1. Trouver la loi d'un temps d'attente...

Tous les schémas ne sont pas des schémas de Bernoulli...

Exercice 1 *La loi du sauteur en hauteur - Transferts*

Dans un concours de saut, la probabilité qu'un sauteur passe la n-ème barre est $\dfrac{1}{n}$ et est indépendante des sauts précédents.
On note X le numéro de la dernière barre que le sauteur a franchi avant d'échouer.

1. Donner la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)=1$.

2. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ existent et les calculer. On observa qu'on a intérêt à commencer par calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}+1)$, puis $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2-1)$.

Solution (**Ex.1** – *La loi du sauteur en hauteur - Transferts*)

1. $\mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\overset{\text{FPC}}{=}1\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\dots\dfrac{1}{n}\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{n}{(n+1)!}$.

2. $\mathbb{E}(\mathrm{X}+1)\overset{\text{transfert}}{=}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\overset{\text{expon.}}{=}\mathrm{e}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X})\overset{\text{lin.}}{=}\mathrm{e}-1$.

$\mathbb{E}(\mathrm{X}^2-1)\overset{\text{transfert}}{=}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}\overset{\text{expon.}}{=}\mathrm{e}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)\overset{\text{lin.}}{=}\mathrm{e}+1$,

$\mathbb{V}(\mathrm{X})=3\mathrm{e}-\mathrm{e}^2$.

Exercice 2 *Sans espoir ... - Absence d'espérance*

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.
On procède à une succession de tirages suivant le processus : à chaque tirage, on prélève une boule au hasard et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur. On note T le temps d'attente du premier tirage d'une boule noire.

1. Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{T}=n)$ et vérifier que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}(\mathrm{T}=n)=1$.

2. T possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution (**Ex.2** – *Sans espoir ... - Absence d'espérance*)

1. $\mathbb{P}(\mathrm{T}=n)\overset{\text{FPC}}{=}\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\dots\dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n+1}$ diverge, $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ n'existe pas.

Exercice 3 *Urne de Polya*

On dispose d'une urne contenant $n\geqslant 2$ boules dont une est rouge et les autres sont blanches.
On tire au hasard une à une des boules dans cette urne suivant le protocole :
☞ si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne pour le tirage suivant ; ☞ si la boule tirée est blanche, on l'ôte de l'urne avant de procéder au tirage suivant.
On note T le temps d'attente de la boule rouge, c'est-à-dire le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la rouge pour la première fois.
Déterminer la loi de T, son espérance et sa variance.

Solution (**Ex.3** – *Urne de Polya*)

$\mathrm{T}(\Omega)=[\![1\,;\,n]\!]$ et

$\mathbb{P}(\mathrm{T}=k)=\mathbb{P}(\mathrm{B}_1\cap\dots\cap\mathrm{B}_{k-1}\cap\mathrm{R}_k)\overset{\text{FPC}}{=}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1}\dots\dfrac{n-k+1}{n-k+2}\dfrac{1}{n-k+1}$

$\mathbb{P}(\mathrm{T}=k)=\dfrac{1}{n}$

Donc $\mathrm{T}\sim\mathcal{U}([\![1\,;\,n]\!])$ et $\mathbb{E}(\mathrm{T})=(n+1)/2$, $\mathbb{V}(\mathrm{T})=(n^2-1)/12$.

Exercice 4 *La loi de Pascal - I*

On s'intéresse à un schéma de Bernoulli (ou processus bernoullien) de probabilité de succès p.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$ on note T_i la variable aléatoire égale au rang d'obtention du $i-$ème succès et S_i l'évènement « *la $i-$ème épreuve est un succès* ».
Dans cet exercice, on vérifie rigoureusment l'idée intuitive de T_i est la somme de i variables i.i.d. de loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i\geqslant 1$.
- **a)** Déterminer le support de T_i.
- **b)** Déterminer pour $k\in\mathrm{T}_i(\Omega)$ la probabilité $\mathbb{P}_{\mathrm{S}_k}(\mathrm{T}_i=k)$ et en déduire la loi de T_i.

2. Soit $i\geqslant 1$.
- **a)** Déterminer la loi de la variable aléatoire G_i définie par
$$\mathrm{G}_1=\mathrm{T}_1,\text{ et pour } i\geqslant 2,\quad \mathrm{G}_i=\mathrm{T}_i-\mathrm{T}_{i-1}.$$
Commenter.
- **b)** En déduire l'espérance de T_i.

3. Soit $i\geqslant 2$.
- **a)** Montrer que T_{i-1} et G_i sont indépendantes.
- **b)** En déduire la variance de T_i.

4. Soit $k\in\mathrm{T}_2(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant $[\mathrm{T}_2=k]$. Commentaire ?

Solution (**Ex.4** – *La loi de Pascal - I*)

1. a) Soit $i \geqslant 1$. $\mathrm{T}_i(\Omega) = [[i, +\infty[[$

b) $\mathbb{P}_{\mathrm{S}_k}(\mathrm{T}_i = k) = \mathbb{P}($ « $i-1$ succès en $k-1$ épreuves » $) = \binom{k-1}{i-1} p^{i-1} q^{k-i}$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_i = k) \overset{\text{FPT}}{=} \mathbb{P}(\mathrm{S}_k)\mathbb{P}_{\mathrm{S}_k}(\mathrm{T}_i = k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{S}_k})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{S}_k}}(\mathrm{T}_i = k)$$
$$= p\binom{k-1}{i-1} p^{i-1} q^{k-i} + 0 = \binom{k-1}{i-1} p^{i} q^{k-i}.$$

2. Soit $i \geqslant 2$.

a) $\mathrm{G}_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$\mathbb{P}(\mathrm{G}_i = k) \overset{\text{FPT}}{=} \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap [\mathrm{G}_i = k]) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap \overline{\mathrm{S}_{j+1}} \cap \overline{\mathrm{S}_{j+2}} \cap \cdots \cap \mathrm{S}_{j+k}) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] q^{k-1} p = q^{k-1} p \times 1$ par indépendance des épreuves.

Donc $\mathrm{G}_i \sim \mathcal{G}(p)$.

$\mathrm{T}_i = \mathrm{T}_{i-1} + \mathrm{G}_i$ où $\mathrm{G}_i \sim \mathcal{G}(p)$: chaque nouveau succès est régi par une attente suivant une loi géométrique.

b) $\mathbb{E}(\mathrm{T}_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=2}^{i}(\mathrm{T}_j - \mathrm{T}_{j-1}) + \mathrm{T}_1\right) \overset{lin.}{=} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}(\mathrm{G}_j) = \frac{i}{p}$.

3. Soit $i \geqslant 2$.

a) $\mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap [\mathrm{G}_i = k]) = \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] \cap \overline{\mathrm{S}_{j+1}} \cap \overline{\mathrm{S}_{j+2}} \cap \cdots \cap \mathrm{S}_{j+k}) = \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j] q^{k-1} p = \mathbb{P}([\mathrm{T}_{i-1} = j]\mathbb{P}([\mathrm{G}_i = k])$

b) $\mathbb{V}(\mathrm{T}_i) = \mathbb{V}\left(\sum_{j=2}^{i}(\mathrm{T}_j - \mathrm{T}_{j-1}) + \mathrm{T}_1\right) \overset{lin.}{=} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{V}(\mathrm{G}_j) = \frac{iq}{p^2}$.

4. $\mathbb{P}_{[\mathrm{T}_2=k]}(\mathrm{T}_1 = n) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{T}_1 = n, \mathrm{T}_2 = k)}{}$ Soit $k \in \mathrm{T}_2(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant $[\mathrm{T}_2 = k]$.
Commentaire ?

2. Lois de sommes sans les fonctions génératrices

Lorsqu'on calcule la loi de la somme de deux variables indépendantes, on parle de *convolution*. Le calcul **lorsqu'on n'utilise pas les fonctions génératrices** repose en général sur

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{i \in \mathrm{X}(\Omega) \ tq \ k-i \in \mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k - i).$$

Expliquer rigoureusement cette formule !

Exercice 5 *Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y et Z trois variables indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$.

1. Montrer que, pour tout k de $[\![2\,;\,2n]\!]$,
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{\max(1,k-n) \leq i \leq \min(n,k-1)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k - i).$$

2. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k)$ suivant que $k \in [\![2\,;\,n]\!]$ ou $k \in [\![n\,;\,2n]\!]$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Z}) = \frac{n-1}{n^2}$.

4. Je lance trois dés justes à six faces numérotées de 1 à 6. Quelles est la probabilité que la somme de deux des numéros obtenus soit égale au troisième ?

Solution (**Ex.5** – *Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »*)

1. Clairement $(\mathrm{X} + \mathrm{Y})(\Omega) = [\![2\,;\,2n]\!]$. Soit $k \in [\![2\,;\,2n]\!]$.
$$\big[\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k\big] = \bigcup_{i \in \mathrm{X}(\Omega) \text{ et } k-i \in \mathrm{Y}(\Omega)} \big([\mathrm{X} = i] \cap [\mathrm{Y} = k - i]\big).$$
Par incompatibilité de ces événements, puis indépendance des variables aléatoires,
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{i \in \mathrm{X}(\Omega) \text{ et } k-i \in \mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k - i).$$
Précisons la plage de sommation :
$(i \in \mathrm{X}(\Omega)$ et $k - i \in \mathrm{Y}(\Omega)) \iff (1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k - i \leq n)$
$\iff (1 \leq i \leq n$ et $k - n \leq i \leq k - 1)$
$\iff \max(1, k - n) \leq i \leq \min(n, k - 1)$

2. • $2 \leq k \leq n$ donc $\max(1, k - n) = 1$ et $\min(n, k - 1) = k - 1$,
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}.$$
• $n + 1 \leq k \leq 2n$ donc $\max(1, k - n) = k - n$ et $\min(n, k - 1) = n$,
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{i=k-n}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k - i) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

3. À l'aide du système complet d'événements $([\mathrm{Z} = k])_{1 \leq k \leq n}$,
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Z}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((\mathrm{Z} = k) \cap (\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Z})) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((\mathrm{Z} = k) \cap (\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k))$$
$$\overset{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{Z} = k)\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n^2}.$$

4. Avec $n = 6$, en notant X, Y et Z les numéros des 3 dés,

$\mathbb{P}((X+Y=Z)\cup(X+Z=Y)\cup(Y+Z=X)) \overset{\text{incomp.}}{=}$
$\mathbb{P}(X+Y=Z)+\mathbb{P}(X+Z=Y)+P(Y+Z=X) = 3\times\dfrac{6-1}{2\times 6^2}=\dfrac{5}{24}$.

Exercice 6 *Autour des lois binomiales et de Poisson*

1. Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(l)$ et $\mathcal{P}(m)$ respectivement.
   - **a)** Montrer que la loi de X + Y est encore une loi de Poisson en précisant son paramètre.
   - **b)** Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Montrer que si Y est une v.a.r. suivant la loi Poisson $\mathcal{P}(l)$ et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnée par $(Y=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution (**Ex.6** – *Autour des lois binomiales et de Poisson*)

1. Pour $k>n$, $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=k)=0$ (fatalement).
   Pour $0\le k\le n$, $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=k)=\dfrac{\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=n-k))}{\mathbb{P}(X+Y=n)}=$
   $\dfrac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}=\dfrac{e^{-l}l^k}{k!}\dfrac{e^{-m}m^{n-k}}{(n-k)!}\dfrac{n!}{e^{-(l+m)}l^n}=$
   $\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{l}{l+m}\right)^k\left(\dfrac{m}{l+m}\right)^{n-k}$ ... loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{l}{l+m}\right)$, non ?
2. La FPT pour le SCE $([Y=n])_{n\in\mathbb{N}}$ donne
   $\mathbb{P}(X=k)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)\mathbb{P}_{[Y=n]}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}e^{-l}\frac{l^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=$
   $\dfrac{e^{-l}}{k!}(pl)^k\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{[l(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}\overset{i=n-k}{=}\frac{e^{-l}}{k!}(pl)^k\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{[l(1-p)]^i}{i!}=\frac{e^{-l}e^{l(1-p)}(lp)^k}{k!}=$
   $\dfrac{e^{-lp}(lp)^k}{k!}$ donc $X\sim\mathcal{P}(l)$.

Exercice 7 *Loi de Pascal - II*

Soit X et Y deux VAR i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p\in\,]0\,;\,1[$.
Déterminer la loi de X + Y.

3. Autour des minimums ou des maximums

Exercice 8 *Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes toutes deux de loi géométrique de paramètre $p\in\,]0\,;\,1[$.
On pose $Z=\min(X,Y)$. L'objectif est de déterminer la loi de Z.

1. *Première méthode*
   Pour $k\in\mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(X\ge k)$? En déduire $\mathbb{P}(Z\ge k)$ puis montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.
2. *Seconde méthode*
   On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.
   - **a)** Quel est la loi de A et de D ?
   - **b)** Quel est la probabilité de l'événement « le premier lancer amène au moins un pile » ?
   - **c)** On note P le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile, sans distinction de couleur. Quel est la loi de P ?
   - **d)** Conclure.

Solution (**Ex.8** – *Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes*)
Soit $q=1-p$.

1. *Première méthode*
   Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X\ge k)=q^{k-1}$ ($k-1$ échecs successifs).
   $\mathbb{P}(Z\ge k)=\mathbb{P}([X\ge k]\cap[Y\ge k])\overset{\text{indép.}}{=}q^{k-1}q^{k-1}=q^{2k-2}$.
   $\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(Z\ge k)-\mathbb{P}(Z\ge k+1)=q^{2k-2}-q^{2k}=\left(q^2\right)^{k-1}(1-q^2)$ ce qui prouve que Z suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2=p(2-p)$.
2. *Seconde méthode*
   On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.
   - **a)** La loi de A et de D est $\mathcal{G}(p)$.
   - **b)** Soit B l'événement « le premier lancer amène au moins un pile ».
     $\mathbb{P}(\overline{B})\overset{\text{indép.}}{=}q^2$, donc $\mathbb{P}(B)=1-q^2$.
   - **c)** La loi de P est $\mathcal{G}(\mathbb{P}(B))=\mathcal{G}(1-q^2)$.
   - **d)** $P=\min(A,D)$: on retrouve le même résultat.

Exercice 9 *Maximum de deux variables géométriques*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p\in\,]0\,;\,1[$.

Soit $Z = \sup(X, Y)$.
Déterminer la loi de Z, vérifier que $\displaystyle\sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$ et calculer son espérance.

Solution (**Ex.9** – *Maximum de deux variables géométriques*)
Posons $q = 1 - p$.
• $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq k)$
or $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k) = (1 - p)^k$ (les k premières expériences sont des échecs),
donc $\mathbb{P}(Z \leq k) = \left(1 - q^k\right)^2$ (y compris pour $k = 0$... remarque pour ce qui va suivre).
Enfin, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$
$\mathbb{P}(Z = k) = 2q^{k-1} - 2q^k + q^{2k} - q^{2k-2} = 2pq^{k-1} - (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$
• De $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ pour $r \in]0\,;\,1[$, on tire :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 2p \times \frac{1}{1-p} - (1 - q^2) \times \frac{1}{1-q^2} = 1.$$
• De $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ pour $r \in]0\,;\,1[$ (obtenue par dérivation de la série géométrique), on tire :
$\mathbb{E}(Z)$ existe et
$$\mathbb{E}(Z) = 2p \times \frac{1}{p^2} - (1 - q^2) \times \frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{2p - p^2} = \frac{3 - 2p}{p(2-p)}.$$

Exercice 10 *Maximum de variables uniformes*
Soit $m \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$ et $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ n variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[\![1\,;\,m]\!]$.
On note S_n la variable aléatoire égale à la plus grande des n variables X_i. Autrement dit
$$\forall \omega \in \Omega, \qquad S_n(\omega) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i(\omega)).$$

1. Dans le cas où $n = 2$, déterminer la loi de S_2, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On revient au cas général où $n \geqslant 2$.
   a) Déterminer $\mathbb{P}(S_n = m)$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(S_n)$. Commenter.

4. Autour des variables indicatrices

Exercice 11 *Produit de Bernoulli - Corrélation*
1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Que peut-on dire de X^2 ?
2. Soit $p \in]0\,;\,1[$. On effectue une suite de lancer d'une pièce amenant " pile " avec la probabilité p et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   • X_k la variable indicatrice de l'événement « le $k-$ème lancer donne " pile " »,
   • Y_k la variable indicatrice de l'événement « les $k-$ème et $(k + 1)-$ème lancers donnent tous les deux " pile " ».
   Pour tous k et j dans $\mathbb{N}^*$, calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_j)$.

Solution (**Ex.11** – *Produit de Bernoulli - Corrélation*)
1. $X(\Omega) = \{0; 1\}$ donc X^2 ne peut prendre que les valeurs $0^2 = 0$ et 1^2.
   De plus : $\left(X = 0 \Longleftrightarrow X^2 = 0\right)$ et $\left(X = 1 \Longleftrightarrow X^2 = 1\right)$.
   Donc finalement $X^2 = X$ (et en particulier $X^2 \sim \mathcal{B}(p)$)
2. Soient k et j dans $\mathbb{N}^*$. On a :$Y_k = X_kX_{k+1}$ et $Y_j = X_jX_{j+1}$.
   •Si $j \neq k - 1$ *et* $j \neq k$ *et* $j \neq k + 1$, alors les variables X_k, X_{k+1}, X_j et X_{j+1} sont 4 variables distinctes indépendantes, donc $Y_k = X_kX_{k+1}$ et $Y_j = X_jX_{j+1}$ sont indépendantes et leur covariance est nulle. Donc $\rho(Y_k, Y_j) = 0$.
   •Si $j = k$, alors $Y_j = Y_k$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) = \mathbb{V}(Y_k)$, $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sigma(Y_k)^2 = \mathbb{V}(Y_k)$, $\rho(Y_k, Y_j) = 1$. Ceci n'est pas surprenant puisqu'il y a un lien affine évident entre Y_k et Y_j : $Y_j = 1 \times Y_k + 0$...
   •Si $j = k + 1$, alors $Y_kY_j = X_kX_{k+1}^2X_{k+2} = X_kX_{k+1}X_{k+2}$.
   Par indépendance, $\mathbb{E}(Y_kY_j) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}X_{k+2} = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1})\mathbb{E}(X_{k+2}) = p^3$ et toujours par indépendance $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Donc $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$.
   Calculons $\mathbb{V}(Y_k)$. $Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)) = \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)$ par indépendance, donc $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p^2$ et $Y_k \sim \mathcal{B}(p^2)$.
   Par conséquent, $\mathbb{V}(Y_k) = p^2(1 - p^2)$. Il en est de même pour Y_j : $Y_j \sim \mathcal{B}(p^2)$.
   Alors $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sqrt{p^2(1-p^2)}\sqrt{p^2(1-p^2)} = p^2(1 - p^2)$. Finalement $\rho(Y_k, Y_j) = \dfrac{p^3(1-p)}{p^2(1-p^2)} = \dfrac{p(1-p)}{(1-p)(1+p)} = \dfrac{p}{1+p}$.
   •Si $j = k - 1$, alors $k = j + 1$ et en permutant les rôles de k et j dans ce qui précède, on obtient encore $\rho(Y_k, Y_j) = \dfrac{p}{1+p}$.

Exercice 12 *Étude de la loi hypergéométrique*
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant N boules, de couleur bleue ou rouge. On note p la proportion de boules bleues dans l'urne et q la proportion de boules rouges, de sorte que

$$p, q \in [0\,;\ 1], \quad p+q=1, \quad \mathrm{N}p \in [\![0\,;\ \mathrm{N}]\!], \quad \mathrm{N}q \in [\![0\,;\ \mathrm{N}]\!] \quad \textit{et} \quad \mathrm{N}p+\mathrm{N}q=\mathrm{N}.$$

Soit $n \in [\![1\,;\ \mathrm{N}]\!]$. On prélève dans l'urne **simultanément ou**, ce qui revient au même dans cette expérience, **successivement sans remise**, n boules dans $\mathcal{U}$ et on note X le nombre de boules bleues ainsi prélevées.

1. a) Justifier que $\mathrm{X}(\Omega) \subset [\![0\,;\ n]\!]$, puis que

$$\mathrm{X}(\Omega) = [\![\,max(0, n-\mathrm{N}q)\,;\ min(n, \mathrm{N}p)]\!].$$

b) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

c) Soit $k \in [\![0\,;\ n]\!]$. Montrer que, parmi ces tirages, il y en a exactement $\binom{\mathrm{N}p}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-k}$ contenant exactement k boules bleues.

Cette valeur est-elle valable lorsque $k > \mathrm{N}p$? Et lorsque $k < n-\mathrm{N}q$?

2. Justifier que :

$$\forall k \in [\![0\,;\ n]\!], \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{\binom{\mathrm{N}p}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}.$$

On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p, et on note $\mathrm{X} \sim \mathcal{H}(\mathrm{N}, n, p)$.

3. En déduire la **formule de Van der Monde** :

$$\forall (b,r) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{b}{k}\binom{r}{n-k} = \binom{b+r}{n}.$$

On suppose de plus les boules bleues numérotées de 1 et $\mathrm{N}p$. Pour tout i de $[\![1\,;\ \mathrm{N}p]\!]$, on note B_i la variable indicatrice de l'événement :

« la boule bleue de numéro i a été tirée ».

4. a) Justifier que, pour tout i de $[\![1\,;\ \mathrm{N}p]\!]$, B_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{n}{\mathrm{N}}$.

b) En déduire l'espérance de X.

5. a) Montrer que, pour tout i et j de $[\![1\,;\ \mathrm{N}p]\!]$ distincts, $\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j$ suit une loi de Bernoulli, et préciser son paramètre.

b) En déduire, pour tout i et j de $[\![1\,;\ \mathrm{N}p]\!]$ distincts, la covariance de B_i et B_j.

c) En déduire la variance de X.

6. On considère deux variables U et V indépendantes de loi respective $\mathcal{B}(u;p)$ et $\mathcal{B}(v;p)$. Soit $k \in [\![0\,;\ u+v]\!]$.

Montrer par le calcul que la loi conditionnelle de U conditionnée par l'événement $[\mathrm{U}+\mathrm{V}=k]$ est hypergéométrique de paramètres $u+v$, k et $\dfrac{u}{u+v}$.

5. Avec des fonctions génératrices

Exercice 13 *Stabilité des lois binomiales et de Poisson*

1. Soit X et Y indépendantes de loi respective $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la loi de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ à l'aide des fonctions génératrices.

2. Soit X et Y indépendantes de loi respective $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ à l'aide des fonctions génératrices.

Exercice 14 *Binomiale et parité*

On dispose de $2n+1$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. On lance simultanément ces jetons.

1. On note B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues. Quelle loi suivent les variables aléatoires B et N ?

2. a) Expliquer pourquoi une seule des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois.

b) X désigne la variable aléatoire égale à ce nombre impair. Calculer la loi de X.

3. a) Exprimer la fonction génératrice de X, notée $\mathrm{G_X}$, à l'aide de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1}$.

b) En déduire l'espérance et la variance de X.

Solution (**Ex.14** – *Binomiale et parité*)

1. B et N suivent $\mathcal{B}(2n+1, 1/2)$ (par définition de cette loi).

2. a) En notant B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues, $\mathrm{B}+\mathrm{N} = 2n+1$ est impair, ce qui est impossible si B et N sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Donc un, et un seul, des deux nombres B et N est impair.

b) • $\mathrm{X}(\Omega) = \{2k+1, k \in [\![0\,;\ n]\!]\}$.

• Pour tout k de $[\![0\,;\ n]\!]$, $[\mathrm{X}=2k+1] = [\mathrm{B}=2k+1] \cup [\mathrm{N}=2k+1]$, cette réunion étant disjointe.

Par additivité :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=2k+1) = 2 \times \binom{2n+1}{2k+1}\frac{1}{2^{2k+1}}\frac{1}{2^{2n+1-2k-1}} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n+1}{2k+1}$$

3. a) Par la formule du binôme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k x^k = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}x^k.$$

Donc $\mathrm{G_X}(x) = \dfrac{1}{2^{2n+1}}f(x)$.

b) $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1) = \dfrac{1}{2^{2n+1}}f'(1) = \dfrac{(2n+1)2^{2n}}{2^{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}.$

$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = \dfrac{(2n+1)2n}{4}$,

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2) = \dfrac{2n(2n+1)+4n+2-(2n+1)^2}{4} = \dfrac{2n+1}{4}$.

Exercice 15 *Loi de Pascal - III*

Soit $p \in]\,0\,;\ 1[$. Soit (T_n) une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k \qquad (\mathcal{R})$

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction génératrice de S_n, et en déduire sa loi. *Indication : que donne la n-iéme dérivation de la série géométrique ?*

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n

a) en exploitant la relation $(\mathcal{R})$;

b) en exploitant sa fonction génératrice.

Solution (**Ex.15** – *Loi de Pascal - III*)

1. Par indépendance des T_k, $G_{S_n} = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}$.

Or pour tout k, $G_{T_k} : t \mapsto \dfrac{pt}{1-qt}$, donc $G_{S_n} : t \mapsto p^n t^n \dfrac{1}{(1-qt)^n}$.

Saisissons-nous de l'indication, pour x tel que $|x| < 1$:

$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ d'une part,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(k+1)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n)!}{k!}x^k \text{ d'autre part.}$$

On en tire : $\forall t \in [\,0\,;\ 1]$,

$$\frac{1}{(1-qt)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n-1)!}{k!}(qt)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{k}q^k t^k.$$

D'où : $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{k}q^k p^n t^{k+n} = \sum_{j=n}^{+\infty}\binom{j-1}{j-n}q^{j-n}p^n t^j$.

On en déduit :

- $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$,
- $\forall j \geq n, \quad \mathbb{P}(S_n = j) = \dbinom{j-1}{j-n} q^{j-n}p^n$.

Ceci s'interprète facilement : S_n est le rang d'apparition du $n-$ième succès dans un schéma de Bernoulli. Donc $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$. De plus, les suites d'épreuves favorables à $[S_n = j]$ sont les suites de j lancers dont n succès avec le dernier à la fin, $j-n$ échecs, à placer parmi les $j-1$ épreuves de rang 1 à $j-1$. Cela fait $\dbinom{j-1}{j-n}$ suites possibles, deux à deux incompatibles et toutes de probabilité $p^n q^{j-n}$. Donc $\mathbb{P}(S_n = j) = \dbinom{j-1}{j-n}q^{j-n}p^n$... ce qui en fait redémontre le résultat précédent.

2. Sachant $[S_2 = k]$, T_1 prend ses valeurs dans $[\![\,1\,;\ k-1]\!]$. Soit $i \in [\![\,1\,;\ k-1]\!]$.

$$\mathbb{P}_{[S_2=k]}(T_1 = i) = \frac{\mathbb{P}([S_2 = k] \cap [T_1 = i]}{\mathbb{P}(S_2 = k)} = \frac{\mathbb{P}([T_2 = k-i] \cap [T_1 = i]}{\mathbb{P}(S_2 = k)}$$

Or T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}_{[S_2=k]}(T_1 = i) = \frac{\mathbb{P}(T_2 = k-i)\mathbb{P}(T_1 = i)}{\mathbb{P}(S_2 = k)} = \frac{pq^{k-i-1}pq^{i-1}}{\binom{k-1}{k-2}q^{k-2}p^2} = \frac{1}{k-1}$$

La seule question est de savoir où a eu lieu le premier des 2 succès, et la moralité est que ça ne dépend plus de la probabilité de succès, mais est parfaitement uniforme : la loi de T_1 conditionnée par $[S_2 = k]$ est la loi uniforme sur $[\![\,1\,;\ k-1]\!]$.

3. $\mathbb{E}(S_n) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(T_i) = \dfrac{n}{p}$.

6. Autour de l'espérance par antirépartition

Exercice 16 *Large sera la chute !*

On tire indéfiniment au hasard et avec remise des jetons dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note $(u_i)_{i\geqslant 1}$ la suite infinie des numéros obtenus. On s'intéresse au temps T_n d'attente de la première chute large définie précisément par

$$[T_n = k] \text{ signifie que : } \quad u_1 < u_2 < \cdots < u_{k-1} \geqslant u_k$$

1. Préciser $T_n(\Omega)$ et déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}(T_n > k)$.

2. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de T_n.

3. a) Montrer que, pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) < +\infty \text{ si, et seulement si, } \sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X > k) \text{ converge.}$$

b) Qu'en déduire en cas de convergence de la série précédente ?

4. En déduire l'existence et la valeur de la variance de T_n.

Solution (**Ex.16** – *Large sera la chute !*)

1. $\mathrm{T}_n(\Omega) = [\![2\,;\ n+1]\!]$.
Soit $k \in [\![2\,;\ n]\!]$. Jusqu'au rang k inclus, il y a n^k tirages possibles. Les tirages favorables à $[\mathrm{T}_n > k]$ sont les k−listes $(u_1, \dots, u_k)$ strictement croissantes. Une telle liste se construit en choisissant k jetons distincts et en les plaçant nécessairement en ordre croissant. Il y a donc $\binom{n}{k}$ cas favorables. Donc $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.
On observe enfin que cette formule est encore valable pour $k \in \{0,1\}$ pour lequel $\mathbb{P}(\mathrm{T} > k) = 1$, et pour $k \geqslant n+1$ pour lequel $\mathbb{P}(\mathrm{T} > k) = 0$.

2. Comme $\mathrm{T}_n(\Omega)$ est fini, T_n admet une espérance finie.
Comme $\mathrm{T}_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \overset{\text{Newton}}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

3. a) $$\sum_{k \geqslant 0} k\mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i) \right) = \sum_{0 \leqslant k < i} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = i)$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(\mathrm{X} = i) \sum_{k=0}^{i-1} k \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = i) \frac{i(i-1)}{2}$$
$$= \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2} \right)$$
Les termes étant tous positifs, la finitude d'une des sommes entraine celle des autres.

b) En cas de convergence, $\mathbb{E}\left(\dfrac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2} \right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X} > k)$.

4. Comme seuls $n-1$ termes sont non nuls, la série converge et
$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{T}_n(\mathrm{T}_n - 1)}{2} \right) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{n^k} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{n^j}$$
$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{T}_n(\mathrm{T}_n - 1)}{2} \right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
Par linéarité, $\mathbb{E}\left(\dfrac{\mathrm{T}_n(\mathrm{T}_n - 1)}{2} \right) = \dfrac{1}{2} \left(\mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) \right)$ d'où
$$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$
$$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(3 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

7. Un exemple d'étude de couple et de transfert par double somme

Exercice 17 *Minimum et maximum de deux uniformes : l'art des sommations finies*

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On tire successivement et avec remise des boules dans une urne contenant exactement n boules numérotées de 1 à n et on note X et Y les numéros des deux premières boules obtenues.

1. Justifier que $\Omega = [\![1\,;\ n]\!]^2$ est un univers susceptible de modéliser l'expérience.

2. Donner la loi suivie par X et Y.
On note I et S les variables aléatoires respectivement égales à $\inf(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\sup(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

3. Dans cette question, on se propose de déterminer l'espérance, la variance et la covariance de I et S sans utiliser la loi du couple (I, S).
a) Que vaut, pour $k \in [\![0\,;\ n]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{I} > k)$?
b) En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{I})$, puis $\mathbb{E}(\mathrm{S})$ (au fait, que vaut $\mathrm{I} + \mathrm{S}$?).
c) Montrer que, pour toute variable aléatoire Z telle que $\mathrm{Z}(\Omega) \subset [\![0\,;\ n]\!]$, on a
$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{Z}(\mathrm{Z}-1)}{2} \right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{Z} > k).$$
d) En déduire $\mathbb{V}(\mathrm{I})$.
e) Soit $k \in [\![1\,;\ n]\!]$. Montrer que
$$f : [\mathrm{S} = k] \mapsto [\mathrm{I} = n+1-k], \omega = (x, y) \mapsto (n+1-x, n+1-y)$$
est une bijection. *Indication : on pourra vérifier que les ensembles de départ et d'arrivée sont cohérents et calculer $f \circ f$.*
f) En déduire une égalité de probabilités et montrer que $\mathbb{V}(\mathrm{S}) = \mathbb{V}(\mathrm{I})$.
g) Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{I}, \mathrm{S})$.

4. Dans cette question, on s'appuie sur la loi du couple (I, S).
a) Déterminer la loi de (I, S).
b) En déduire la loi, l'espérance et la variance de I.
c) Déterminer $\mathrm{Cov}(\mathrm{I}, \mathrm{S})$.
d) En déduire la variance de S, sans chercher a déterminer sa loi.

Exercice 18 *Longueurs de séries : l'art des sommations géométriques.*
On effectue une succession de lancers indépendants avec une pièce donnant *« pile »* avec la probabilité $p \in]0\,;\,1[$ et *« face »* avec la probabilité $q = 1-p$.
On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre.
On définit de manière analogue la longueur L_2 de la 2-ème série.
Par exemple, si les premiers lancers donnent *pile-pile-face-pile-...* alors $L_1 = 2$ et $L_2 = 1$ tandis que si les premiers lancers donnent *face-pile-pile-...* alors $L_1 = 1$ et $L_2 \geqslant 2$ mais on ne connaît pas encore la valeur exacte de L_2.

1. *Calculs préliminaires -*
Pour $r \in]0\,;\,1[$, que valent $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k$, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^k$?

2. a) Déterminer la loi de L_1, son espérance et sa variance.
b) Pour quelle valeur de p $\mathbb{E}(L_1)$ est-elle minimale ? Et maximale ?

3. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi de L_2, son espérance et sa variance.

4. a) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?
b) Dans ce cas, quelle loi usuelle suivent L_1 et L_2 ?

5. a) Calculer par transfert $\mathbb{E}(L_1L_2)$.
b) En déduire $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.

6. a) Déterminer la loi de $L_1 + L_2$.
b) En déduire $\mathbb{E}(L_1+L_2)$ et vérifier que $\mathbb{E}(L_1+L_2) = \mathbb{E}(L_1) + \mathbb{E}(L_2)$.
c) Calculer $\mathbb{V}(L_1+L_2)$ et en retrouver $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.

Solution (**Ex.18** – *Longueurs de séries : l'art des sommations géométriques.*)

1. *Calculs préliminaires - Version analytique*
Par dérivation terme à terme de la série géométrique de rayon de convergence $R = 1$, pour tout $r \in]0\,;\,1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(k(k-1)+k)r^k\big) = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$$

Calculs préliminaires - Version probabiliste
Comme $r \in]0\,;\,1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}(1-r)$ est l'espérance de la loi géométrique de paramètre $1-r$: $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}(1-r) = \frac{1}{1-r}$, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$.

De même, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^{k-1}(1-r) = \mathbb{E}(X^2)$ si X suit la loi $\mathcal{G}(1-r)$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^{k-1}(1-r) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{1}{(1-r)^2} = \frac{r+1}{(1-r)^2}$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^k = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$.

Pour alléger les écritures, je note par exemple $P_1P_2F_3P_4$ l'événement « *les 4 premiers lancers donnent pile, puis pile, puis face, puis pile* ». Cet événement a pour probabilité p^3q par indépendance mutuelle des lancers.

2. a) • $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (P_1, F_1) donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 = k) &= \mathbb{P}(P_1 \cap [L_1 = k]) + \mathbb{P}(F_1 \cap [L_1 = k])\\ &= \mathbb{P}(P_1 \dots P_kF_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1 \dots F_kP_{k+1})\\ &= p^kq + pq^k\end{aligned}$$

☞On vérifie sans peine par la série géométrique que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = \frac{pq}{(1-p)} + \frac{pq}{(1-q)} = p + q = 1$$

donc L_1 est parfaitement définie car l'événement *« la première série s'arrête au bout d'un nombre fini de lancers »* est presque-certain.

• Par les calculs préliminaires, L_1 possède une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{pq}{q^2} + \frac{pq}{p^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2+q^2}{pq} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{pq}$$

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{p^2+q^2}{pq} = \frac{1}{pq} - 2.$$

$$\mathbb{E}(L_1^2) = \frac{qp(p+1)}{q^3} + \frac{pq(q+1)}{p^3} = \frac{p(p+1)}{q^2} + \frac{q(q+1)}{p^2}$$

$$\mathbb{V}(L_1) = \frac{p^3(p+1) + q^3(q+1) - \big(p^4 + 2p^2q^2 + q^4\big)}{p^2q^2}$$

$$\mathbb{V}(L_1) = \frac{p^3 + q^3 - 2p^2q^2}{p^2q^2} = \frac{p^3+q^3}{p^2q^2} - 2.$$

b) $\mathbb{E}(L_1) = \frac{1}{pq} - 2$ or $pq = p(1-p) = -p^2 + p = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc $0 < pq \leqslant \frac{1}{4}$ avec $pq \xrightarrow[p\to 0]{} +0$ et $pq = \frac{1}{4}$ si, et seulement si, $p = q = \frac{1}{2}$.

On en déduit que, pour $p \in]0\,;\,1[$, $\dfrac{1}{pq}$ est minoré par 4, atteint en $p = 1/2$ uniquement, et n'est pas majorée.
D'où $\mathbb{E}(\mathrm{L}_1)$ est minimale pour $p = 1/2$ et vaut alors 2, et n'est pas majorée car $\mathbb{E}(\mathrm{L}_1) \xrightarrow[p\to 0 \text{ ou } 1]{} +\infty$: pas de valeur maximale.

3. • $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)(\Omega) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et, pour tout $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\mathrm{P}_1, \mathrm{F}_1)$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = j, \mathrm{L}_2 = k) = \mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \cap [\mathrm{L}_1 = j] \cap [\mathrm{L}_2 = k]) + \mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap [\mathrm{L}_1 = j] \cap [\mathrm{L}_2 = k])$$
$$= \mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_j \mathrm{F}_{j+1} \ldots \mathrm{F}_{j+k} \mathrm{P}_{j+k+1}) + \mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \ldots \mathrm{F}_j \mathrm{P}_{j+1} \ldots \mathrm{P}_{j+k} \mathrm{F}_{j+k+1})$$
$$= p^{j+1} q^k + p^k q^{j+1}$$

• Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathrm{L}_1 = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{L}_2 = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = j, \mathrm{L}_2 = k) = \frac{p^2 q^k}{1-p} + \frac{p^k q^2}{1-q} = p^2 q^{k-1} + p^{k-1} q^2$$

☞On vérifie sans peine par la série géométrique que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{L}_2 = k]) = \frac{p^2}{(1-q)} + \frac{q^2}{(1-p)} = p + q = 1$$

donc L_2 est parfaitement définie car l'événement *« la deuxième série s'arrête au bout d'un nombre fini de lancers »* est presque-certain.
• Par les calculs préliminaires, $\mathbb{E}(\mathrm{L}_2)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{L}_2)$ existent et

$$\mathbb{E}(\mathrm{L}_2) = \frac{p^2}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2$$

☞ Chose surprenante *a priori*, $\mathbb{E}(\mathrm{L}_2)$ ne dépend pas de p et q. Une explication ?

$$\mathbb{E}(\mathrm{L}_2^2) = \frac{p^2 q(1+q)}{q(1-q)^3} + \frac{q^2 p(1+p)}{p(1-p)^3} = \frac{1+q}{p} + \frac{1+p}{q} = \frac{p^2+q^2+1}{pq}$$

$$\mathbb{V}(\mathrm{L}_2) = \frac{p^2+q^2+1}{pq} - 4 = \frac{p^2+q^2-4pq+1}{pq}$$

4. • On a :
$\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = 1, \mathrm{L}_2 = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = 1)\mathbb{P}(\mathrm{L}_2 = 1) \iff p^2 q + pq^2 = (2pq)(p^2+q^2) \iff 1 = 2p^2 + 2q^2 \iff 1 = 4p^2 - 4p + 2 \iff p^2 - p + \dfrac{1}{4} = 0 \iff \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff p = \dfrac{1}{2}$

Donc si L_1 et L_2 sont indépendantes, alors $p = \dfrac{1}{2} = q$.

• Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, alors pour tout $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = j, \mathrm{L}_2 = k) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k} \text{ et}$$

$$\mathbb{P}([\mathrm{L}_1 = j] \cap [\mathrm{L}_2 = k]) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}$$

donc L_1 et L_2 sont indépendantes.

L_1 et L_2 sont indépendantes si, et seulement si, $p = q = 1/2$.

☞ On peut observer que, dans ce cas, L_1 et L_2 suivent toutes les deux des lois géométriques de paramètre $1/2$.

5. a) Déterminer la loi de $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$.
• $(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$
• Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 = n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} ([\mathrm{L}_1 = k] \cap [\mathrm{L}_2 = n-k])\right), \text{ et par incompatibilité}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = k, \mathrm{L}_2 = n-k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = k, \mathrm{L}_2 = n-k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(p^{k+1} q^{n-k} + p^{n-k} q^{k+1}\right)$$

Or pour $p \neq 1/2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} p^{k+1} q^{n-k} = p^2 q^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^k = p^2 q^{n-1} \frac{1 - (p/q)^{n-1}}{1 - p/q} = \frac{p^2 q^n}{q-p} \times \frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q^{n-1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} p^{k+1} q^{n-k} = \frac{p^2 q}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right), \text{ et par symétrie de } p \text{ et } q,$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 = n) = \frac{p^2 q}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right) + \frac{q^2 p}{p-q}\left(p^{n-1} - q^{n-1}\right)$$

Or $\dfrac{p^2 q}{q-p} - \dfrac{q^2 p}{p-q} = \dfrac{p^2 q + q^2 p}{q-p} = \dfrac{pq}{q-p}$, donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 = n) = \frac{p}{q-p} q^n + \frac{q}{p-q} p^n$$

Pour $p = 1/2$, $\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 = n) = (n-1)\dfrac{1}{2^n}$

b) Petit calcul préliminaire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n q^n = \frac{q}{p^2} - q = \frac{q(1-p^2)}{p^2} = \frac{q(1-p)(1+p)}{p^2} = \frac{q^2(1+p)}{p^2}$$

Alors pour $p \neq 1/2$

$\mathbb{E}(L_1+L_2) = \dfrac{1}{q-p}\left(\dfrac{q^2(1+p)}{p} - \dfrac{p^2(1+q)}{q}\right) = \dfrac{1}{q-p} \times \dfrac{1}{pq}\left(q^3+pq^3-p^3-p^3q\right)$

$q^3+pq^3-p^3-p^3q = (q-p)(q^2+pq+p^2+pq(p+q)) = (q-p)(p+q)^2 = q-p$

Donc $\mathbb{E}(L_1+L_2) = \dfrac{1}{pq}$ =... $= \mathbb{E}(L_1)+\mathbb{E}(L_2)$ effectivement.

Et si $p = 1/2$

$\mathbb{E}(L_1+L_2) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{2^n} = \frac{2}{(1/2)^3} = 4 = \frac{1}{pq}$... la formule précédente demeure.