Étude de la fonction gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler joue un rôle essentiel en analyse et en probabilité et apparaît dans de ***nombreux sujets de concours****.*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

On appelle *fonction gamma d'Euler* la fonction définie par :

$$\forall x \in \left]0\,;\ +\infty\right[,\quad \Gamma(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

2. (a) Montrer que : $\forall x \in \left]0\,;\ +\infty\right[,\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3. (a) Déterminer la valeur de $\Gamma(1/2)$ à l'aide de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)$ à l'aide de puissances et de factorielles.

4. (a) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0\,;\ +\infty\right[$ et exprimer ses dérivées successives.

Indication : on pourra commencer par raisonner sur un segment $[a\,;\ b]$ inclus dans $\left]0\,;\ +\infty\right[$ et montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(b) Justifier que Γ est strictement convexe, i.e que $\Gamma'' > 0$.

(c) En déduire les variations de Γ ainsi que l'existence d'un x_0 de $\left]1\,;\ 2\right[$ tel que

$$\forall x \in \left]0\,;\ +\infty\right[\setminus \{x_0\},\quad \Gamma(x) > \Gamma(x_0).$$

5. Déduire de 2.a) un équivalent de $\Gamma(x)$ en lorsque x tend vers 0

6. Représenter graphiquement la courbe de Γ.

Corrigé

Remarques essentielles

① Par **définition**, lorsque $t > 0$ et x sont des réels, $t^x \overset{déf}{=} \mathrm{e}^{x\ln t}$, ce qui fait que **l'intégrale définissant Γ est impropre en 0**.

② Conséquence de ①, $\dfrac{\partial t^{x-1}}{\partial x} = \ln(t)t^{x-1}$.

③ Comment majorer t^{x-1} où $x \in [a\,;\ b]$ et $t > 0$, avec $a < 1 < b$?
$x \in [a\,;\ b] \Rightarrow a-1 \leqslant x-1 \leqslant b-1 \Rightarrow ??? \leqslant (x-1)\ln(t) \leqslant ???$

Cela dépend du signe de $\ln(t)$:
- si $t \geqslant 1$, $(a-1)\ln(t) \leqslant (x-1)\ln(t) \leqslant (b-1)\ln(t)$ puis $t^{a-1} \leqslant t^{x-1} \leqslant t^{b-1}$;
- si $t < 1$, $(a-1)\ln(t) \geqslant (x-1)\ln(t) \geqslant (b-1)\ln(t)$ puis $t^{a-1} \geqslant t^{x-1} \geqslant t^{b-1}$.

On pourra majorer par exemple par

$$0 \leqslant t^{x-1} \leqslant \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t < 1 \\ t^{b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

ou encore

$$0 \leqslant t^{x-1} \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}$$

1. Soit $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R} \times \left]0\,;\ +\infty\right[$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et **positive** sur $\left]0\,;\ +\infty\right[$ et $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$.

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x-1 > -1$, i.e. $x > 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

- De plus : $t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $t^{x+1} = o\left(\mathrm{e}^t\right)$, donc $f(x,t) = o\left(1/t^2\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ converge.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe si, et seulement si, $x > 0$.

2. **a)** Soit $x \in \left]0\,;\ +\infty\right[$. $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Effectuons une intégration par parties avec : $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0\,;\ +\infty\right[$ et

$$-t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ et } -t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

b) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$, et par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

3. **a)** L'*intégrale de Gauss* donne par changement $\mathcal{C}^1$ bijectif

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \overset{u=t^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) \text{ donc } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

b) En itérant la formule de 3.a),

$$\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big) = \big(n-\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big) = \frac{2n-1}{2}\big(n-\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{3}{2}\big)$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2}(n-\frac{5}{2})\Gamma(n-\frac{5}{2}) = \dots$$
$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2^n}\Gamma(1/2) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}$$

4. **a)** Pour $t \in]0\,;\,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;\,+\infty[$ avec
$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

• Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$ car

(i) prenons $\alpha \in]1-x\,;\,1[$. $t^\alpha\big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \big(\ln(t)\big)^n t^{\alpha+x-1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$,

donc $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, ce qui assure l'intégrabilité sur $]0\,;\,1]$,

(ii) $t^2\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, ce qui assure l'intégrabilité sur $[0\,;\,+\infty[$.

• Soit $[a\,;\,b] \subset]0\,;\,+\infty[$.
$$\forall x \in [a\,;\,b], \forall t \in]0\,;\,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \big|\ln(t)\big|^n\big(t^{a-1}+t^{b-1}\big)\mathrm{e}^{-t} \overset{\text{déf.}}{=} \varphi_{[a\,;\,b]}(t)$$
et $\varphi_{[a\,;\,b]}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$ (par intégrabilité de $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t)$ et $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(b,t)$)

Par domination, Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[a\,;\,b] \subset]0\,;\,+\infty[$, donc sur $]0\,;\,+\infty[$, et on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0\,;\,+\infty[, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty}\big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

b) $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty}\ln^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t > 0$ car $t \mapsto \ln^2(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} > 0$ pour tout $t \in]0\,;\,+\infty[\setminus\{1\}$, donc Γ est strictement convexe.

c) Donc Γ' est strictement croissante. Or $\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2)$, donc le théorème de Rolle assure que Γ' s'annule (au moins une fois) dans $]1\,;\,2[$. Par stricte croissance, Γ' ne s'annule qu'une fois. Notons x_0 le réel en lequel Γ' s'annule. Alors Γ' est strictement négative sur $]-\infty\,;\,x_0[$ et strictement positive sur $]x_0\,;\,+\infty[$. Donc Γ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0\,;\,+\infty[$ et
$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\setminus\{x_0\}, \quad \Gamma(x) > \Gamma(x_0).*$$

5. $\forall x > 0, \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, or $\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \Gamma(1) = 1$ par continuité de Γ en 1. Donc
$$\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

6. Traçons avec le script suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math as mt
import numpy as np

xmax=4.3
x=list(np.linspace(.1,xmax,100))
y=[mt.gamma(t) for t in x]
plt.plot(x,y,linewidth=2,label='$y=\Gamma(x)$')
y=[1/t for t in x]
plt.plot(x,y,'--',color='k',label='$y=1/x$')

for i in range(9):
x = 0.5*(i+1)
plt.plot(x,mt.gamma(x),'o',color='k')

plt.legend(loc='upper center',fontsize=25)
plt.show()
```