

Exercice 1 *Rotations et dérivations*

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On choisit l'orientation de $\mathbb{R}^2$ donnée par $\mathcal{B}$.

Soit $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $t \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\text{rot}(t))$ où $\text{rot}(t)$ désigne la rotation vectorielle d'angle t .

1. Montrer que r est dérivable et expliciter r' .
2. En déduire que r est $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter $r^{(n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (Ex.1 – Rotations et dérivations)

1. $r : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$: les 4 fonctions coordonnées (dans la base canonique que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) sont dérivables donc r est dérivable, et par dérivation par coordonnées :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad r'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} = r\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Par récurrence immédiate, r est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad r^{(n)}(t) = r\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} r(t) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ r'(t) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ r^{(2)}(t) = -r(t) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ r^{(3)}(t) = -r'(t) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Exercice 2 *Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse*

Soit I un intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto f(t)$ une fonction vectorielle dérivable $\mathbb{R}^2$. On suppose $N : t \mapsto \|f(t)\|$ constante.

Montrer que pour tout t , les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. On pourra dériver N^2 ...

Solution (Ex.2 – Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse) On a $\forall t \in I$;

$$0 = \frac{d}{dt} \|f(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle f(t), f(t) \rangle = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$$

donc $f'(t) \perp f(t)$.

Exercice 3 *Exemple d'une application à valeur matricielle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

1. Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t)^T f'(t)$ est une matrice antisymétrique.
2. Montrer que, si n est impair, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t)$ n'est pas inversible.

Solution (Ex.3 – Exemple d'une application à valeur matricielle)

1. Soit $g : t \mapsto f(t)^T f(t)$.
 - Par bilinéarité du produit matriciel, $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = f'(t)^T f(t) + f(t)^T f'(t) = (f(t)^T f'(t))^T + f(t)^T f'(t)$
 - Mais comme $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $g(t) = I_n$ donc $g'(t) = 0_n$.
Donc pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t)^T f'(t)$ est une matrice antisymétrique.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons $\varepsilon = \det(f(t)) = \pm 1$.
D'une part : $\det(f(t)^T f'(t)) = \det(f(t)^T) \det(f'(t)) = \varepsilon \det(f'(t))$,
d'autre part : $\det(f(t)^T f'(t)) = \det(-f'(t)^T f(t)) = (-1)^n \det(f'(t)) \det(f(t))$
 $= (-1)^n \varepsilon \det(f'(t)) = -\varepsilon \det(f'(t))$ (avec n impair !),
donc $\det(f'(t)) = 0$ et $f'(t) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 *Mouvement sur une sphère et accélération*

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $R \in]0; +\infty[$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0, R)$ la sphère de centre 0 et de rayon R .

I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow E$ deux fois dérivable.

On suppose que : $\forall t \in I, f(t) \in \mathcal{S}$ (autrement dit, pour tout t , le point $f(t)$ est sur la sphère $\mathcal{S}$).

1. Montrer que : (i) $\forall t \in I, f'(t) \perp f(t)$ et (ii) $\forall t \in I, \langle f''(t), f(t) \rangle \leq 0$.
2. Interpréter cinématiquement ces résultats.

Solution (Ex.4 – Mouvement sur une sphère et accélération)

1. Soit $N : t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle$. Alors :
 $\forall t \in I, N'(t) = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$, mais comme N est constante égale à R^2 , $N' = 0$.
Donc $\forall t \in I, \langle f'(t), f(t) \rangle = 0$ et $f'(t) \perp f(t)$.
Dérivons alors $P : t \mapsto \langle f'(t), f(t) \rangle$, elle aussi constante.
 $\forall t \in I, P'(t) = \langle f''(t), f(t) \rangle + \langle f'(t), f'(t) \rangle = 0$, donc $\langle f''(t), f(t) \rangle = -\|f'(t)\|^2 \leq 0$.
2. (i) dit qu'en tout point $f(t)$, le vecteur vitesse instantané est orthogonal au rayon $f(t)$... si ça n'était pas le cas, cela compromettrait que le point reste sur $\mathcal{S}$!
(ii) dit qu'à tout moment, l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la sphère : $\cos(f''(t), f(t)) \leq 0$, i.e. sens opposé au rayon $f(t)$.

Exercice 5 *Dérivation, déterminant et trace*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det(I_n + tA)$.

Montrer que φ est dérivable et calculer $\varphi'(0)$. On pourra utiliser le polynôme caractéristique de $-A$ ou la multilinéarité du déterminant...

Solution (Ex.5 – Dérivation, déterminant et trace)

En utilisant le polynôme caractéristique de $-A$:

• $\varphi(t)$ est un polynôme en t donc φ est dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$).

• Notons que, pour $t \neq 0$,

$\varphi(t) = \det((t((1/t)I_n - (-A))) = t^n \chi_{-A}(1/t) = 1 - \text{Tr}((I_n - A)t + P(t))$ avec $\deg P \geq 2$.

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{1}{t}(1 + \text{Tr}((I_n - A)t + P(t)) - \det(I_n)) = \text{Tr}((I_n - A)) + \frac{P(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \text{Tr}((I_n - A))$$

$$\text{car } \deg(P) \geq 2 \implies \frac{P(t)}{t} \implies \deg\left(\frac{P(t)}{t}\right) \geq 1 \implies \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

En utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes

Je note $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ les colonnes de A et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de sorte que :

$$\varphi(t) = \det((E_1 + tC_1, E_2 + tC_2, \dots, E_n + tC_n)).$$

On a évidemment, $\forall i, \frac{d}{dt}(E_i + tC_i) = C_i$.

En dérivant, par n -linéarité,

$$\varphi'(t) = \det((C_1, E_2 + tC_2, \dots, E_n + tC_n)) + \det((E_1 + tC_1, C_2, \dots, E_n + tC_n)) + \dots + \det((E_1 + tC_1, E_2 + tC_2, \dots, C_n)), \text{ donc}$$

$$\varphi'(0) = \det((C_1, E_2, \dots, E_n)) + \det((E_1, C_2, \dots, E_n)) + \dots + \det((E_1, E_2, \dots, C_n)).$$

Or un développement rapide montre que, $\forall i$,

$$\det((E_1, \dots, E_{i-1}, C_i, E_{i+1}, \dots, E_n)) = a_i.$$

D'où $\varphi'(0) = \text{Tr}((I_n - A))$.