Exercice 1 *L'épistolaire distrait*

Un correspondant distrait écrit successivement n lettres distinctes, destinées à n personnes distinctes.

Il les place dans n enveloppes distinctes indiscernables, qu'il cachette avant d'y avoir apposé les adresses des destinataires. Il finit par écrire les adresses au hasard.

1. a) Proposer un univers Ω le plus simple possible permettant de modéliser l'expérience.

b) Donner une description ensembliste de l'événement « La première lettre écrite arrive à son destinataire » puis de l'événement « Toutes les lettres arrivent à leur destinataire ».

2. Pour tout i de $[\![1\,;\,n]\!]$, on note L_i l'événement « la i-ème lettre écrite arrive à son destinataire ».

a) Quelle est la probabilité de chaque événement L_i ?

b) Quelle est la probabilité que toutes les lettres arrivent à leurs correspondants ?

c) Les événements (L_i) sont-ils mutuellement indépendants ?

d) Sont-ils deux à deux indépendants ?

Solution (**Ex.1** – *L'épistolaire distrait*)

1. a) On numérote les lettres et les destinataires de sorte que la lettre numéro i est destinée au destinataire numéro i.

Plusieurs propositions :

(i) $\Omega = \{(d_1,\dots,d_n), \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], d_i \in [\![1\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, d_i \neq d_j\}$ où, pour tout i, d_i est le numéro du destinataire recevant la lettre i.

(ii) En se plaçant sous l'angle des lettres :

$\Omega = \{(\ell_1,\dots,\ell_n), \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \ell_i \in [\![1\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, \ell_i \neq \ell_j\}$ où, pour tout i, ℓ_i est le numéro de la lettre reçue par le destinataire numéro i.

(iii) Et sous l'aspect fonctionnel : $\Omega = \{f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!] \textit{ bijective}\}$ où f envoie (quasiment au sens propre) la lettre numéro i au destinataire numéro $f(i)$.

b) Notons A l'événement « La première lettre écrite arrive à son destinataire » et B l'événement « Toutes les lettres arrivent à leur destinataire ».

Avec l'univers type (i) :

$\mathrm{A} = \{(1,d_2,\dots,d_n), \forall i \in [\![2\,;\,n]\!], d_i \in [\![2\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, d_i \neq d_j\}$

$\mathrm{B} = \{(1,2,3,\dots,n)\}$

Avec l'univers type (ii) :

$\mathrm{A} = \{(1,\ell_2,\dots,\ell_n), \forall i \in [\![2\,;\,n]\!], \ell_i \in [\![2\,;\,n]\!] \text{ et } \forall i \neq j, \ell_i \neq \ell_j\}$

$\mathrm{B} = \{(1,2,3,\dots,n)\}$

Avec l'univers type (iii) :

$\mathrm{A} = \{f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!] \textit{ bijective et } f(1) = 1\}$ et $\mathrm{B} = \{id_{[\![1\,;\,n]\!]}\}$.

2. a) Que l'on choisisse les modèles (i), (ii) ou (iii), $\mathrm{Card}\,(\Omega) = n!$.

$\mathrm{Card}\,(\mathrm{L}_1) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) = (n-1)!$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{L}_1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Un raisonnement analogue donne : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mathbb{P}(\mathrm{L}_i) = \dfrac{1}{n}$.

b) $\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}) = 1$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{n!}$.

c) & **d)** $\mathrm{P}(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)} \neq \dfrac{1}{n^2} = \mathbb{P}(\mathrm{L}_1)\mathbb{P}(\mathrm{L}_2)$, donc L_1 et L_2 ne sont pas indépendants. Donc les (L_i) ne sont pas deux à deux indépendants, donc pas mutuellement non plus.

Exercice 2 *Minimum et maximum*

On tire successivement une à une et avec remise n boules dans une urne en contenant B numérotées de 1 à B. Soit $k \in [\![1\,;\,\mathrm{B}]\!]$ fixé. Déterminer la probabilité des événements :

- S_k « le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à k »,
- G_k « le plus grand numéro obtenu est vaut k »,
- I_k « le plus petit numéro obtenu est supérieur ou égal à k »,
- P_k « le plus petit numéro obtenu est vaut k ».

Solution (**Ex.2** – *Minimum et maximum*)

Première méthode : par explicitation de l'univers et dénombrement

L'ensemble des tirages possibles (univers) est $\Omega = [\![1\,;\,\mathrm{B}]\!]^n$ car les tirages se font avec remise. Il est muni de l'équiprobabilité.

On a : $\mathrm{Card}\,(\Omega) = \mathrm{B}^n$.

- $\mathrm{S}_k = [\![1\,;\,k]\!]^n$ et par équiprobabilité, $\mathbb{P}(\mathrm{S}_k) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(\mathrm{S}_k)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{k^n}{\mathrm{N}^n}$
- De $\mathrm{S}_k = \mathrm{G}_k \dot{\cup} \mathrm{S}_{k-1}$ on tire $\mathbb{P}(\mathrm{G}_k) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k) - \mathbb{P}(\mathrm{S}_{k-1}) = \dfrac{k^n - (k-1)^n}{\mathrm{N}^n}$, relation valable y compris pour $k = 1$ car $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) = \dfrac{1}{n^{\mathrm{N}}}$.
- $\mathrm{I}_k = [\![k\,;\,\mathrm{N}]\!]^n$ et par équiprobabilité, $\mathbb{P}(\mathrm{I}_k) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(\mathrm{I}_k)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{(\mathrm{N}-k+1)^n}{\mathrm{N}^n}$
- De $\mathrm{I}_k = \mathrm{P}_k \dot{\cup} \mathrm{I}_{k+1}$ on tire $\mathbb{P}(\mathrm{P}_k) = \mathbb{P}(\mathrm{I}_k) - \mathbb{P}(\mathrm{I}_{k+1}) = \dfrac{(\mathrm{N}-k+1)^n - (\mathrm{N}-k)^n}{\mathrm{N}^n}$, relation valable y compris pour $k = \mathrm{N}$ car $\mathbb{P}(\mathrm{P}_\mathrm{N}) = \dfrac{1}{n^{\mathrm{N}}}$.

Seconde méthode : par décomposition des événements

- Soit pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,\mathrm{B}]\!]$ l'événement A_i : « le i-ème numéro est inférieur ou égal à k ».

$\mathrm{S}_k = \bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} \mathrm{A}_i$, et par indépendance des A_i car les tirages ont lieu avec remise,

$\mathbb{P}(\mathrm{S}_k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$. Or par équiprobabilité $\mathbb{P}(\mathrm{A}_i) = \dfrac{k}{\mathrm{N}}$ pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$.
Donc $\mathbb{P}(\mathrm{S}_k) = (\dfrac{k}{\mathrm{N}})^n$.
• Soit pour $(i,j) \in [\![1\,;\ n]\!] \times [\![1\,;\ \mathrm{B}]\!]$ l'événement B_i : « le i-ème numéro est supérieur ou égal à k ».
$\mathrm{I}_k = \bigcap\limits_{1\leq i\leq n} \mathrm{B}_i$, et par indépendance des B_i car les tirages ont lieu avec remise,
$\mathbb{P}(\mathrm{I}_k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{B}_i)$. Or par équiprobabilité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_i) = \dfrac{\mathrm{N}-k+1}{\mathrm{N}}$ pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$.
Donc $\mathbb{P}(\mathrm{I}_k) = (\dfrac{\mathrm{N}-k+1}{\mathrm{N}})^n$.
Pour G_k et P_k, on raisonne comme par la Premiére méthode.

Exercice 3 *Événement presque-impossible*
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On tire successivement des boules suivant le protocole :
• si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne et on ajoute une autre boule rouge dans l'urne ;
• si elle est blanche, on interrompt les tirages.

1. Montrer que l'expérience peut être modélisé par $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ en convenant que :
   • $\omega = n \in \mathbb{N}^*$ si la boule blanche sort lors du n−ème tirage ;
   • $\omega = 0$ si la boule blanche ne sort jamais.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule blanche n'est pas sortie durant les n premiers tirages ».
   a) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$. Que signifie l'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$?
   Calculer sa probabilité. A-t-on $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n = \emptyset$?
   b) Que dire de l'événement « la boule blanche sortira de l'urne » ?

Solution (**Ex.3** – *Événement presque-impossible*)
• Soit N_i l'événement « une boule noire sort au i-ème tirage ». Alors $\mathrm{B}_n = \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{N}_n$, et par la formule des probabilités composées,
$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{N}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{N}_2)\ldots\mathbb{P}_{\mathrm{N}_1\cap\cdots\cap\mathrm{N}_{n-1}}(\mathrm{N}_n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \cdots \times \dfrac{n}{n+1} \times = \dfrac{1}{n+1}$.
• La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 1}$ est décroissante car : $\forall n \geq 1, \mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n \cap \mathrm{N}_{n+1} \ \subset \mathrm{B}_n$.
Par la propriété de continuité monotone : $\mathbb{P}\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0$
• Modélisons l'expérience par l'univers des possibles par $\Omega \overset{\text{déf.}}{=} \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$: une expérience est une suite de 0 (=noire par exemple) ou 1 (=blanche).
Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n = \{s \in \Omega / \forall k \in \mathbb{N}^*, s_k = 0\} = \{\textit{suite nulle}\}$ n'est pas vide, mais pourtant de probabilité nulle.
L'événement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$ que l'on peut expliciter par « la boule blanche ne sort jamais » est presque-impossible (ou quasi-impossible), ou encore « la boule blanche sort » est presque-sûr (ou quasi-certain).

Exercice 4 *Ruine du joueur*
Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les lancers successifs sont indépendants, et le joueur gagne 1 euro chaque fois qu'il obtient pile et perd un euro pour chaque face. Le joueur doit disposer d'au moins 1 euro pour jouer, et le jeu prend fin dès qu'il est ruiné ou qu'il dispose d'un capital de N euros ($\mathrm{N} \geq 3$ est fixé par avance).
On note u_k la probabilité que le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu ($0 \leq k \leq \mathrm{N}$).

1. On convient que $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$. Justifier cette convention.
2. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :
$$\forall k \in [\![1\,;\ \mathrm{N}-1]\!], \quad u_k = \tfrac{1}{2}u_{k+1} + \tfrac{1}{2}u_{k-1}.$$
3. Exprimer u_k en fonction de k et N.
4. Interpréter, à k fixé, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k$.

Solution (**Ex.4** – *Ruine du joueur*)
1. S'il possède 0 euro au départ, il ne peut pas jouer et l'événement « être ruiné » est certain. S'il possède déjà N euros, il ne joue pas puisque qu'il dispose du capital requis et ne sera jamais ruiné.
2. Notons U_k l'événement « le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu » où $0 \leq k \leq \mathrm{N}$, P l'événement le premier lancer donne *pile*.
Avec le système complet $(\mathrm{P}, \overline{\mathrm{P}})$, la formule des probabilités totales donne :
$u_k = \mathbb{P}(\mathrm{P})\mathbb{P}_\mathrm{P}(\mathrm{U}_k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{P}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{P}}}(\mathrm{U}_k) = \dfrac{1}{2}u_{k-1} + \dfrac{1}{2}u_{k+1}$.
3. u vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2} \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0$, dont l'unique racine est 1.
Donc : $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0\,;\ \mathrm{N}]\!], u_k = 1^k(ak+b) = ak+b$ (on se limite à $[\![0\,;\ \mathrm{N}]\!]$ car $\forall k \geq \mathrm{N}, u_k = 0$...)
Avec les conditions limites $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$, $b = 1$ et $a\mathrm{N} + b = 0$ donc $a = -1/\mathrm{N}$.
Ainsi : $\forall k \in [\![0\,;\ \mathrm{N}]\!], u_k = 1 - (k/\mathrm{N})$.
À k fixé, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k = 1$, donc avec une fortune initiale fixée k, plus on fixe le seuil N grand, et plus on risque de finir ruiné.

Exercice 5 *Incompatibles ET indépendants ?*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit A et B deux événements incompatibles et indépendants. Montrer que l'un d'entre eux au moins est impossible.

2. Étudier la réciproque.

Exercice 6 *Indépendance et contraire*

Soit A et B deux événements. Montrer que A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants si, et seulement si, A et B le sont.

Solution (**Ex.6** – *Indépendance et contraire*)

Puisque l'on a une union disjointe (ou FPT avec le SCE $(\mathrm{B}, \overline{\mathrm{B}})$...),

$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}\big(\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \overline{\mathrm{B}}\big) = \mathbb{P}(\mathrm{A})$ car $\mathrm{B} \cup \overline{\mathrm{B}} = \Omega$.

Par suite, $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$ par indépendance

$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{B})\big) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}})$.

Exercice 7 *La somme infernale*

Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 au hasard. Quelle est la probabilité que la somme des 7 numéros tirés soit égale à la somme des 7 numéros non tirés ?

Solution (**Ex.7** – *La somme infernale*)

$1 + 2 + ... + 14 = 105$ n'est pas divisible par 2. La probabilité cherchée est nulle.

Exercice 8 *S'arrêter de fumer*

Un fumeur veut arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : s'il a réussi à ne pas fumer un jour, il fume le lendemain avec la probabilité 1/2 mais, s'il a fumé un jour, alors il ne fume le lendemain qu'avec la probabilité 1/4. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

1. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.

2. Calculer p_n en fonction de p_1 et de n.

3. Donner la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Solution (**Ex.8** – *S'arrêter de fumer*)

1. En utilisant la formule des probabilités totales et le fait que les événements F_n : « il a fumé le jour n » et $\overline{\mathrm{F}_n}$: « il n'a pas fumé le jour n » forment un système complet d'événements, on obtient :

$p_{n+1} = \mathbb{P}(\mathrm{F}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{F}_n}(\mathrm{F}_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}_n})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{F}_n}}(\mathrm{F}_{n+1}) = p_n \times \dfrac{1}{4} + (1 - p_n) \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$.

2. (p_n) est arithmético-géométrique. Soit $\ell = 2/5$, qui vérifie $\ell = -\dfrac{1}{4}\ell + \dfrac{1}{2}$.

Alors : $\forall n \geq 1;\quad p_{n+1} - \ell = \dfrac{-1}{4}(p_n - \ell)$, $\big(p_n - \ell\big)_n$ est géométrique de raison $-1/4$.

D'où : $\forall n \geq 1, \quad p_n = (-1/4)^{n-1}(p_1 - \ell) + \ell$.

3. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \ell = \dfrac{2}{5}$.

Exercice 9 *Jeu équitable*

Deux archers se disputent un match selon les règles suivantes :

- A et B tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche.
- A tire en premier (il tirera donc aux rangs impairs).
- Les réussites successives aux tirs sont supposées mutuellement indépendantes.
- La probabilité que A touche la cible, à chaque tir, est p_1.
- De même, la probabilité que l'archer B touche la cible est p_2.

On note $q_i = 1 - p_i$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

1. Calculer la probabilité que A l'emporte au rang $2n + 1$.

2. Calculer la probabilité que B l'emporte au rang $2n + 2$.

3. On note G_1 (resp. G_2) l'événement « A (resp. B) l'emporte ».
Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{G}_2)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) + \mathbb{P}(\mathrm{G}_2)$ et en déduire la probabilité que le match dure indéfiniment.

5. a) On dira que le match est équilibré lorsque $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{G}_2)$.
Montrer que ceci est réalisé si, et seulement si, $p_2 = \dfrac{p_1}{1 - p_1}$.

b) Que peut-on dire si $p_1 = 1/2$?

c) Et si $p_1 > 1/2$?

Solution (**Ex.9** – *Jeu équitable*)

1. En notant A_n l'événement dont on cherche la probabilité, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = p_1(q_1q_2)^n$ car on doit avoir indépendamment n échecs et un succès de A, et n échecs de B.

2. $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = p_2 q_2^n q_1^{n+1}$ par un raisonnement analogue.

3. $\mathbb{P}(\mathrm{G}_1) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \overset{textincomp.'}{=} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \dfrac{p_1}{1 - q_1q_2}$ car somme géométrique de raison $q_1q_2 \in \left]0\,;\ 1\right[$.

Et de façon analogue : $\mathbb{P}(G_2) = \dfrac{q_1p_2}{1-q_1q_2}$.

4. Comme $p_1 + q_1p_2 = (1-q_1) + q_1(1-q_2) = 1 - q_1q_2$, $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 1$: la probabilité que la match dure indéfiniment est nulle.

5. a) $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2) \iff p_1 = q_1p_2 \iff p_2 = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_1}{1-p_1}$

6. a) Si $p_1 = 1/2$, alors le jeu équitable si, et seulement si, $p_2 = 1$... logique non ?

b) Si le jeu est équitable, alors : $p_1 > 1/2 \Longrightarrow 1-p_1 < 1/2 \Longrightarrow p_2 > 1$, impossible. Le jeu ne peut pas être équitable si $p_1 > 1/2$.

Exercice 10 *Séquence pile-pile et séquence pile-face*

On dispose d'une pièce, faisant pile avec la probabilité $p \in]\,0\,;\; 1[$. On effectue une séquence infinie de lancers.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs sans avoir eu auparavant la séquence pile-face ?

Indication : on pourra lister précisément tous les tirages possibles amenant le résultat voulu ou s'appuyer sur le système complet $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$*...*

Solution (**Ex.10** – *Séquence pile-pile et séquence pile-face*)

Soit $q = 1-p$. Les seuls tirages favorables sont :

P_1P_2 de probabilité p^2,

$F_1P_2P_3$ de probabilité qp^2,

$F_1F_2P_3P_4$ de probabilité q^2p^2,

$\vdots$

Notons E_n l'événement $F_1 \ldots F_nP_{n+1}P_{n+2}$ de probabilité q^np^2.

L'événement PP sort avant PF est : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Par incompatibilité 2 à 2, sa probabilité est : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{p^2}{1-q} = p$.

Beaucoup plus élégant : à méditer...

Soit A l'événement « PP sort avant PF ». $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ étant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(A) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2)\mathbb{P}_{P_1\cap P_2}(A) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(A) = q\mathbb{P}(A) + p^2 \times 1 + pq \times 0 = (1-p)\mathbb{P}(A) + p^2$, et il n'y a plus qu'à isoler $\mathbb{P}(A)$:

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{p^2}{p} = p$.

Exercice 11 *Autour de l'indépendance*

Je dispose d'une pièce juste et d'une pièce truquée pour laquelle probabilité d'obtenir face est p avec $0 < p < \frac{1}{2}$. Je choisis une des pièces au hasard, puis je la lance n fois de suite avec $n \geq 2$. Soit les événements :

- J : « la pièce est juste » ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « j'obtiens au face n-ème lancer » (respectivement).

1. Les événements F_1 et F_2 sont-ils indépendants ?

2. a) Déterminer $\mathbb{P}(J)$, puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}_{F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n}(J)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Est-ce moral ?

Solution (**Ex.11** – *Autour de l'indépendance*)

Dans cet exercice, j'utilise abondamment la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(J, \overline{J})$ où J est l'événement « j'ai choisi la pièce juste ».

1. $\mathbb{P}(F_1) \overset{textFPT'}{=} \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.p$ et de même $\mathbb{P}(F_2) \overset{textFPT'}{=} \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.p$.

$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \overset{textFPT'}{=} \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}.p^2$.

$\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \iff \left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + p\right)\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} + p^2\right) \iff p^2 - p + \dfrac{1}{4} = 0 \iff \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff p = \dfrac{1}{2}$.

Comme $0 < p < \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) \neq \mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$ et les événements F_1 et F_2 ne sont pas indépendants.

2. a) $\mathbb{P}(J) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{F_1}(J) = \dfrac{\mathbb{P}(J \cap F_1)}{\mathbb{P}(F_1)} = \dfrac{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(F_1)}{\mathbb{P}(F_1)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + p\right)} = \dfrac{1}{1+2p}$.

De la même façon, $\mathbb{P}_{F_1\cap F_2}(J) = \dfrac{1}{1+4p^2}$.

Je viens d'appliquer la formule du pasteur Bayes, sans vraiment la formaliser ...

... de la même façon que précédemment, la formule de Bayes avec le système complet $(J, \overline{J})$ fournit :

$$p_n = \frac{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(F_1 \cap \cdots \cap F_n)}{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(F_1 \cap \cdots \cap F_n) + \mathbb{P}(\overline{J})\mathbb{P}_{\overline{J}}(F_1 \cap \cdots \cap F_n)} = \frac{(1/2) \times (1/2)^n}{(1/2) \times (1/2)^n + (1/2) \times p^n} = \frac{1}{1+(2p)^n}.$$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{(1+(2p)^n)}{1+(2p)^{n+1}} > 1$ puisque $2p < 1$ et $1 + (2p)^{n+1} < 1 + (2p)^n$.

b) Comme $0 < 2p < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2p)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$. Plus j'ai une longue série de *faces* au départ, et plus j'ai de chance de lancer la pièce juste ... moral puisque la pièce truquée désavantage *face*.

Exercice 12 *Rang pair ou rang impair*

On effectue une succession de lancers d'une pièce dont la probabilité d'amener pile est $p \in]0\,;\ 1[$ à chaque lancer, indépendamment d'un lancer à l'autre.

1. Montrer que la probabilité que pile apparaisse au moins une fois au cours de ces lancers vaut 1.
   C'est un événement *« presque-certain »* ou *« presque-sûr »*.
2. Déterminer la probabilité de l'événement I : *« le premier "pile" apparaît lors d'un tirage de rend impair »*.
3. L'événement I est-il plus probable que son contraire ?

Solution (**Ex.12** – *Rang pair ou rang impair*)

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'événement « pile apparaît au n-ème lancer ».

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, PP_n l'événement « le premier pile apparaît au n-ème lancer ».

On a :

$\mathbb{P}(\mathrm{PP}_n) = \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{P}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{P}_{n-1}} \cap \mathrm{P}_n\right)$, et par indépendance,

$\mathbb{P}(\mathrm{PP}_n) = \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{P}_1}\right) \dots \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{P}_{n-1}}\right)\mathbb{P}\left(\mathrm{P}_n\right) = (1-p)^{n-1}p.$

On a : $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{PP}_{2k+1}$, et comme les PP_n sont deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{PP}_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k}p = p\sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^k = \frac{p}{1-(1-p)^2}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}) = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}$$

1. $2-p < 2$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{I}) > \frac{1}{2}$. Donc il est plus probable que le premier « pile » sorte à un rang impair qu'à un rang pair (idem pour le premier « face » d'ailleurs).