EXERCICE 3 du sujet CCinP 2020 :
Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et on considère une suite $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{S}_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

(i) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{S}_n \neq 0$, on pose $\mathrm{T} = +\infty$;

(ii) sinon, on pose $\mathrm{T} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{S}_n = 0\}$.

L'événement $(\mathrm{T} = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{S}_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \mathrm{P}(\mathrm{T} = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

0. Question ne figurant pas dans le sujet original.
Exprimer par une phrase claire et simple ce que compte la variable aléatoire T **et je ne me satisferai pas de la réponse** « T est le plus petit entier naturel non nul tel que $\mathrm{S}_n = 0$ ».

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

2. Calculer p_0, p_1 et p_2.

3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $\mathrm{Y}_k = \dfrac{\mathrm{X}_k + 1}{2}$. On admet que $(\mathrm{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5. Pour $n > 0$, donner la loi de $\mathrm{Z}_n = \mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Montrer que $\mathrm{R}_p \geq 1$.

8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).$$

9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1-x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Calculer q_1 et q_2.

11. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15. En utilisant les questions 11 et 13, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

16. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Partie IV - La relation de récurrence liant les suites (p_n) et (q_n)

Cette partie ne figurait pas dans le sujet original mais il serait satisfaisant d'établir rigoureusement la relation admise dans la partie III pour légitimer les résultats obtenus.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les événements $(A_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ définis par

$$A_k = [S_{n-k} = 0, S_{n-k+1} \neq 0, S_{n-k+2} \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0]$$

autrement dit

$$A_k = [S_{n-k} = 0] \cap \left(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant k-1} [S_{n-j} \neq 0] \right) \cap [S_n = 0]$$

17. Exprimer par une phrase claire la signification de l'événement A_k.

18. Justifier l'égalité

$$[S_n = 0] = \bigcup_{2\leqslant k\leqslant n} A_k.$$

19. Justifier, pour tout k de $[\![2\,;\ n]\!]$,

$$\mathbb{P}_{[S_{n-k}=0]}(S_{n-k+1} \neq 0, S_{n-k+2} \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0) = \mathbb{P}(T = k)$$

20. En déduire la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

admise dans la partie précédente.

UN CORRIGÉ

EXERCICE 3 CCinP 2020 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

0. T est le temps d'attente du premier retour du pion en 0. Si le pion ne revient jamais en 0, alors T prend la valeur $+\infty$.

Partie I - Calcul de p_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Chaque variable X_k modélise le pas de l'instant k, donc $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ modélise la positition du pion à l'instant n.
Comme $S_0 = 0$, S_0 modélise aussi la position du pion à l'instant 0.
2. $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$. Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, on a $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$.
Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k\in X_1(\Omega)} = (X_1 = -1, X_1 = 1)$, on a
$$\begin{aligned} p_2 &= P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 1 \cap X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 = -1 \cap X_1 + X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = -1) + P(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
3. Si n est impair, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm1\}}$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs, donc est impair.
Par suite, $p_n = P(S_n = 0) = 0$, car l'événement $(S_n = 0)$ est impossible (car 0 est un nombre pair).
4. On a $Y_k(\Omega) = \left(\frac{X_k+1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\frac{1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right\} = \{0, 1\}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
5. • Les variables $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli et sont indépendantes, donc, pour tout $n > 0$, $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Par suite, $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
• De plus,
$$Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$
donc $S_n = 2Z_n - n$.
6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc, d'après la question précédente,
$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$
Comme $\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = 0) \leq 1$, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} 1x^n$, c'est-à-dire $\mathrm{R}_p \geq 1$.
8. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\right)\\
&= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\mathrm{d}\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\mathrm{d}\prod_{k=1}^{m}(2k)}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\mathrm{d}\prod_{k=1}^{2m}k}{\mathrm{d}2^m\prod_{k=1}^{m}k}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m}
\end{aligned}$$

9. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x \in]-1,1[$ (on a $\mathrm{R}_p \geq 1$),

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n &= p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{p_{2n+1}}_{=0}x^{2n+1}\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n}.
\end{aligned}$$

D'où, pour $\alpha = -1/2$, comme $p_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)$ pour tout $n \geq 1$ d'après la question précédente, on a $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

10. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{T} = n \Rightarrow \mathrm{S}_n = 0$, donc $(\mathrm{T} = n) \subset (\mathrm{S}_n = 0)$, donc $\mathrm{P}(\mathrm{T} = n) \leq \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = \mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = 0$. En particulier, pour $n = 1$, $q_1 = 0$.
• $\mathrm{S}_1 = 0$ est impossible, donc, par définition de T, on a $\mathrm{T} \geq 2$ et $\mathrm{T} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{S}_2 = 0$, donc $q_2 = \mathrm{P}(\mathrm{T} = 2) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_2 = 0) = p_2 = \frac{1}{2}$.
11. • Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = \mathrm{P}(\mathrm{T} = n)|x|^n \leq \mathrm{P}(\mathrm{T} = n),$$

donc $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leq \mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$.
Or $\sum_{n\geq 0} \mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$ converge (et vaut $1-\mathrm{P}(\mathrm{T}=+\infty)$ car $\mathrm{T}(\Omega)=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0}\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
• Comme $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$, $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $[-1,1]$, donc, en particulier, pour $x=1$, $\sum_{n\geq 0} g_n(1)$ converge, ce qui assure que

$$\mathrm{R}_q = \sup\{\rho>0 : \sum_{n\geq 0} q_n\rho^n \text{ converge}\} \geq 1.$$

12. f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1,1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$ et, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{n-k}\right)x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n \\
&= p_0q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n\in\mathbb{N}^*\text{)} \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\
&= -1 + p_0x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\
&= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x).
\end{aligned}$$

13. • Comme, pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 9), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad (1-x^2)^{-1/2}g(x) = (1-x^2)^{-1/2}-1,$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$g(x) = 1-\sqrt{1-x^2}.$$

• Pour tout $x\in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n,$$

donc, pour $\alpha=1/2$, on a , pour tout $x\in]-1,1[$, comme $(-x^2)\in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x^2} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-x^2)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)x^{2n},$$

donc

$$g(x) = 1-\sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)x^{2n},$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

14. Pour tout $x\in]-1,1[$, $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :

$$q_0=0,\quad \left(\forall n\in\mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\right) \text{ et } \left(\forall n\in\mathbb{N}, q_{2n+1}=0\right).$$

15. • Comme $\mathrm{T}(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1, 1]$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1, 1]$ (d'après la questin 11), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1, 1]$. En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - \sqrt{1 - x^2} \quad \text{(d'après l'expression trouvée en 13)} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $\mathrm{P}(\mathrm{T} = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $\mathrm{T} = +\infty$ est quasi impossible, donc on est quasi certain que le pion reviendra à l'origine à un instant donné.

16. $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{P}(\mathrm{T} = n)$ est la série génératrice de T.
D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty.$$

g est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et $\lim_{x\to 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, T n'admet pas d'espérance.

Partie IV - La relation de récurrence liant les suites (p_n) et (q_n)

Cette partie ne figurait pas dans le sujet original mais il serait satisfaisant d'eta rigoureusement la relation admise dans la partie III pour légitimer les résultats obtenus.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les événements $(\mathrm{A}_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ définis par

$$\mathrm{A}_k = [\mathrm{S}_{n-k} = 0, \mathrm{S}_{n-k+1} \neq 0, \mathrm{S}_{n-k+2} \neq 0, \ldots, \mathrm{S}_{n-1} \neq 0, \mathrm{S}_n = 0]$$

autrement dit

$$\mathrm{A}_k = [\mathrm{S}_{n-k} = 0] \cap \left(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant k-1} [\mathrm{S}_{n-j} \neq 0] \right) \cap [\mathrm{S}_n = 0]$$

17. L'événement A_k se réalise si, et seulement si, le pion est en 0 à l'issue du $(n - k)$-ème déplacement et y revient la fois suivante à l'issue du n-ème déplacement.

18. • Supposons $[\mathrm{S}_n = 0]$ réalisé, donc le pion est à l'origine à l'issue du n-ème déplacement. Notons j le rang de son passage précédent à l'origine. Alors $j \in [\![0\,;\, n - 2]\!]$ et l'événement A_{n-j} est réalisé.
Ainsi : $\mathrm{S}_n = 0 \Rightarrow \exists j \in [\![0\,;\, n - 2]\!], \mathrm{A}_{n-j}$ se réalise, autrement dit
$[\mathrm{S}_n = 0] \subset \bigcup_{j\in[\![0\,;\, n-2]\!]} \mathrm{A}_{n-j} \overset{k=n-j}{=} \bigcup_{k\in[\![2\,;\, n]\!]} \mathrm{A}_k$
• Comme $\mathrm{A}_k \subset [\mathrm{S}_n = 0]$, on a $\bigcup_{2\leqslant k\leqslant n} \mathrm{A}_k \subset [\mathrm{S}_n = 0]$.
• Conclusion : $[\mathrm{S}_n = 0] = \bigcup_{2\leqslant k\leqslant n} \mathrm{A}_k$.

19. $\mathbb{P}_{[\mathrm{S}_{n-k}=0]}(\mathrm{S}_{n-k+1} \neq 0, \mathrm{S}_{n-k+2} \neq 0, \ldots, \mathrm{S}_{n-1} \neq 0, \mathrm{S}_n = 0)$ est la probabilité que le pion situé à l'origine s'y retrouve à nouveau pour la première fois k déplacements plus tard, donc vaut $\mathbb{P}(\mathrm{T} = k)$.

20. $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$ par incompatibilité 2 à 2 des A_k. Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) &= \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0, \mathrm{S}_{n-k+1} \neq 0, \mathrm{S}_{n-k+2} \neq 0, \ldots, \mathrm{S}_{n-1} \neq 0, \mathrm{S}_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0)\mathbb{P}_{\mathrm{S}_{n-k}=0}(\mathrm{S}_{n-k+1} \neq 0, \mathrm{S}_{n-k+2} \neq 0, \ldots, \mathrm{S}_{n-1} \neq 0, \mathrm{S}_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0)\mathbb{P}(\mathrm{T} = k) = p_{n-k} q_k \end{aligned}$$

Ainsi $p_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} p_{n-k} q_k = \sum_{j=0}^{n-2} p_j q_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} p_j q_{n-j}$ car $q_0 = q_1 = 0$.