Exercice 1 *Matrices de projections orthogonales*

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ et $G = \mathrm{Vect}(1, X)$.
   Déterminer les matrices dans la base canonique des projections orthogonales sur F puis sur G.

Solution (**Ex.1** – *Matrices de projections orthogonales*)

1. Une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}X; \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2-1)\right)$.
2. $1 \in F$, $X^2 \in F$ et $X \in F^\perp$ vue la famille orthonormale précédente, donc $\mathcal{M}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}X\right)$ est manifestement une base orthonormale de G. On peut s'en servir pour déterminer $p_G(X^2)$. Par ailleurs, on a encore $1 \in G$ et $X \in G$.
   Donc $\mathcal{M}(p_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 *Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme*

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on désigne par x le triplet (x_1, x_2, x_3).

1. Soit $N : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3}$.
   Prouver que N est une norme euclidienne sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour le produit scalaire associé à N.

Solution (**Ex.2** – *Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme*)

1. Produit scalaire associé :
   $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\right) =$
   $x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$.
   $\langle x, x\rangle = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$.
2. (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1; 0; 0)$, $u_2 = (-2; 1; 0)$ et $u_3 = (-5; 2; 1)$ est une orthonormale de E obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 3 *Matrices de projection et symétrie orthogonales*

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique) de :

1. la projection orthogonale p sur le plan Q d'équation $x + y + z = 0$.
2. la symétrie orthogonale s admettant le plan Q pour axe.

Solution (**Ex.3** – *Matrices de projection et symétrie orthogonales*)

1. Il est plus rapide de passer par $Q^\perp$...
   $(x, y, z) \in Q \iff \langle (x, y, z), (1, 1, 1)\rangle = 0 \iff (x, y, z) \perp (1, 1, 1)$, donc $Q^\perp = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$ et une base orthonormale de $Q^\perp$ est (u) avec $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.
   Donc $p_{Q^\perp}((x, y, z)) = \langle (x, y, z), u\rangle\, u = \frac{1}{3}(x + y + z)$.
   D'où $\mathcal{M}_\mathcal{B}(p_{Q^\perp}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Or $p_Q + p_{Q^\perp} = id_E$ donc $\mathcal{M}_\mathcal{B}(p_Q) = I_3 - \mathcal{M}_\mathcal{B}(p_{Q^\perp}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $s = 2p_Q - id_E$ donc $\mathcal{M}_\mathcal{B}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \geq 1$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose, pour A et B dans E, $\quad \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\,({}^tA.B)$.

1. Montrer que
   $$\forall A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} a_{i,j}b_{i,j}.$$

2. Vérifier que $\langle .,. \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une base orthonormale ?

4. Soit Δ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. Déterminer $\Delta^\perp$.

5. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.

Solution (**Ex.4** – *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. Calculons explicitement $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ en fonction des coefficients de A et B.

$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\left(()\ {}^t\mathrm{AB}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ({}^t\mathrm{A})_{i,j} (\mathrm{B})_{j,i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{j,i} \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{j,i} b_{j,i}$$

ce qui est la somme voulue, quitte à permuter le nom des indices muets.

À retenir :

$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices A et B... exactement comme le produit canonique de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{A} \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$ est la somme des carrés des coefficients de A.

2. $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire car la transposition et la trace le sont.

$\langle .,. \rangle$ est symétrique car $\mathrm{Tr}\left(\left({}^t\mathrm{AB}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\left({}^t\mathrm{BA}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{BA}\right)$.

est positif, et ne s'annule que si tous les coefficients de A sont nuls, i.e. si $\mathrm{A} = 0$.

$\langle .,. \rangle$ est positif et défini.

3. Comme vu plus haut, $\langle \mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{k,\ell} \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$.

Si $(i,j) \neq (k,\ell)$, le seul « 1 » des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$ n'est pas au même endroit, donc tous les produits sont nuls, donc $\langle \mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{k,\ell} \rangle = 0$

De plus, $||\mathrm{E}_{i,j}||^2$ est la somme des carrés de ses coefficients, donc vaut 1.

Ainsi la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

4. Déterminer $\Delta^\perp$ (on pourra commencer par déterminer une base orthonormale de Δ). La famille $(\mathrm{E}_{i,i})_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ est une base de Δ, orthonormale puisque extraite d'une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Première approche -

Alors, par complétion en une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\left((\mathrm{E}_{i,j})_{i \neq j}\right)$ est le supplémentaire orthogonal de Δ...

• Seconde approche -

Si $\mathrm{A} \in \Delta^\perp$, alors $\mathrm{A} \perp \mathrm{E}_{i,i}$ pour tout i. Or $\langle \mathrm{A}, \mathrm{E}_{i,i} \rangle = a_{i,i}$, donc $a_{i,i} = 0$ pour tout i.

• Bilan, par l'une ou l'autre approche -

$\Delta^\perp$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 5 *Isométries diagonalisables*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.

On suppose f diagonalisable. Montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution (**Ex.5** – *Isométries diagonalisables*)

f est une isométrie donc ses seules valeurs propres réelles possibles sont -1 et 1 : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Trois cas sont possibles :

• $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = 1 \times id_\mathrm{E}$;

• $\mathrm{Sp}(f) = \{-1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = -1 \times id_\mathrm{E}$;

• $\mathrm{Sp}(f) = \{-1; 1\}$, et comme f est diagonalisable, dans une base propre $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_q \end{pmatrix}$ (avec $p = \dim(\mathrm{SEP}(f, -1))$ et $q = \dim(\mathrm{SEP}(f, 1))$).

Dans les trois cas, $f^2 = id_\mathrm{E}$.

Donc f est une symétrie, toujours d'axe E_1 et de direction E_{-1}.

Soit $u \in \mathrm{E}_1$ et $v \in \mathrm{E}_{-1}$.

f est orthogonale donc conserve le produit scalaire, donc $\langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, -v \rangle = -\langle u, v \rangle$, donc $\langle u, v \rangle = 0$ et $u \perp v$.

Ceci prouve que $\mathrm{E}_1 \perp \mathrm{E}_{-1}$ donc que f est une symétrie orthogonale.

Exercice 6 *Complémentaire d'une isométrie*

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E.

On pose $g = id_\mathrm{E} - f$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \left(\mathrm{Im}(g)\right)^\perp$.

Solution (**Ex.6** – *Complémentaire d'une isométrie*)

Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$ et $y \in \mathrm{Im}(g)$.

$x \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $x = f(x)$.

Soit $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = g(z) = z - f(z)$.

$\langle x, y \rangle = \langle x, z - f(z) \rangle = \langle x, z \rangle - \langle f(x), f(z) \rangle$ car $x = f(x)$,

$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle$ car f conserve le produit scalaire.

$\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi : $\mathrm{Ker}(g) \perp \mathrm{Im}(g)$.

Mais par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{E})$.
Donc $\mathrm{Ker}(g)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 7 *Étude d'une isométrie*
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B}$ sa base canonique.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que f est une isométrie.
2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + z = 0$ est stable par f.
3. $\mathcal{P}^\perp$ est-il stable par f ?
4. Déterminer la matrice de f relativement à une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp = \mathrm{E}$.

Solution (**Ex.7** – *Étude d'une isométrie*)
1. Les colonnes de M forment une famille orthonormale. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, f est une isométrie de E.
2. $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0)) = \mathrm{Vect}(u,v)$.
Or $f(u) = \sqrt{2}v \in \mathcal{P}$ et $f(v) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}u \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$ est stable par f.
3. f est une isométrie et $\mathcal{P}$ est stable par f donc $\mathcal{P}^\perp$ est stable par f.
4. $\mathcal{P}^\perp = \mathrm{Vect}((1,0,1))) = \mathrm{Vect}(w)$.
Prenons $\mathcal{C} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}u, v, \dfrac{1}{\sqrt{2}}w\right)$, base orthonormale adaptée à $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp = \mathrm{E}$. Alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 8 *Équation matricielle (CCP 2019)*
1. Montrer que $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB})$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux
3. En déduire que, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\left({}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2\right) \iff \left(\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right)$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, il existe M non symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$. On pourra chercher M sous la forme $\mathrm{V}\,{}^t\mathrm{U}$ avec U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
5. Montrer que toutes les solutions de ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont symétriques.

Solution (**Ex.8** – *Équation matricielle (CCP 2019)*)
1. À savoir faire : $\mathrm{Tr}\left(()\ {}^t\mathrm{AB}\right) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}b_{i,j}$...
2. Toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$ avec $\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Et pour S et A symétrique et antisymétrique respectivement :
$\left(\mathrm{S} \mid \mathrm{A}\right) = \mathrm{Tr}\left(()\ {}^t\mathrm{SA}\right) = \mathrm{Tr}\left(()\,\mathrm{SA}\right) = \mathrm{Tr}\left(()\ {}^t(\mathrm{AS})\right) = \mathrm{Tr}\left(()\ {}^t\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{A}\right) = \mathrm{Tr}\left(() - \mathrm{SA}\right) = -\left(\mathrm{S} \mid \mathrm{A}\right)$, donc $\left(\mathrm{A} \mid \mathrm{S}\right) = 0$, i.e. $\mathrm{S} \perp \mathrm{A}$.
3. • Si $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$....
• Soit $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$ telle que ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$. Alors
$(\mathrm{S} - \mathrm{A})(\mathrm{S} + \mathrm{A}) = (\mathrm{S} + \mathrm{A})^2$, donc $-\mathrm{AS} - \mathrm{A}^2 = \mathrm{AS} + \mathrm{A}^2$, donc $\mathrm{A}^2 + \mathrm{AS} = 0$, donc $\mathrm{AM} = 0$, donc $\mathrm{M} \perp \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{S} \perp \mathrm{A}$, alors $(\mathrm{M} - \mathrm{S}) \perp \mathrm{A}$, i.e. $\mathrm{A} \perp \mathrm{A}$, donc $\mathrm{A} = 0$, et $\mathrm{M} = \mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $\mathrm{M} = \mathrm{V}\,{}^t\mathrm{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2 \iff \mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}\mathrm{V}\,{}^t\mathrm{U} = \mathrm{V}\,{}^t\mathrm{U}\mathrm{V}\,{}^t\mathrm{U} \iff \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U} = \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)\mathrm{V}\,{}^t\mathrm{U}$$

Débrouillons nous pour que les deux sommes soient nulles :

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ conduit à } \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ i & -1 & i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrice}$$

non symétrique vérifiant ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$, valable à partir de $n = 3$...
5. Supposons ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{M}^2$. En écrivant $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, en considérant le premier et le dernier coefficient de ${}^t\mathrm{MM}$ et de M^2, on a :

$a^2+c^2=a^2+bc$ et $b^2+d^2=bc+d^2$, donc $c^2=bc$ et $b^2=bc$.
Si $c\neq 0$, on en déduit $b=c$ et M est symétrique.
Si $c=0$, alors $b^2=0$ donc $b=0=c$ et M est symétrique.

Exercice 9 *Une formule pour les matrices de projections orthogonales*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{E}=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle .,.\rangle$. Pour $\mathrm{X}\in\mathrm{E}$, X^{T} désigne la transposée de X.
Soit $d\in[\![1\,;\,n]\!]$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension d.

1. On suppose que $(\mathrm{U}_1,\dots,\mathrm{U}_d)$ une base orthonormale de F.
Soit $\mathrm{M}=\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\mathrm{U}_i{\mathrm{U}_i}^{\mathrm{T}}$.
Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

2. On suppose que $(\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_d)$ une base quelconque de F et on note A la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ donc les colonnes sont $\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_d$.
a) Montrer que, pour tout X de E,
i – $\mathrm{X}\in\mathrm{F}\iff\exists\mathrm{Y}\in\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{AY}=\mathrm{X}$,
ii – $\mathrm{X}\in\mathrm{F}^{\perp}\iff\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}=0$.
b) Montrer que $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ est une matrice inversible. *On pourra déterminer* $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})$.
c) Soit $\mathrm{M}=\mathrm{A}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big)^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.
Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

3. *Application - Impératif d'utiliser ce qui précède !* Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$
a) en utilisant une base quelconque de F,
b) en utilisant une base orthonormale de F.

Solution (**Ex.9** – *Une formule pour les matrices de projections orthogonales*)

1. $\forall\mathrm{X}\in\mathrm{E}$,
$$\mathrm{MX}=\sum_{i=1}^{d}\mathrm{U}_i{\mathrm{U}_i}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}=\sum_{i=1}^{d}\mathrm{U}_i\langle\mathrm{U}_i,\mathrm{X}\rangle=\sum_{i=1}^{d}\langle\mathrm{X},\mathrm{U}_i\rangle\,\mathrm{U}_i=p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X})$$
d'après la propriété du cours, puisque $(\mathrm{U}_1,\dots,\mathrm{U}_d)$ est une base orthonormale de F.

2. a) i – Il suffit d'observer que si $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_d\end{pmatrix}$, alors
$$\mathrm{AY}=\sum_{i=1}^{d}y_i\mathrm{C}_i.$$
Comme $(\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_d)$ est une base de F, donc une famille génératrice, on a bien :
$$\mathrm{X}\in\mathrm{F}\iff\exists\mathrm{Y}\in\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{AY}=\mathrm{X}.$$

ii – Pour tout $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}=\begin{pmatrix}\langle\mathrm{C}_1,\mathrm{X}\rangle\\ \vdots\\ \langle\mathrm{C}_d,\mathrm{X}\rangle\end{pmatrix}$.
Comme $(\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_d)$ est une base de F, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}=0\iff\mathrm{X}\in\mathrm{F}^{\perp}$.

b) • $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
• Soit $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.
$\mathrm{X}\in\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})\Longrightarrow\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}=0\Longrightarrow||\mathrm{AX}||=0\Longrightarrow\mathrm{AX}=0$.
Or $\mathrm{AX}=\displaystyle\sum_{i=1}^{d}x_i\mathrm{C}_i$ et $(\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_d)$ est une base de F, donc une famille libre.
Donc $\mathrm{AX}=0\Longrightarrow\mathrm{X}=0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big)=\{0\}$.
• Par la formule du rang, $\mathrm{rg}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big)=d$ donc $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ est inversible.

c) Soit $\mathrm{M}=\mathrm{A}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big)^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.
Soit $\mathrm{X}\in\mathrm{E}$ et $\mathrm{Y}=\mathrm{MX}$.
① Comme $\mathrm{Y}=\mathrm{A}\big[(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\big]\mathrm{X}$ avec $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\in\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Y}\in\mathrm{F}$ d'après **i**.
② $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\big(\mathrm{X}-\mathrm{Y}\big)=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}=0$ donc d'après **ii** $\mathrm{X}-\mathrm{Y}\in\mathrm{F}^{\perp}$.
③ Ainsi $\mathrm{Y}\in\mathrm{F}$ et $\mathrm{X}-\mathrm{Y}\in\mathrm{F}^{\perp}$, donc Y est le projeté orthogonal de X sur F.
④ Ceci étant vrai pour tout X de E, M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

3. a) Prenons $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.
Alors $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ et

$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Par le procédé de Gram-Schmidt, prenons

$$\mathrm{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathrm{U}_1{\mathrm{U}_1}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U}_2{\mathrm{U}_2}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Et

$$\mathrm{M} = \mathrm{U}_1{\mathrm{U}_1}^{\mathrm{T}} + \mathrm{U}_2{\mathrm{U}_2}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 *Projections sur des droites et des hyperplans*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$, muni du produit scalaire canonique.

1. a) Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{E} \setminus 0$ et $\Delta = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.
Montrer que $\mathrm{P} = \dfrac{1}{||\mathrm{U}||^2}\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U}$ est la matrice de la projection orthogonale sur Δ dans la base canonique.

b) En déduire la matrice Q représentant la projection orthogonale sur l'hyperplan $\Delta^{\perp}$.

2. En exploitant ce qui précède, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale ayant pour axe l'hyperplan

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{E}, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}.$$

Exercice 11 *Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et n un entier naturel au moins égal à 2.
Dans $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère

$$\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto a\mathrm{M} + b\mathrm{M}^{\mathrm{T}}.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2. a) Rappeler la définition du produit scalaire canonique de E.
b) Justifier que φ est diagonalisable.

3. a) Déterminer les éléments propres de φ.
b) Préciser $\det(\varphi)$ et $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

4. a) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une projection orthogonale ?
b) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une symétrie orthogonale ?

Exercice 12 *Diagonalisation orthogonale des matrices J_n*

Soit $n \geq 2$, $\mathrm{J}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Justifier que J_n est diagonalisable, et possède exactement deux sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.

2. En déduire l'existence d'une matrice $\mathrm{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{J}_n = \mathrm{P}_n \times diag(0, \ldots, 0, n) \times \mathrm{P}_n^{\mathrm{T}}.$$

3. Expliciter une matrice P_2 convenable.

4. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commute avec J_2, alors il existe $(a, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathrm{P}_2^{\mathrm{T}}$$

.

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{M}_n = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Que vaut $\mathrm{P}_n^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_n\mathrm{P}_n$?

Solution (**Ex.12** – *Diagonalisation orthogonale des matrices J_n*)

1. $\mathrm{rg}(\mathrm{J}_n) = n - 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{J}_n)$ et $\dim \mathrm{E}_0 = n - 1$.
De plus : $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3, \ldots, \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_n\big)$.

J_n possède au plus une autre valeur propre, dont le sous-espace propre associé sera de dimension 1.
En notant $U_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne ne contenant que des « 1 », $J_n U_n = nU_n$ donc $n \in \mathrm{Sp}(J_n)$ et $E_n = \mathrm{Vect}(U_n)$.
Donc J_n est diagonalisable et $E_0 \oplus E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Comme : $\forall j \in [\![2\,;\, n]\!], \langle E_1 - E_j, U_n \rangle = 0$, on a $E_0 \perp E_n$.

2. Soit $(C_1, \dots, C_{n-1})$ une base orthonormale de E_0 (obtenue par exemple par le procédé de Gram-Schmidt) et $C_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} U_n$.
Alors la matrice de passage P_n de la base canonique orthonormale à la base $(C_1, \dots, C_n)$ elle aussi orthonormale est une matrice orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres de J_n, d'où
$J_n = P_n \times diag(0, \dots, 0, n) \times P_n^{-1} = P_n \times diag(0, \dots, 0, n) \times P_n^{\mathrm{T}}$.

3. Pour $n = 2$, $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $P_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

4. Notons $J = J_2$, $P = P_2$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que $J = PDP^{-1}$, et notons $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
En multipliant par P^{-1} et P :
$AJ = JA \iff BD = DB \iff \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \iff b = c = 0.$
Donc $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, i.e. $A = P_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}}$.

Exercice 13 *Des produits scalaires sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*

1. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A^{\mathrm{T}}A$ est symétrique positive et définie.

2. Montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AY$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. On ne suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. La formule précédente définit-elle encore un produit scalaire ?