(e_1, \dots, e_m)$ de F, $p_\mathrm{F}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle u, e_i \rangle \, e_i$.

21.18 Inégalité de Bessel
$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad ||p_\mathrm{F}(u)|| \leq ||u||.$$

21.19 Meilleure approximation en norme

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur de E. Alors $\min\limits_{v \in \mathrm{F}} ||u - v||$ existe et est atteint uniquement pour $v = p_\mathrm{F}(u)$:
$$\forall v \in \mathrm{F}, \qquad \Big(v = p_\mathrm{F}(u) \quad \iff \quad ||u - v|| = \min_{w \in \mathrm{F}} ||u - w||\Big)$$

21.20 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur de E. Alors la distance de u à F, notée $d(u, \mathrm{F})$ est définie par
$$d(u, \mathrm{F}) = \min_{v \in \mathrm{F}} ||u - v|| = ||u - p_\mathrm{F}(u)||.$$

22 Isométries vectorielles, automorphisme orthogonaux et matrices orthogonales

E désigne un espace euclidien.

22.1 **Isométries vectorielles et automorphismes orthogonaux**

$f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est une isométrie vectorielle ou un automorphisme orthogonal si : $\forall u \in \mathrm{E}, ||f(u)|| = ||u||$.

On note O(E) l'ensemble des endomorphismes orthogonaux, appelé groupe orthogonal de E.

22.2 **Caractérisation**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f \in \mathrm{O(E)}$ *i.e.* f conserve la norme ;
- $\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2, \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, *i.e.* f conserve le produit scalaire ;
- f transforme une base orthonormale en une base orthonormale ;
- f transforme toute base orthonormale en toute base orthonormale.

22.3 **Propriété du groupe orthogonal**

- Si $f \in \mathrm{O(E)}$, alors f est bijective et $f^{-1} \in \mathrm{O(E)}$ (donc $\mathrm{O(E)} \subset \mathcal{GL}(\mathrm{E})$).
- Si $f, g \in \mathrm{O(E)}$ alors $f \circ g \in \mathrm{O(E)}$.

22.4 **Valeurs propres et sous-espaces stables d'une isométrie vectorielle**

- $\big(f \in \mathrm{O(E)} \text{et } \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\big) \Rightarrow |\lambda| = 1$.
- Si $f \in \mathrm{O(E)}$ et F est un sous-espace stable par f alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable par f. De plus, dans une base adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus^\perp \mathrm{F}^\perp$, la matrice représentant f est diagonale par blocs.

22.5 **Matrice orthogonale**

Une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$, autrement si M est inversible et $\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^\mathrm{T}$.

22.6 **Groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$**

L'ensemble des matrices orthogonales forment le *groupe orthogonal* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(\mathrm{M}) = \pm 1$.

22.7 **Changements de bases orthonormales**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux matrices orthonormales d'un espace euclidien E. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est orthogonale.

22.8 **Caractérisation des matrices orthogonales, lien avec les isométries vectorielles**

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de l'espace euclidien E de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{M} = \mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$.

Il y a équivalence entre :

① $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (*i.e.* $\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$) ;
② $f \in \mathrm{O(E)}$;
③ *les colonnes de* M *forment une base orthonormale de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire canonique ;*
④ M *est une matrice de passage entre deux bases orthonormales.*

22.9 **Déterminant d'une isométrie vectorielle**

Si $f \in \mathrm{O(E)}$ alors $\det(f) = \pm 1$.

22.10 **Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, groupe des isométries directes SO(E)**

Le groupe spécial orthogonal est $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \det(\mathrm{M}) = 1\}$.

Le groupe des isométries directes est $\mathrm{SO(E)} = \{f \in \mathrm{O(E)}, \det(f) = 1\}$.

22.11 **Orientation et bases orthonormées**

- Deux B.O.N. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation
si, et seulement si, $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$
si, et seulement si $\det(\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = 1$.
- Deux B.O.N. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation si, et seulement si, les applications $\det_\mathcal{B} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\det_{\mathcal{B}'} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ coïncident.

22.12 **Orientation d'un espace euclidien**

Pour orienter E,

– on choisit une B.O.N. de référence $\mathcal{B}$;
– alors toute B.O.N. $\mathcal{B}'$ est dite *directe* si elle définit la même orientation que $\mathcal{B}$, *indirecte* sinon.

22.13 **Base orthonormale directe/indirecte**

Soit E orienté par une B.O.N. $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}'$ une B.O.N. et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a déjà $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

– $\mathcal{B}'$ est une B.O.N. directe ssi $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ssi $\det(\mathrm{P}) = 1$;
– $\mathcal{B}'$ est une B.O.N. indirecte ssi $\mathrm{P} \notin \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ssi $\det(\mathrm{P}) = -1$.

22.14 **Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$**

L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle définie par la base canonique.

23 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

23.1 **Endomorphismes autoadjoints**

Un endomorphisme φ d'un espace euclidien est un *endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)* si :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \big(\varphi(x) \mid y\big) = \big(x \mid \varphi(y)\big).$$

On note $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

23.2 **Structure de $\mathcal{S}(\mathrm{E})$**

L'ensemble $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

23.3 **Projections orthogonales, symétries orthogonales**

Les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont des endomorphismes autoadjoints.

23.4 **Caractérisation matricielle**

• Soit $\mathcal{B}$ une BASE ORTHORNOMALE de E. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme autoadjoint si, et seulement si, $mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique.

• Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
Alors $\varphi : \mathcal{S}(\mathrm{E}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), f \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(f\big)$ est un isomorphisme.

• Soit $n = \dim(\mathrm{E})$. Alors $\dim(\mathcal{S}(\mathrm{E})) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

23.5 **Éléments propres des endomorphismes autoadjoint et des matrices symétriques réelles**

Soit f un endomorphisme autoadjoint de E, respectivement M une matrice symétrique réelle.

① Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
② Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
③ Toutes les valeurs propres sont réelles, donc le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

23.6 **Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints**

Tout endomorphisme autoadjoint f de l'espace euclidien E est diagonalisable.

De plus, ses sous-espaces propres sont supplémentaires et orthogonaux, et il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f (obtenue par exemple en concaténant des bases orthonormales des sous-espaces propres).

23.7 **Théorème spectral pour les matrices symétriques réelles**

Toute matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. De plus, ses sous-espaces propres sont supplémentaires et orthogonaux, et :

$$\exists \mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{MP} \text{ est diagonale.}$$

N.B. : $\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}^{-1}$:-)

23.8 **Caractérisation des projecteurs orthogonaux ou symétries orthogonales**

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E, muni d'une BASE ORTHONORMALE $\mathcal{B}$. Soit $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

• Il y a équivalence entre :

① f est un projecteur orthogonal de E,
② $f^2 = f$ et $f \in \mathrm{S(E)}$,
③ $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$ et $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}$.

• Il y a équivalence entre :

① f est une symétrie orthogonale de E,
② $f^2 = id_{\mathrm{E}}$ et $f \in \mathrm{S(E)}$,
③ $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}$.

24 Matrices positives, définies positives

24.1 **Matrices symétriques positives, définies positives** Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

① M est positive si, et seulement si, $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{MX} \geqslant 0$;
② M est définie positive si, et seulement si, $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{MX} > 0$.

24.2 **Développement à l'aide des coefficients**

En notant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j \leqslant n}$, on a

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{MX} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j.$$

24.3 **Notation**

L'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

24.4 **Caractérisation spectrale**

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
① $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp(M)} \subset [\,0\,;\ +\infty[$; ② $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp(M)} \subset \,]\,0\,;\ +\infty[$.

24.5 **Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs**

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. On dit que :

① φ est positif si, et seulement si, $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \big(\varphi(x) \mid x\big) \geqslant 0$;
② φ est défini positif si, et seulement si, $\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}, \quad \big(\varphi(x) \mid x\big) > 0$.

24.6 **Notation**

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (respectivement définis positifs) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note $\mathcal{S}^+(\mathrm{E})$ (respectivement $\mathcal{S}^{++}(\mathrm{E})$).

24.7 **Caractérisation spectrale** Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$.
① $\varphi \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(\varphi) \subset [0\,;\ +\infty[$;
② $\varphi \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(\varphi) \subset]0\,;\ +\infty[$.

25 Probabilités discrètes

25.1 **Dénombrabilité**
Un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$. Un ensemble est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

25.2 **Exemples**
(i) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables, Toute partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ est au plus dénombrable.
(ii) Tout ensemble pouvant s'écrire $\{x_i / i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ est au plus dénombrable.

25.3 **Produit cartésien d'ensembles dénombrables**
Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

25.4 **Tribu, espace probabilisable**
On appelle *tribu* $\mathcal{T}$ sur Ω sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :
① $\emptyset \in \mathcal{T}$;
② Si $A \in \mathcal{T}$ alors $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$;
③ pour toute suite dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{T}$.
Tout couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω est un *espace probabilisable*, tout élément de $\mathcal{T}$ est un événement.

25.5 **Propriétés d'une tribu**
Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
(i) $\Omega \in \mathcal{T}$;
(ii) pour toute suite dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{T}$.
(iii) $(A, B) \in \mathcal{T}^2 \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \setminus B \in \mathcal{T}$.

25.6 **Vocabulaire de la modélisation**
Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisé.

(a) Ω : univers des possibles, ensemble des résultats possibles de l'expérience ;
(b) $A \in \mathcal{T}$: événement ;
(c) Réalisation d'un événement A : l'événement A est *réalisé* si le résultat ω de l'expérience appartient à A ;
(d) $\overline{A} = \Omega \setminus A$: contraire de A ;
(e) Ω : événement certain ;
(f) $\emptyset$: événement impossible ;
(g) $A \cap B$: et, « A et B se réalisent simultanément » ;
(h) $A \cup B$: ou inclusif, « A ou/et B se réalise » ;
(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: « l'un (au moins) des événements A_n se réalise », ou encore « il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n se réalise » ;
(j) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$: « tous les événements A_n se réalisent » , ou encore « pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n se réalise » ;
(k) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$: « A se réalise mais pas B » ;
(l) $A \cap B = \emptyset$: A et B sont incompatibles ;
(m) $A \subset B$: « A entraîne B », i.e. la réalisation de A entraîne celle de B ;
(n) si $\mathbb{P}(A) = 1$ alors A est **presque-sûr** (ou presque-certain) ;
(o) si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors A est **négligeable** (ou presque-impossible).

25.7 **Probabilité, espace probabilisé**
Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une probabilité $\mathbb{P}$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \mapsto [0\,;\ 1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *axiome de certitue* ;
(ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements *deux à deux* incompatibles, la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

C'est la $\sigma-$*additivité.*
Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé.*

25.8 **Propriété d'une probabilité**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. A et B désignent des événements ($(A, B) \in \mathcal{T}^2$).
(i) Si $A = \{\omega_i \in \Omega / i \in I \subset \mathbb{N}\}$, alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ et cette somme existe toujours et ne dépend pas de l'ordre de sommation.
(ii) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
(iii) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
(iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
(v) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (*croissance de la probabilité*).
(vi) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

25.9 **Continuité monotone**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
(i) Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'événements, i.e. telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_n \subset A_{n+1}.$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

(i) Soit $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite décroissante d'événements, i.e. telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n.$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

25.10 **Sous-additivité**

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge.

Alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.

25.11 **Probabilité conditionnelle**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement de probabilité *non nulle*.

Alors : $\mathbb{P}_\mathrm{B} : \mathcal{T} \to [0\,;\,1], \mathrm{A} \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$ est une probabilité, appelée *probabilité conditionnelle sachant B*.

$\mathbb{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A})$ se note aussi $\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$.

25.12 **Formule de probabilités composées**

Pour toute famille d'événements $(\mathrm{A}_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{1\leq k\leq n-1} \mathrm{A}_k\right) > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq k\leq n} \mathrm{A}_k\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_3)\ldots\mathbb{P}_{\mathrm{A}_1\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{n-1}}(\mathrm{A}_n).$$

25.13 **Système complet d'événements**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Un système complet d'événements est une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ où $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ telle que :

(i) $\forall i \neq j, \qquad \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset, \qquad$ (ii) $\bigcup\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \Omega$.

Autrement dit, à chaque réalisation de l'expérience, on est sûr que un et un seul des A_i se réalise.

25.14 **Système quasi-complet d'événements**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Un système complet d'événements est une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ où $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ telle que :

(i) $\forall i \neq j, \qquad \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset, \qquad$ (ii) $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i) = 1$.

Autrement dit, à chaque réalisation de l'expérience, on est presque-sûr que un et un seul des A_i se réalise.

25.15 **Formule des probabilités totales**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit un système complet (ou quasi-complet) d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors, pour tout événement $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$, $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_n)$ converge et

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B})$$

en convenant que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = 0$.

25.16 **Indépendance d'événements**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(i) Les événements A et B de $\mathcal{T}$ sont *indépendants* si $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$.

(ii) Les n événements $(\mathrm{A}_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}$ de $\mathcal{T}$ sont *deux à deux indépendants* si pour tous $i \neq j$ de $[\![1\,;\,n]\!]$, A_i et A_j sont indépendants.

(ii) Les n événements $(\mathrm{A}_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}$ de $\mathcal{T}$ sont *mutuellement indépendants* si, pour toute partie $\mathrm{I} \subset [\![1\,;\,n]\!]$, $\qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$.

Á défaut de précision dans l'énoncé, l'indépendance d'une famille est l'indépendance mutuelle.

26 Variables aléatoires discrètes

26.1 **Variable aléatoire réelle**

Une variable aléatoire discrète X sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ est une fonction définie sur Ω telle que l'univers image $\mathrm{X}(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et telle que pour tout x de $\mathrm{X}(\Omega)$, l'image réciproque $\mathrm{X}^{-1}(\{x\}) \overset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega, \mathrm{X}(\omega) = x\}$ soit un élément de $\mathcal{T}$ (c'est-à-dire un événement).

Pour toute partie $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\Omega)$, l'ensemble $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{U}) \overset{\text{déf.}}{=} \{\omega \in \Omega, \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{U}\}$ est un événement.

L'événement $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{U})$ est noté $[\mathrm{X} \in \mathrm{U}]$ ou $(\mathrm{X} \in \mathrm{U})$ ou $\{\mathrm{X} \in \mathrm{U}\}$.

Si par exemple $\mathrm{U} =]-\infty\,;\,a]$, $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{U})$ se notera plus simplement $[\mathrm{X} \leqslant a]$.

26.2 **Système complet engendré par une VARD**

En notant $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n / n \in \mathrm{I}\}$ où $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$, la famille $\big([\mathrm{X} = x_n]\big)_{n\in\mathrm{I}}$ est un système complet d'événements. En particulier, $\sum\limits_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}([\mathrm{X} = x]) = \sum\limits_{n\in\mathrm{I}} \mathrm{P}([\mathrm{X} = x_n]) = 1$.

26.3 **Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles**

Loi conjointe de X *et* Y *ou du couple* (X, Y) *:*

donnée des $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = y) = \mathbb{P}([\mathrm{X} = x] \cap [\mathrm{Y} = y]) = \mathbb{P}\big((\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (x, y)\big)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega)$.

Lois marginales :

ce sont simplement les lois de X et de Y.

Loi conditionnelle de Y *sachant* $[X = x]$ *:*

donnée des $P_{[X=x]}(Y = y)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.

Relations entre ces lois : par la formule des probabiltés totales,

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y),$$

et, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}_{[X=x]}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x)$$

26.4 **VAD indépendantes**

Dire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes signifie
$\forall(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$.

26.5 **Propriétés d'indépendance**

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f et g telles que $f(X)$ et $g(Y)$ soient bien définies, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

26.6 **Variables aléatoires mutuellement indépendantes**

Les VAD $(X_n)_{n \in I}$ sont (mutuellement) indépendantes si pour tout $J \subset I$ fini et toute famille de parties $(A_j)_{j \in J}$ telles que $A_j \subset X_j(\Omega)$ pour tout j,

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{j \in J} [X_j \in A_j]\big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in A_j)$$

26.7 **Suite de VA i.i.d**

Lorsqu'on a une suite de variables aléatoires toutes de même loi et mutuellement indépendantes, on parle de suite de V.A. « i.i.d. », acronyme de « indépendantes identiquement distribuées ».

26.8 **Espérance**

On note $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ l'univers image de la variable aléatoire X. Dire que la variable aléatoire X est d'espérance finie signifie que la série de terme général $x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument convergente**. Si tel est le cas, l'espérance de la variable aléatoire X est la somme de cette série, notée $\mathbb{E}(X)$.

Dans la pratique, en probabilités et uniquement en probabilités (donc pas en analyse), on est autorisé à écrire

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{i \in I} |x_i| \, \mathbb{P}(X = x_i) = \dots$$

sans avoir au préalable justifier la convergence de la série, sachant qu'en cas de divergence, il s'agira d'une divergence vers $+\infty$. Il faudra penser à l'issue du calcul à observer que la somme est finie, ou pas.

26.9 **Espérance par anti-répartition**

Dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X)$ est finie si, et seulement si, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge, et dans ce cas :$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

26.10 **Transfert**

Soit f une fonction définie sur l'univers image $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série de terme général $f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ converge **absolument**. Si c'est le cas, on obtient alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n).$$

26.11 **Transfert pour un couple**

De même, en cas de convergence absolue, alias de sommabilité de la famille double $(f(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)}$

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} f(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

où la somme est la somme d'une série double.

En particulier,

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

26.12 **Linéarité de l'espérance, positivité, croissance**

Si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors $\mathbb{E}(aX + b)$ existe et vaut $a\mathbb{E}(X) + b$.

Si $\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $\mathbb{E}(X_i)$ existent, alors $\mathbb{E}\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\big)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(X_i)$.

Si $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq X(\omega)$ et $\mathbb{E}(X)$ existe, alors $0 \leq \mathbb{E}(X)$.

Si $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$ et $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

26.13 **Espérance du produit de VARD indépendantes**

Si X et Y sont indépendantes et possèdent une espérance, alors XY possède une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

26.14 **Moments d'ordre** 2

Si X^2 est d'espérance finie, alors X l'est aussi.

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi.

26.15 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi, et

$$\mathbb{E}(\mathrm{XY})^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)$$

avec égalité si, et seulement si, $\exists\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\mathrm{Y} = \lambda\mathrm{X}) = 1$.

26.16 **Variance, écart-type**

Si X^2 est d'espérance finie, alors $(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2$ aussi et

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}\big((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\big) \text{ et } \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})}$$

En particulier, comme $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}\big((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\big)$, $\mathbb{V}(\mathrm{X}) \geqslant 0$.

26.17 **Transformation affine, formule de König-Huygens**

$\forall(a, b) \in \mathbb{R}, \mathbb{V}(a\mathrm{X} + b) = a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$ dès que $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ existe.

$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \big(\mathbb{E}(\mathrm{X})\big)^2$ dès que $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$ existe.

26.18 **Interprétation de la nullité de la variance**

$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathbb{E}(\mathrm{X})) = 1$: X presque-sûrement égale à $\mathbb{E}(\mathrm{X})$, donc constante.

26.19 **Covariance**

Sous réserve d'existence (en particulier dès que X^2 et Y^2 possèdent une espérance) :

$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}\big((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}))\big)$.

26.20 **Formule de König-Huygens**

Sous réserve d'existence (en particulier dès que X^2 et Y^2 possèdent une espérance) :

$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathrm{XY}) - \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

26.21 **Bilinéarité et symétrie de la covariance**

Sous réserve d'existence :

$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}), \quad \mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathbb{V}(\mathrm{X})$,

$\mathrm{Cov}(a\mathrm{X} + b, c\mathrm{Y} + d) = ac\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

$$\mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\mathrm{X}_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j\mathrm{Y}_j\Big) = \sum_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} \lambda_i\mu_j\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j)$$

26.22 **Variance d'une somme**

Sous réserve d'existence : $\mathbb{V}(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{V}(\mathrm{Y}) + 2\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$,

et formule polaire : $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \dfrac{1}{2}\big(\mathbb{V}(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) - \mathbb{V}(\mathrm{X}) - \mathbb{V}(\mathrm{Y})\big)$.

26.23 **Cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes**

Si $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont n VARD deux à deux indépendantes,

$\forall i \neq j, \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j) = 0$,

$\mathbb{V}\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i)$.

26.24 **Série génératrice**

La série génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans N est la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)t^n$. Son rayon de convergence vaut au moins 1.

26.25 **Fonction génératrice**

La fonction génératrice de X est alors la fonction

$$\mathrm{G}_\mathrm{X} : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)t^n = \mathbb{E}(t^\mathrm{X}).$$

26.26 **Caractérisation de la loi**

Si $\mathrm{G}_\mathrm{X} = \mathrm{G}_\mathrm{Y}$ sur $[0\,;\,1]$, alors X et Y suivent la même loi.

26.27 **Lien avec les moments**

L'existence de $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ équivaut à la dérivabilité de G_X en 1. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1).$$

☞ On pourra remarquer qu'en itérant le procédé, on peut montrer que l'existence de $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ équivaut à l'existence de $\mathrm{G}''_\mathrm{X}(1)$, et dans ce cas, $\mathrm{G}''_\mathrm{X}(1) = \mathbb{E}(\mathrm{X}(\mathrm{X} - 1))$ donc

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \big(\mathrm{G}''_\mathrm{X}(1) + \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)\big) - \big(\mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)\big)^2.$$

26.28 **Fonction génératrice d'une somme de VARD indépendantes**

Pour X et Y sont indépendantes, la fonction génératrice $\mathrm{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}$ vaut $\mathrm{G}_\mathrm{X}\mathrm{G}_\mathrm{Y}$.

26.29 **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev**

Inégalité de Andreï Andreïevitch Markov : soit X positive possédant une espérance, alors

$$\forall\alpha > 0,\ \mathbb{P}(\mathrm{X} \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X})}{\alpha}$$

Inégalité de Jules Irénée Bienaymé–Pafnouti Tchebychev : soit X possédant un moment d'ordre 2 (i.e. $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$ existe), alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\big|\mathrm{X}_n - \mathbb{E}(\mathrm{X}_n)\big| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

26.30 **Loi faible des grands nombres**

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose que $(\mathrm{X}_1)^2$ est d'espérance finie. On note $m = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ et $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0, \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Interprétation : la moyenne expérimentale est probablement proche de la moyenne théorique.

26.31 **Décompositions en somme et stabilités remarquables (hors programme)**

• Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$, X peut être vue comme la somme de n variables $(\mathrm{X}_i)_{1\leq i\leq n}$ indépendantes, indicatrices de l'événement *« la i-ème épreuve est un succès »*, toutes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

• Si X_1, X_2, …, X_k sont k variables *indépendantes* de loi binomiale respectivement $\mathcal{B}(n_1, p)$, $\mathcal{B}(n_2, p)$, …, $\mathcal{B}(n_k, p)$ (le même paramètre p pour toutes), alors $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_k$ suit $\mathcal{B}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$.

• Si X_1, X_2, …, X_k sont k variables *indépendantes* de loi de Poisson respectivement $\mathcal{P}(\lambda_1)$, $\mathcal{P}(\lambda_2)$, …, $\mathcal{P}(\lambda_k)$, alors $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_k$ suit $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k, p)$.

26.32 **Minimum de deux géométrique indépendantes (hors programme)**

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$ sont indépendantes, alors $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(p + q - pq)$. En effet, on dispose de deux pièces, l'une amenant pile avec la probabilité p, l'autre avec la probabilité q. On répète des lancers simultanés des deux pièces, et on note Z le rang du premier succès S : « *obtenir un pile sur l'une (au moins) des deux pièces* ». On a clairement $Z = \min(X, Y)$ mais aussi $Z \sim \mathcal{G}\big(\mathbb{P}(S)\big)$... et $\mathbb{P}(S) = p + q - pq$.

Lois discrètes usuelles

Nom	Paramètre(s)	Logo	Support $X(\Omega) =$	Loi : $\forall k \in X(\Omega)$ $\mathbb{P}(X = k) =$	Espérance $\mathbb{E}(X) =$	Variance $\mathbb{V}(X) =$	Fonction génératrice $G_X : t \mapsto$	Particularité
Uniforme	$\{x_1, \ldots, x_n\}$	$\mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$	$\{x_1, \ldots, x_n\}$	$\frac{1}{n}$	*Pas de*	*formule*	*générale* (☞ *définitions*)	Situation d'équiprobabilité
Uniforme	$\{1, \ldots, n\}$	$\mathcal{U}(\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)$	$\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\begin{cases} \frac{t}{n} \times \frac{1-t^n}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$	Situation d'équiprobabilité
Bernoulli	$p \in \,]0\,;\,1[$	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1-p & \text{si } k = 0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$(1-p) + pt$	X indicatrice de l'événement $[X = 1]$, appelé *succès*
Binomiale	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \,]0\,;\,1[$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0\,;\, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$\big((1-p) + pt\big)^n$	Nombre de succès en n épreuves de Bernoulli indépendantes
Géométrique	$p \in \,]0\,;\,1[$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	Rang du 1er succès dans un schéma de Bernoulli
Poisson	$\lambda \in \,]0\,;\,+\infty[$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	Approximation de $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ quand n devient grand