Table des matières

1 Analyse

1.1 Suites et séries numériques

Exercice 1 *Équivalents*

1. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la suite v est non nulle à partir d'un certain rang.
On suppose : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. a) On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \operatorname{sh}\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$.
Quel est le signe de u_n au voisinage de $+\infty$?

b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$?

Solution (**Ex.1 –** *Équivalents*)

1. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Longrightarrow \exists \mathrm{N} \geq 0, \forall n \geq \mathrm{N}, \dfrac{u_n}{v_n} \geq \dfrac{1}{2}$ ($\varepsilon = 1/2$ dans la définition de la limite).
Donc u_n et v_n sont de même signe pour $n \geq \mathrm{N}$.

2. a) $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = -\dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^2}$. Donc $u_n \leq 0$ au voisinage de $+\infty$.

b) u_n étant de signe constant au voisinage de $+\infty$ et comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exercice 2 *Étude d'une suite*

Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Résoudre l'équation $x = x^2 + c$ en fonction de c.

2. On suppose $c \in [0\,;\ 1/4]$. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

3. On suppose $|c| > 2$ et on pose $\alpha = |c| - 1$.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \geq |c|\,\alpha^{n-1}$.
La suite (u_n) converge-t-elle ?

4. On suppose $c \in \,]1/4\,;\ 2]$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq c - 1/4$.
La suite (u_n) converge-t-elle ?

5. On suppose $c \in \,]-2\,;\ 0[$. Montrer que la suite (u_n) est bornée par $|c|$.

Solution (**Ex.2 –** *Étude d'une suite*)

Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $\Delta = 1 - 4c$
- Si $c > 1/4$, l'équation n'a pas de solution réelle.
- Si $c = 1/4$, l'équation a une solution réelle double : $r = \dfrac{1}{2}$.
- Si $c < 1/4$, l'équation a deux solutions réelles : $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$.

2. Soit $f : x \mapsto x^2 + c$.
f est croissante sur $[0\,;\,1/2]$ avec $f(0) = c \geq 0$, $f(1/2) = c + 1/4 \leq 1/2$, donc $[0\,;\,1/2]$ est stable par f.
Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0\,;\,1/2]$.
Comme $u_1 = c \geq 0 = u_0$, et $\big(u_{n+1} \geq u_n\big) \Longrightarrow \big(u_{n+2} \geq u_{n+1}\big)$ par croissance de f, (u_n) est croissante par récurrence.
u est croissante majorée, donc convergente, de limite ℓ point fixe de f par continuité de f appartenant à $[0\,;\,1/2]$. Donc u converge, vers $\ell = \dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$.

3. On suppose $|c| > 2$ et on pose $\alpha = |c| - 1$. Montrer que $|u_n| \geq |c|\,\alpha^{n-1}$.
• Pour $n = 1$, $|u_n| = |c| = |c|\,\alpha^0 \geq |c|\,\alpha^{n-1}$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $|u_n| \geq |c|\,\alpha^{n-1}$. Alors :
Si $c > 0$:
$|u_{n+1}| \geq \left|u_n^2 + c\right| \geq c^2\alpha^{2n-2} + c \geq c(c\alpha^{2n-2} + 1) \geq c(\alpha^{2n-1} + \alpha^{2n-2} + 1)$ car $c = \alpha + 1$,
$|u_{n+1}| \geq c\alpha^{2n-1} \geq c\alpha^n$ car $\alpha \geq 1$. Donc $|u_{n+1}| \geq |c|\,\alpha^n$.
Si $c < 0$:
$u_n^2 \geq |c|^2\,\alpha^{2n-2}$ donc $u_n^2 + c \geq |c|\,(|c|\,\alpha^{2n-2} - 1) \geq |c|\,(\alpha^{2n-1} + \alpha^{2n-2} - 1)$ car $c = \alpha + 1$,
$u_n^2 + c \geq |c|\,\alpha^{2n-1} \geq |c|\,\alpha^n$, donc $|u_{n+1}| \geq |c|\,\alpha^n$.
• Par récurrence, l'inégalité est établie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
• Comme $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ par comparaison. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 + c - u_n = \left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 + c - \dfrac{1}{4}$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \geq 0 + n(c - 1/4)$ (ou par récurrence sur n), donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la suite (u_n) ne converge pas.

5. On suppose $c \in\,]-2\,;\,0[$. Montrer que la suite (u_n) est bornée par $|c|$.
Montrons que $[c\,;\,-c]$ est stable par f, ce qui entraînera par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [c\,;\,-c]$ donc $|u_n| \leq c$.
L'étude de f montre que $f([c\,;\,-c]) = \left[c\,;\,c^2 + c\right]$. Or :
$c^2 + c - (-c) = c^2 + 2c = c(c+2) \leq 0$ car $c \leq 0$ et $c + 2 \geq 0$.
Donc $c^2 + c \leq -c$, donc $f([c\,;\,-c]) \subset [c\,;\,-c]$... CQFD

Exercice 3 *Convergence d'une suite*
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $[0\,;\,1]$.
On suppose que, pour tout n, $u_{n+1}(1 - u_n) > 1/4$.
Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Solution (**Ex.3** – *Convergence d'une suite*)
• Tout repose sur la majoration classique :
$$\forall x \in [0\,;\,1]\,, x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$
avec égalité si, et seulement si, $x = \dfrac{1}{2}$.
• De : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(1 - u_n) > 1/4$, on tire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
Alors pour tout $n \geq 1$:
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}(1 - u_n) > \dfrac{1}{4u_n}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{1}{4u_n(1-u_n)}$ d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ car $u_n(1-u_n) \leq \dfrac{1}{4}$
Donc (u_n) est croissante (strictement) et majorée par 1, donc convergente.
• Soit ℓ la limite de u.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}(1 - u_n) = \ell(1-\ell)$ et par prolongement des inégalités larges, on a : $\ell(1-\ell) \geq \dfrac{1}{4}$.
Et : $\ell \in [0\,;\,1]$, toujours par prolongement des inégalités larges.
Donc $\ell(1-\ell) = \dfrac{1}{4}$ et $\ell = \dfrac{1}{2}$ par la remarque initiale.

Exercice 4 *Suite d'intégrales*

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier l'existence de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n}$.

2. Étudier la convergence de la suite (I_n).

Solution (**Ex.4** – *Suite d'intégrales*)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n}$ est continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$.
$$f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} 1/t^2 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ 2/t^2 & \text{si } n = 2 \\ 1/t^n & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$
Comme $t \mapsto 1/t^m$ est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$ pour tout $m > 1$, f_n est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$, donc sur $[0\,;\,+\infty[$ par continuité. Donc I_n existe.

2. • Soit $n \geq 2$. $\forall t \geq 1, 0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{1}{t^n}$ donc $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$, donc $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n-1}$.

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0$.

• Soit $t \in [0\,;\,1[$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}$. La suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;\,1[$.

De plus : $\forall n\mathbb{N}, \forall t \in [0\,;\,1[, |f_n(t)| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0\,;\,1[$.

Par le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

• Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 *Recherche d'un équivalent d'intégrales*

Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}t}{1+t}\mathrm{d}t$.

On pourra commencer par établir que

$$\frac{1}{1+t}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(t)\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Solution (**Ex.5 –** *Recherche d'un équivalent d'intégrales*)

Notons que $\dfrac{\mathrm{Arctan}t}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}t}{1+t}\mathrm{d}t$ diverge, et par positivité de l'intégrande, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On peut penser que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^n \frac{\pi}{2(1+t)}\mathrm{d}t$. Prouvons-le.

Soit $f :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+t)} - \dfrac{\mathrm{Arctan}t}{1+t}$. De $\mathrm{Arctan}t + \mathrm{Arctan}(1/t) = \pi/2$ vient $f(t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(1/t)}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, donc $\mathrm{I} \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe.

$$\left|\int_0^n \frac{\pi}{2(1+t)}\mathrm{d}t - u_n\right| = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I}, \text{ donc}$$

$$\left|\frac{\pi}{2}\ln(1+n) - u_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I} \text{ donc } \left|1 - \frac{u_n}{\pi\ln(1+n)/2}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\ln(n)$.

Exercice 6 *Nature et somme d'une série*

Pour $x \in \mathbb{R}$, nature, et somme en cas de convergence, de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} x^n$.

Solution (**Ex.6 –** *Nature et somme d'une série*)

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

•*Nature*

Si $|x| > 1$, $\left|a_{2n}x^{2n}\right| = 2n\,|x|^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc la série diverge grossièrement.

Si $|x| < 1$,

$\left|\dfrac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \dfrac{n+1}{n}x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2 \in [0\,;\,1[$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{2n}x^{2n}$ converge par le critère de D'Alembert, et

$\left|\dfrac{a_{2n+3}x^{2n+3}}{a_{2n+1}x^{2n+1}}\right| = \dfrac{2n+1}{2n+3}x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2 \in [0\,;\,1[$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$ converge par le critère de D'Alembert.

Donc si $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

•*Somme pour $|x| < 1$*

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$ (dérivée de la série géométrique)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se dérive en $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, dont la primitive nulle en 0 est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

Ainsi : $\forall x \in]-1\,;\,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

Exercice 7 *Nature d'une série*

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Solution (**Ex.7** – *Nature d'une série*)
$\ln(u_n) = n^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = -n + \mathcal{O}(1)$, donc $u_n = \exp(-n + \mathcal{O}(1)) = \mathrm{e}^{-n} \exp\big(\mathcal{O}(1/n)\big) = \mathrm{e}^{-n}\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-n})$. Or la série géométrique de raison $1/e$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-n}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exercice 8 *Nature d'une série*
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

1. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec α un réel à déterminer.
2. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
3. La convergence de cette série est-elle absolue ?

Solution (**Ex.8** – *Nature d'une série*)

1. $\sqrt{n^2+n+1} = n\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \cdots = n\left(1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{3}{8n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$.
   Donc $\alpha = \dfrac{3}{8}$.
2. De $\cos(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \theta) = (-1)^{n+1}\sin(\theta)$ on tir e :
   $u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{3}{8n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Par le théorème de Leibniz, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et par domination $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge puisque la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.
   Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
3. $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |u_n|$ diverge par divergence de la série harmonique.

Exercice 9 *Nature d'une série*
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.
Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Solution (**Ex.9** – *Nature d'une série*)
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge par le théorème de Leibniz et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge par domination puisque la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Exercice 10 *Nature et somme d'une série*
Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right)$.

Solution (**Ex.10** – *Nature et somme d'une série*)
$1 - \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$, et par double télescopage :
$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \big[\ln(n-1) - \ln(n)\big] + \big[\ln(n+2) - \ln(n+1)\big]$$
$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = -\ln(\mathrm{N}) + \ln(\mathrm{N}+2) - \ln(3) = \ln\frac{\mathrm{N}+2}{\mathrm{N}} - \ln(3) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} -\ln(3)$$
La série converge et sa somme est $-\ln 3$.

1.2 Espaces vectoriels normés

Exercice 11 *Une norme sur un espace fonctionnel*
Soit l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{N}_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|$.
Démontrer que N_1 est une norme sur E.

Solution (**Ex.11** – *Une norme sur un espace fonctionnel*)

• Positivité claire.
• Homogénéité car $|\lambda f+(\lambda f)'|=|\lambda|\,|f+f'|$.
• Inégalité triangulaire car $|(f+g)+(f+g)'|\leq|f+f'|+|g+g'|$.
• Définition : un peu plus de boulot...
$N_1(f)=0\Longrightarrow\forall x\in[0\,;\,1]\,,f(x)+f'(x)=0$, donc f est solution de $y'+y=0$, donc $f:x\mapsto\alpha e^{-x}$. Or $f\in E$ donc $f(0)=0$. Donc $\alpha=0$ et $f=0$.

Exercice 12 *Suite convergeant vers un projeté*
Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. On pose $g=f-id_E$.

1. Prouver l'égalité $\mathrm{Im}(g)=(\mathrm{Ker}(g))^{\perp}$.
2. Pour tout entier n strictement positif, on pose $p_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1}f^p$.

   Pour tout x de E, montrer que la suite $(p_n(x))_{n\geq1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(g)$.

Solution (**Ex.12 –** *Suite convergeant vers un projeté*)

1. On sait déjà que $\dim\mathrm{Im}(g)=\dim(E)-\dim(\mathrm{Ker}(g))=\dim(\mathrm{Ker}(g))^{\perp}$.
   Soit $x\in\mathrm{Im}(g)$, y tel que $x=g(y)$ et $z\in\mathrm{Ker}(g)$ quelconque, donc $f(z)=z$.
   $\langle x,z\rangle=\langle f(y)-y,z\rangle=\langle f(y),f(z)\rangle-\langle y,z\rangle=0$ car f conserve le produit scalaire.
   Donc $x\in\mathrm{Ker}(g)^{\perp}$, et par les dimensions, $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Ker}(g)^{\perp}$.
2. De 1. découle $E=\mathrm{Im}(g)\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Ker}(g)$.
   En écrivant $x=i+k$, il s'agit de montrer que $p_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}k$.
   • $f(k)=g(k)+id_(k)=0+k=k$ donc $\forall p\in\mathbb{N},f^p(k)=k$.
   • Soit u tel que $i=g(u)=f(u)-u$ donc $\forall p\in\mathbb{N},f^p(i)=f^{p+1}(u)-f^p(u)$.
   • Ainsi, $p_n(x)=p_n(i+k)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left(f^{p+1}(u)-f^p(u)\right)+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1}k=\dfrac{1}{n}\left(f^n(u)-u\right)+k$.
   Comme f est une isométrie : $||f^n(u)||=||u||$,
   et par inégalité triangulaire : $||f^n(u)-u||\leq||f^n(u)||+||u||\leq2\,||u||$, et
   $\left|\left|\dfrac{1}{n}\left(f^n(u)-u\right)\right|\right|=\dfrac{1}{n}\left|\left|\left(f^n(u)-u\right)\right|\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc $\dfrac{1}{n}\left(f^n(u)-u\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   Ainsi : $p_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}k$

Exercice 13 *Point fixe et approximations successives*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On suppose que A est diagonalisable et que toute valeur propre complexe λ de A vérifie $|\lambda|<1$. Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant : $\forall p\in\mathbb{N},\ X_{p+1}=AX_p+B$.

1. La matrice $A-I_n$ est-elle inversible ?
2. Prouver l'existence et l'unicité d'une matrice $S\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $S=AS+B$.
3. Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N},\ X_p=S+A^p(X_0-S)$.
4. La suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Solution (**Ex.13 –** *Point fixe et approximations successives*)

1. $1\notin\mathrm{Sp}(A)$ donc $A-I_n\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. $S=AS+B\iff(A-I_n)S=-B\iff S=(A-I_n)^{-1}(-B)$ (existence et unicité).
3. Par récurrence. Hérédité :
   $X_{p+1}=A(S+A^p(X_0-S))+B=AS+A^{p+1}(X_0-S)+B=S+A^{p+1}(X_0-S)$.
4. $A=PDP^{-1}$ avec $D=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ où $|\lambda_i|<1$ $(\forall i)$. Donc $D^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$.
   Par continuité du produit matriciel, $A^p=PD^pP^{-1}\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$.
   D'où : $X_p\xrightarrow[p\to+\infty]{}S$.

Exercice 14 *Adhérence des matrices diagonalisables sur C*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit T une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,
   $$T_p=T+diag(1/p,2/p,\dots,n/p).$$
   Montrer que, à partir d'un certain rang p_0, T_p est diagonalisable pour tout $p\geq p_0$.
2. En déduire que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrice diagonalisable.
3. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. Que vaut $\overline{\mathcal{D}}$, adhérence de $\mathcal{D}$?

Solution (**Ex.14 –** *Adhérence des matrices diagonalisables sur C*)

1. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T.
Les coefficients diagonaux de T_p sont : $\lambda_1 + 1/p, \lambda_2 + 2/p, \ldots, \lambda_n + n/p$, et ce sont ses valeurs propres.
• Premier cas : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$: alors les n valeurs propres de T_p sont deux à deux distinctes, donc T_p est diagonalisable (pour tout $p \geq 1$.
• Second cas : les λ_i ne sont pas tous identiques. Soit $\varepsilon > 0$ le plus petit écart entre les valeurs distinctes λ_i :

$$\varepsilon = \min_{(i,j)/\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j|.$$

Soit p_0 tel que $\dfrac{n}{p_0} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par exemple $p_0 = \left\lfloor \dfrac{2n}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.
Soit $p \geq p_0$. Soit $i \neq j$. Montrons que $\lambda_i + i/p \neq \lambda_j + j/p$.
♢ si $\lambda_i = \lambda_j$, c'est sûr car $i \neq j$!
♢ si $\lambda_i \neq \lambda_j$, par l'absurde, supposons $\lambda_i + i/p = \lambda_j + j/p$. Alors $\lambda_i - \lambda_j = (j-i)/p$.
Or : $\varepsilon \leq |\lambda_i - \lambda_j|$ tandis que : $\left|\dfrac{j-i}{p}\right| \leq \dfrac{n}{p} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où $\varepsilon \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ avec $\varepsilon > 0$...
Donc $\lambda_i + i/p \neq \lambda_j + j/p$. Ainsi les n valeurs propres de T_p sont deux à deux distinctes, donc T_p est diagonalisable (pour tout $p \geq 1$.

2. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A est trigonalisable et il existe P inversible et T triangulaire supérieure telles que $A = P^{-1}TP$.
La suite $(T_p)_{p \geq p_0}$, construite comme dans la première question, est une suite de matrices diagonalisables et de limite T.
Par continuité du produit matriciel : $P^{-1}T_pP \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$.
Or pour tout $p \geq p_0$, $P^{-1}T_pP$ est semblable à T_p, donc diagonalisable...

3. ... donc $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ *Une application lipschitzienne en dimension infinie*

On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées.
On note F l'espace vectoriel des suites réelles dont la série associée est absolument convergente.
Pour tout élément u de E et tout élément v de F, on note : $N_E(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et $N_F(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$.

1. Démontrer que N_F est une norme sur F.

2. Quelle est la relation d'inclusion entre E et F ? Ces espaces sont-ils de dimension finie ?

3. Pour tout élément v de F, montrer qu'on peut définir sur E la forme linéaire $T_v : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ et que T_v est lipschitzienne.

Solution (**Ex.15 –** *Une application lipschitzienne en dimension infinie*)

1. Aucun problème. Cette norme est appelée « norme 1 », $||.||_1$. Celle sur E est la « norme infinie », $||.||_\infty$.

2. $F \subset E$ car $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge $\Longrightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Longrightarrow (u_n)$ bornée.
Ces deux espaces sont de dimensions infinies. Ils contiennent tous les deux la famille libre infinie $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ où chaque $u^{(m)}$ est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(m)} = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit $v \in F$ fixé.
• Soit $u \in E$. Il faut s'assurer que $\sum_{n \geq 0} +u_n v_n$ converge pour pouvoir définie $T_v(u)$. Or u est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n v_n| \leq M\,|v_n|$, or $\sum_{n \geq 0} |v_n|$ converge. Par domination, $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge absolument, donc $T_v(u)$ est défini.
• Soit $(u, w) \in E^2$.

$$|T_v(u) - T_v(w)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - w_n) v_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n - w_n|\,|v_n|$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - w_n| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |u_m - w_m| = N_E(u - w)$

$$|T_v(u) - T_v(w)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_E(u-w)\,|v_n| = N_E(u-w) \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = N_E(u-w) N_F(v).$$

Ainsi :
$\forall (u, w) \in E^2, \quad |T_v(u) - T_v(w)| \leq N_F(v) N_E(u - w)$: T_v est lipschitzienne de rapport $N_F(v)$.
Remarque : en prenant u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = sign(v_n)$ et w la suite nulle, il y a égalité.

1.3 Dérivation, intégration sur un segment

Exercice 16 *Une fonction définie par une intégrale sans paramètre*
Soit $f \in \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) = \mathrm{E}$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0. On note $\mathrm{T}(f)$ le prolongement par continuité de g sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer $\mathrm{T}(f)(0)$ en fonction de $f(0)$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, sans chercher à simplifier cette expression.
3. Vérifier que T est un endomorphisme de E.

Solution (**Ex.16 –** *Une fonction définie par une intégrale sans paramètre*)

1. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :
   $\forall x > 0, g(x) = \dfrac{\mathrm{F}(x^3) - \mathrm{F}(x)}{x}$, donc g est continue (et même $\mathcal{C}^1$) sur $]\,0\,;\ +\infty[$.
   En écrivant au voisinage de 0 :
   $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}'(0)x + o(x) = \mathrm{F}(0) + f(0)x + o(x)$, on a :
   $g(x) = \dfrac{f(0)(x^3 - x) + o(x)}{x} = \dfrac{-f(0)x + o(x)}{x} = -f(0) + o(1)$.
   Donc : $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -f(0)$, limite réelle, donc g est prolongeable par continuité en 0.
   Et $\mathrm{T}(f)(0) = -f(0)$.
2. On a déjà vu que g est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$. De plus :
   $\forall x > 0, g'(x) = \dfrac{(3x^2 f(x^3) - f(x))x - (\mathrm{F}(x^3) - \mathrm{F}(x))}{x^2}$
3. $\forall f \in \mathrm{E}, \mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in \mathrm{E}$,
   $\forall x > 0, \mathrm{T}(f + \lambda g)(x) = \mathrm{T}(f)(x) + \lambda \mathrm{T}(g)(x)$ par linéarité de l'intégrale,
   $\mathrm{T}(f + \lambda g)(0) = -(f + \lambda g)(0) = -f(0) - \lambda g(0) = \mathrm{T}(f)(0) + \lambda \mathrm{T}(g)(0)$,
   donc $\mathrm{T}(f + \lambda g) = \mathrm{T}(f) + \lambda \mathrm{T}(g)$: T est linéaire.

Exercice 17 *Dérivées n-ièmes*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) = x^{n-1}e^{1/x}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\Delta$

Solution (**Ex.17 –** *Dérivées n-ièmes*)
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et car la composée $x \mapsto \exp(1/x)$ l'est.
Le résultat se démontre par récurrence sur n. La propriété est vraie pour $n = 0$.
Soit un entier n arbitraire. Supposons-la vraie pour tout entier $k \leq n$.
De $\forall x \neq 0,\quad f_{n+1}(x) = x f_n(x)$, on tire par la formule de Leibniz :

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^{(k)} f_n^{(n+1-k)} = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x) + 0$$

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{1/x}/x^2 \times x^{n+1} - (-1)^n(n+1)x^n\mathrm{e}^{1/x}}{x^{2n+2}} + (n+1)\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{1/x}}{x^{n+1}}$$

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^{n+2}} + (n+1) \times 0$$

Exercice 18 *Dérivabilité et classe 1*

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Solution (**Ex.18 –** *Dérivabilité et classe* 1)

1. g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes opératoires usuels.
   $\forall x \neq 0, \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ car $\left|x \sin\dfrac{1}{x}\right| \leq x$. g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
2. $\forall x \neq 0, g'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, en prenant $u_n = 1/(n\pi)$, $g'(u_n) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$, on voit que g' n'admet pas de limite en 0. En particulier, on n'a pas : $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g'(0)$. g n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 *Équation fonctionnelle*
Quelles sont les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t\,?$$

Solution (**Ex.19 –** *Équation fonctionnelle*)

Soit f une solution. Le second membre de l'expression est dérivable et même $\mathcal{C}^1$ donc f est $\mathcal{C}^1$.
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xf(x)$, donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'(x) - xy(x) = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda e^{x^2/2}$.
Réciproquement, on vérifie sans peine que, si $f : x \mapsto \lambda e^{x^2/2}$, alors f est solution.

Exercice 20 *Double équation fonctionnelle*
Trouver les couples (f, g) d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1 + g(x)$ *et* $\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = 1 + f(x)$.

Solution (**Ex.20 –** *Double équation fonctionnelle*)
Soit (f, g) solution. Par le théorème fondamental de l'analyse, f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$f(x) = g'(x)$ et $g(x) = f'(x)$, donc f et g sont solutions de $y'' = y$.
Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = a\mathrm{ch}x + b\mathrm{sh}x$ et $g(x) = a\mathrm{sh}x + b\mathrm{ch}x$.
La première relation donne alors : $a\mathrm{sh}x + b\mathrm{ch}x - b = 1 = a\mathrm{sh}x + b\mathrm{ch}x$, donc $b = -1$. La seconde donne $a = -1$. Donc $f(x) = g(x) = -\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = -e^x$.
On vérifie réciproquement que $f = g : x \mapsto -e^x$ est solution.
C'est donc l'unique couple solution.

1.4 Suites et séries de fonctions

Exercice 21 *Suite de fonctions*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]\,0\,;\,+\infty[$? Et sur $[\,1\,;\,2]$?

Solution (**Ex.21 –** *Suite de fonctions*)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. • Pour $x = 0$, $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   • Pour $x \in \,]\,0\,;\,1/e[\,\cup\,]\,e\,;\,+\infty[$, $|\ln x| > 1$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   • Pour $x \in \,]\,1/e\,;\,e[$, $|\ln x| < 1$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.
   • Pour $x = \{1/e, e\}$, $f_n(x) = -\dfrac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{1}{3}$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]\,0\,;\,+\infty[$? Et sur $[\,1\,;\,2]$?
   • Chaque f_n est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$ mais leur limite simple n'est pas continue, donc la convergence n'est pas uniforme sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
   • $\forall x \in [\,1\,;\,2]$, $|f_n(x) - (-1)| = \left|\dfrac{\ln(x)^{2n} - 2 + \ln(x)^{2n} + 2}{\ln(x)^{2n} + 2}\right| = \dfrac{2\ln(x)^{2n}}{\ln(x)^{2n} + 2} \leq \dfrac{2\ln(2)^{2n}}{2} \leq \ln(2)^{2n}$.
   Donc $||f_n - (-1)||_{\infty,[\,1\,;\,2]} \leq \ln(2)^{2n}$, et comme $|\ln(2)| \leq 1$, $||f_n - (-1)||_{\infty,[\,1\,;\,2]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   La convergence est uniforme sur $[\,1\,;\,2]$.

Exercice 22 *CVU de fonctions de classe 1*
Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

1. Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution (**Ex.22 –** *CVU de fonctions de classe 1*)

1. Par opérations algébriques élémentaires, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{.}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x^2} = |x|$, donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f avec $f(x) = |x|$.
   En multipliant par la quantité conjuguée : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $|fn(x) - f(x)| = \dfrac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{1/n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f_n - f||_\infty \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f = |.|$...
3. ...qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ car $|.|$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 23 *Suite de fonctions*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [\,0\,;\;+\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2. a) Établir, pour tout $\alpha \in \,]\,0\,;\;1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.

b) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme ?

Solution (**Ex.23 –** *Suite de fonctions*)

1. Soit $x \geq 0$. $\dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+x}$, la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

2. a) Soit $\alpha > 0$. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$. $g'(x) = \alpha\big(1 - (1+x)^{\alpha-1}\big) \geq 0$ car $\alpha - 1 \leq 0$. g est croissante et nulle en 0, donc positive sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. $|f_n(x) - f(x)| \leq \left|\dfrac{1-(1+x)^{1/n}}{(1+x)^{1+1/n}}\right| \leq \dfrac{(1+x)^{1/n}-1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \dfrac{1}{n}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \dfrac{1}{n}$, et par encadrement $||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}^+} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 24 *Suite de fonctions*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3. Et sur $[\,a\,;\;+\infty[$ avec $a > 0$?

Solution (**Ex.24 –** *Suite de fonctions*)

1. Observons que chaque f_n est impaire. $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Chaque f_n est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n'(x) = \dfrac{2^n(1+n2^nx^2) - 2^nx(n2^{n+1}x}{(1+n2^nx^2)^2}$,

$f_n'(x)$ est du signe de $1 - n2^nx^2$. Soit $x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n2^n}}$. Donc f_n est strictement croissante sur $[\,0\,;\;x_n]$ et strictement décroissante sur $[\,x_n\,;\;+\infty[$. Comme $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n(x_n) = \dfrac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}$. Par symétrie, puisque f_n est impaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad ||f_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

et il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0, \quad x_n \leq a$.
Par l'étude précédente, pour tout $n \geq n_0$, f_n est strictement décroissante sur $[\,a\,;\;+\infty[$ (et positive) donc $||f_n - 0||_{\infty,[\,a\,;\;+\infty[} = f_n(a)$. Or $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par convergence simple de 1.).
Donc $||f_n - 0||_{\infty,[\,a\,;\;+\infty[} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la convergence est uniforme sur $[\,a\,;\;+\infty[$.

Exercice 25 *Autour de la convergence dominée*

L'objectif de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)$.

1. Justifier que la suite (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}^+$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = |f_n|$.

2. Montrer que (g_n) converge simplement mais non uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. a) Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = 0$.

Solution (**Ex.25 –** *Autour de la convergence dominée*)

1. Pour $t = 3\pi/2$, $\sin(t) = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n(t) = \mathrm{e}^{-3\pi/2}(-1)^n$ donc $(f_n(t))_n$ diverge. Il n'y a pas convergence simple (en tout $t = 3\pi/2 + 2k\pi$,

$k \in \mathbb{N}...)$

2. • Soit $t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}$.

• Soit $t \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\,|\sin(t)|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|\sin(t)| \in [0\,;\ 1[$.

• Donc $g_n \overset{CVS}{\longrightarrow} g : t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable, Donc par domination $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$ existe.

b) Les g_n sont continues, et leur limite simple est continue par morceaux. Les g_n sont uniformément dominée par φ intégrable. Par le théorème de convergence dominée, g est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0.$$

Exercice 26 *Toujours la convergence dominée*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2. Cette convergence est-elle uniforme ?

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

Solution (**Ex.26 –** *Toujours la convergence dominée*)

1. Soit $x \in [0\,;\ +\infty[$. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \in [0\,;\ 1[\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1\,;\ +\infty[\end{cases}$

2. Toutes les f_n sont continues mais leur limite simple ne l'est pas dons la convergence n'est pas uniforme.

3. • $(f_n) \overset{CVS}{\longrightarrow} f$, • Les f_n et f sont continues par morceaux

• $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{1} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 27 *Série géométrique dérivée*

On traitera cet exercice sans recourir au chapitre sur les séries entières !!!

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto nx^{n-1}.$$

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.

2. Soit $\mathrm{I} =]-1\,;\ 1[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Déterminer $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est-elle normale ?

b) Soit $a \in]0\,;\ 1[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[-a\,;\ a]$.

3. a) Montrer que S est continue sur I.

b) Déterminer la primitive de S sur I s'annulant en 0.

4. Finalement, que vaut, pour $x \in]-1\,;\ 1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$?

Solution (**Ex.27 –** *Série géométrique dérivée*)

1. Si $x = 0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} 0$ converge, vers 0.

Si $x \neq 0$:

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{n+1}{n}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Par le critère de D'Alembert, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

Si $|x| = 1$, $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ($\neq 0$!) donc la série diverge grossièrement.

Le domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est $]-1\,;\ 1[$.

2. Soit $\mathrm{I} =]-1\,;\,1[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) $\forall x \in \mathrm{I}, |f_n(x)| \leq n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leq n$.
$\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geq n$.
Donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = n$.
La convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ n'est pas normale puisque $\sum_{n\geq 1} ||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$ diverge grossièrement.

b) $\forall x \in [-a\,;\,a], |f_n(x)| \leq na^{n-1}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leq na^{n-1}$.
$\lim_{x\to a^-} f_n(x) = na^{n-1}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geq na^{n-1}$.
Donc $||f_n||_{\infty,[-a\,;\,a]} = na^{n-1}$.
La convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normale puisque $\sum_{n\geq 1} na^{n-1}$ converge d'après la question 1 ($a \in \mathrm{I}$).

3. a) La série converge normalement sur tout $[-a\,;\,a] \subset \mathrm{I}$ donc S est continue sur I.

b) La primitive F de S sur I s'annulant en 0 est définie par

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathrm{I}$. Par convergence normale donc uniforme sur le segment $[0\,;\,x]$ – ou le segment $[x\,;\,0]$ si $x < 0$ –, et continuité des fonctions f_n, on peut permuter somme et intégrale :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

4. Pour $x \in]-1\,;\,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \mathrm{S}(x) = \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Exercice 28 *Série de fonctions et intégration*

1. a) Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de la fonction S définie par

$$\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. Calculer explicitement $\mathrm{S}'(x)$ en fonction de x.

2. Justifier que : $\forall x > 0, 0 < \mathrm{S}(x) \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. En déduire la limite de S en $+\infty$.

3. Déduire des questions précédentes une expression explicite de S.

4. a) Montrer la convergence de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$.

b) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer I.

Solution (**Ex.28** – *Série de fonctions et intégration*)

1. a) Pour $x < 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série diverge grossièrement.
Pour $x = 0$, la série est une série de Riemann divergente.
Pour $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} = \mathcal{O}\left((\mathrm{e}^{-x})^n\right)$ montre la convergence.
$\mathcal{D} =]0\,;\,+\infty[$.

b) Posons pour $n \geq 0$, $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.
Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ avec $f_n' : x \mapsto -\mathrm{e}^{-nx}$.
(f_n) converge simplement vers S.
Soit $a > 0$. $\forall n \geq 1, ||f_n'||_{\infty,[a\,;\,+\infty[} = \left(\mathrm{e}^{-a}\right)^n$ donc $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a\,;\,+\infty[$.
Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;\,+\infty[$.
Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

c) D'après ce qui précède,

$$\forall x > 0, \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

2. a) Justifier que : $\forall x > 0, 0 < \mathrm{S}(x) < \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. Soit $x > 0$.
$\mathrm{S}(x)$ est strictement positif comme somme de termes strictement positifs.
$\forall n \geq 1, \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \leq \mathrm{e}^{-nx}$, donc en sommant ces inégalités, $\mathrm{S}(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right]^n = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

b) Par encadrement : $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. Par primitivation, il existe K tel que : $\forall x > 0, S(x) = -\ln(1-e^{-x}) + K$.
Comme $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $K = 0$. Donc $\forall x \in \mathcal{D}, S(x) = -\ln(1-e^{-x})$.

1.5 Séries entières

Exercice 29 *Somme d'une série numérique*

Existence et valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

Solution (**Ex.29 –** *Somme d'une série numérique*)

On observe que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/3)^n}{n(n+1)}$ si elle existe. On s'intéresse donc à cette série entière.
$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ donc la série converge pour tout x tel que $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$, donc $R = 1$.

$\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[\setminus \{0\}, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $S = 1 - 2\ln\dfrac{3}{2}$.

Exercice 30 *Somme d'une série numérique*

1. Montrer l'existence de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;\,1], \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

a) Justifier l'existence, pour $x \in [0\,;\,1]$, de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Que vaut, pour $x \in \left[0\,;\,1\right[$, $S(x)$?

c) On note $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Montrer que $\|R_n\|_{\infty,[0\,;\,1]} \leq \dfrac{1}{2n+3}$.

d) En déduire la continuité de S sur $[0\,;\,1]$.

3. Déterminer S.

Solution (**Ex.30 –** *Somme d'une série numérique*)

1. Théorème de Leibniz : $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.

2. a) Sur $\left[0\,;\,1\right[$, S.E. de Arctan. En 1, voir 1).

b) S.E. de R.C. 1 : $\forall x \in \left[0\,;\,1\right[, S(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.

c) Leibniz : $\forall x \in [0\,;\,1], |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \dfrac{1}{2n+3}$. Donc $\|R_n\|_{\infty,[0\,;\,1]} \leq \dfrac{1}{2n+3}$.

d) La convergence de $\displaystyle\sum_n f_n$ est uniforme sur $[0\,;\,1]$ donc la somme est continue sur $[0\,;\,1]$.

3. $S = S(1) = \displaystyle\lim_{x\to1^-} S(x) = \lim_{x\to1^-} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 31 *Prolongement indéfiniment dérivable*

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$ est continue, et prolongeable par continuité en 0.

2. On note encore f le prolongement obtenu. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Que vaut $f^{(2017)}(0)$? Et $f^{(2018)}(0)$?

Solution (**Ex.31 –** *Prolongement indéfiniment dérivable*)

1. $1-\cos(2x) \underset{x\to0}{\sim} 2x^2$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 2$: $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 2$ donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 2$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$, donc

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}\right) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n-2}}{(2n)!} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}$

Pour $x = 0$, cette dernière série converge et sa somme est $2 = f(0)$, donc

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}$.

f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. En écrivant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Comme f est paire, $a_{2017} = 0$ donc $f^{(2017)}(0) = 0$.

Et $f^{(2018)}(0) = 2018!a_{2018} = 2018!a_{2\times 1009} = 2018! \times \frac{(-1)^{1009}4^{1010}}{(2020)!} = -\frac{4^{1010}}{2019 \times 2020}$.

Exercice 32 *Une inégalité*

Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad |e^z - 1 - z| \leq e^{|z|} - 1 - |z|$.

Solution (**Ex.32 –** *Une inégalité*)

$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z - 1 - z| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1 - |z|$...

Exercice 33 *Somme de séries entières*

Soit $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière, en précisant le rayon de convergence du développement obtenu.

Solution (**Ex.33 –** *Somme de séries entières*)

1. $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) = (1-z)(2-z)$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$.
2. $\forall z \in \mathcal{D}_f, \quad \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - z/2}$. Pour z tel que $|z/2| < 1$ et $|z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 1$, par convergence de la série géométrique,

$\forall z \in \mathcal{D}(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} z^n$

f étant la somme de deux séries entières de rayons distincts 1 et 2, le rayon de convergence de cette somme est $\min(1,2) = 1$. Sinon, on peut réveiller M. D'Alembert pour s'en convaincre.

1.6 Intégration

Exercice 34 *Convergence et calcul*

Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} t e^{-\lfloor t \rfloor} \mathrm{d}t$$

Solution (**Ex.34 –** *Convergence et calcul*)

$f : t \mapsto t e^{-\lfloor t \rfloor}$ est continue par morceaux sur $[0\,;\,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, donc intégrable.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_n^{n+1} e^{-n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-n}$.

Par la série géométrique de raison $e^{-1} \in [0\,;\,1[$ et sa dérivée, $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-n} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{e^2 + e}{(e-1)^2}$

Exercice 35 *Suite d'intégrales*

On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer une suite de fonctions f_n telle que $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

Solution (**Ex.35 –** *Suite d'intégrales*)

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t \overset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+(1/u)^n} \times \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{u^n+1}\mathrm{d}u$.

En posant $f_n(t) = \dfrac{t^{n-2}+1}{1+t^n}$ pour $t \in [0\,;\ 1]$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

2. Le théorème de convergence dominée s'applique que l'on raisonne sur $[0\,;\ +\infty[$ (en dominant par $t \mapsto 1$ si $t \in [0\,;\ 1]$ et $1/(1+t^2)$ si $t > 1$ par exemple) ou sur $[0\,;\ 1]$ (en dominant f_n par 2). On obtient $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 36 *Intégrale à paramètre*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]0\,;\ +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\ +\infty[$ et exprimer f'' à l'aide d'une intégrale.
3. Soit $g : (x,t) \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.
4. Montrer que f est solution de $y'' - y = 0$.
5. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{e}^{ixu}\mathrm{d}u$.
6. Calculer f.

Solution (**Ex.36 –** *Intégrale à paramètre*)

1. Soit $x \in]0\,;\ +\infty[$.
$\left|\dfrac{x}{x^2+t^2}\mathrm{e}^{it}\right| = \dfrac{x}{x^2+t^2}$ or $t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$ est intégrable sur $]-\infty\,;\ +\infty[$ car continue, paire et équivalente à $\dfrac{x}{t^2}$ en $+\infty$. Donc l'intégrale définissant $f(x)$ est absolument convergente, et $f(x)$ existe.

2. Soit $h :]0\,;\ +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}\mathrm{e}^{it}$.
Soit $0 < a < b$. On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;\ b]$.
- Pour $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;\ b]$.
- Pour $x \in [a\,;\ b]$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après 1).
- Pour $x \in [a\,;\ b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\mathrm{e}^{it}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, impaire avec $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ (arguments analogues à 1)).
- Pour $x \in [a\,;\ b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3}\mathrm{e}^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in [a\,;\ b], \forall t \in \mathbb{R}, \left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \dfrac{2b^3+6bt^2}{(a^2+t^2)^3}$ et $t \mapsto \dfrac{2b^3+6bt^2}{(a^2+t^2)^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, paire et $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{6b}{t^4}$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;\ b]$, et ceci pour tout $[a\,;\ b] \subset]0\,;\ +\infty[$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\ +\infty[$.
De plus : $\forall x \in]0\,;\ +\infty[, g''(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3}\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$

3. $\forall (x,t) \in]0\,;\ +\infty[\times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \dfrac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{-2x^3+6xt^2}{(x^2+t^2)^3}$, donc par le calcul précédent de $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, on a : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$

4. Par deux intégrations par parties où les produits de primitives tendent à chaque fois vers 0 en $\pm\infty$, on a pour tout $x > 0$:
$f''(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\left[\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\mathrm{e}^{it}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} i\left[g(x,t)\mathrm{e}^{it}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = f(x)$.

5. Pour $x > 0$, le changement de variable $t = xu$ affine donc $\mathcal{C}^1$ strictement monotone donc bijectif donne directement $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{e}^{ixu}\mathrm{d}u$.

6. • Par 4., il existe deux réels α et β tels que : $\forall x \in]0\,;\ +\infty[, f(x) = \alpha\mathrm{e}^x + \beta\mathrm{e}^{-x}$.
Pour trouver α et β, on va chercher la limite de f en $+\infty$ par le « lemme de Riemann-Lebesgue » et la limite en 0 par le théorème de convergence dominée (de Lebesgue itou).
• Soit $x > 0$. Par une intégration par parties :
$f(x) \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{1}{ix}\left[\dfrac{1}{1+u^2}\mathrm{e}^{ixu}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \dfrac{1}{ix}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u}{(1+u^2)^2}\mathrm{e}^{ixu}\mathrm{d}u = -\frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u}{(1+u^2)^2}\mathrm{e}^{ixu}\mathrm{d}u$.
Comme $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|u|}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$ existe, par l'inégalité triangulaire :
$|f(x)| \leq \dfrac{\mathrm{I}}{x}$, donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Donc : $\alpha = 0$.
- Soit $(x_n)_n$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle et, pour tout n, $j_n :]-\infty\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, u \mapsto \dfrac{e^{ix_n u}}{1+u^2}$.

(i) La suite de fonction (j_n) converge simplement vers $j : u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$.
(ii) j est continue sur $\mathbb{R}$,
(iii) $\forall n, \forall u \in \mathbb{R}, |j_n(u)| \leq j(u)$ et j est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de convergence dominée, j_n est intégrable pour tout n et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j_n(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} j(u)\mathrm{d}u.$$

Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \pi$.
Par la caractérisation séquentielle des limites, on peut affirmer que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pi$.
Donc $\beta = \pi$.
- Conclusion : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f(x) = \dfrac{\pi}{\exp(x)}$.

Exercice 37 *Intégrale à paramètre et sommation*

On définit, lorsque celle-ci existe, la fonction f par $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$.

1. Soit $\varepsilon \in [0\,;\,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$.

2. a) En déduire que $f(0)$ existe et donner sa valeur.
b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

5. On admet que f est développable en série entière en 0.
Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

Solution (**Ex.37** – *Intégrale à paramètre et sommation*)

1. $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{Arcsin}(\varepsilon)$

2. a) Comme $\mathrm{Arcsin}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 1]{} \dfrac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Donc $f(0)$ existe et vaut 1.

b) Soit $g : \mathbb{R} \times [0\,;\,1[\to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \dfrac{2\cos(xy)}{\pi\sqrt{1-y^2}}$.
- Pour $y \in [0\,;\,1[, x \mapsto g(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}, y \mapsto g(x,y)$ est continue sur $[0\,;\,1[$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times[0\,;\,1[, |g(x,y)| \leq \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ avec $y \mapsto \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ intégrable sur $[0\,;\,1[$ par la question précédente.

Donc f est définie et continue sur $[0\,;\,1[$

3. • Pour $x = 0$, $f(0) = 1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(0)\mathrm{d}t$.
- Soit $x \neq 0$. On pose $y = \sin(t)$, changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant donc bijectif, et ce changement de variable légitime donne :

$$f(x) \overset{y=\sin t}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x\sin t)}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin t)\mathrm{d}t$$

- Appliquons ensuite le théorème des intégrales à paramètres de classe $\mathcal{C}^2$, avec $h : (x,t) \mapsto \cos(x\sin t)$.

(i) Pour tout $t \in [0\,;\,\pi/2]$, $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$.
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue donc intégrable sur $[0\,;\,\pi/2]$.
(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin t)$ est continue donc intégrable sur $[0\,;\,\pi/2]$.
(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2(t)\cos(x\sin t)$ est continue.
(iv) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0\,;\,\pi/2]$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0\,;\,\pi/2]$.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et on peut dériver sous l'intégrale.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} -x\sin^2(t)\cos(x\sin t) - \sin(t)\sin(x\sin t) + x\cos(x\sin t)\mathrm{d}t$
$= \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2(t)\cos(x\sin t) - \sin(t)\sin(x\sin t)\mathrm{d}t$

Or par intégration par parties à l'aide de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0\,;\ \pi/2]$
$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)\sin(x\sin t)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} [-\cos t\sin(x\sin t)]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}x\cos^2 t\cos(x\sin t)\mathrm{d}t$
$\displaystyle=\int_0^{\pi/2}x\cos^2 t\cos(x\sin t)\mathrm{d}t.$
Donc $xf''(x)+f'(x)+xf(x)=0$.

5. Soit $\mathrm{S}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence non nul R et (E) : $xy''+y'+xy=0$.

S vérifie (E) si, et seulement si, $\forall x\in\,]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[,\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=0$

ssi $\forall x\in\,]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}[\,,a_1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big((n+1)na_{n+1}+(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n=0.$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul,

S vérifie (E) ssi $\begin{cases}a_1=0\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,a_{n+1}=-\dfrac{1}{(n+1)^2}a_{n-1}\end{cases}$

S vérifie (E) ssi $\forall p\in\mathbb{N},\begin{cases}a_{2p+1}=0\\ a_{2p}=\dfrac{(-1)^p}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p}2k\right)^2}a_0=\dfrac{(-1)^p}{(2^pp!)^2}a_0\end{cases}$

On vérifie par le critère de D'Alembert (ou le lemme d'Abel) que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$.
Comme f est la solution de (E) vérifiant $f(0)=1$ (donc $a_0=1$), on a :

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$

Exercice 38 *Intégrale à paramètre*

Soit $\mathrm{I}:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ixt}-1}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

1. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\mathrm{I}'(x)$ et en déduire $\mathrm{I}(x)$.

Solution (**Ex.38 –** *Intégrale à paramètre*)

Soit $\mathrm{I}:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ixt}-1}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

1. Soit $g:\mathbb{R}\times\,]0\,;\ +\infty[\,\to\mathbb{R},(x,t)\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{ixt}-1}{t}\mathrm{e}^{-t}$.

- Pour $t\in\,]0\,;\ +\infty[$, $x\mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;\ +\infty[$. En effet, cette fonction est continue, prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{\mathrm{e}^{ixt}-1}{t}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to 0}{\sim}ix$, dominée par $t\mapsto 2\mathrm{e}^{-t}$ sur $[1\,;\ +\infty[$, fonction intégrable de référence.
- Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=i\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;\ +\infty[$.
- $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\,]0\,;\ +\infty[\,,\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq\mathrm{e}^{-t}$, or $t\mapsto\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction intégrable de référence.

Donc I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f':x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-1+ix)t}\mathrm{d}t$

2. Calculer $\mathrm{I}'(x)$ et en déduire $\mathrm{I}(x)$.
$\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{(-1+ix)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{-1+ix}\left[\mathrm{e}^{(-1+ix)t}\right]_0^{\mathrm{A}}\xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{}\frac{1}{-1+ix}$
(eh oui, $\left|\mathrm{e}^{(-1+ix)t}\right|=\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$).
Donc pour $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{I}'(x)=\dfrac{i}{-1+ix}=\dfrac{-x+i}{1+x^2}$.
Et $\mathrm{I}(x)=-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+i\mathrm{Arctan}(x)$ car $\mathrm{I}(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}t=0$.

Exercice 39 *Intégrale à paramètre*

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{(1+t)^n}\mathrm{d}t$ et $g_n:x\mapsto\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^n}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f_n et g_n sont définies sur $]0\,;\ +\infty[$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $x>0$, $f_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^xg_n(x)$.

3. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que, pour $n \geq 2$, f_n est définie sur $\mathbb{R}^+$ et y est continue.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $g_n(x)$ quand x tend vers 0.
6. Montrer que $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^n}$.
7. Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f_n.

Solution (**Ex.39 –** *Intégrale à paramètre*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{(1+t)^n}\mathrm{d}t$ et $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^n}\mathrm{d}t$.

1. • $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{(1+t)^n}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[0\,;\,+\infty[$. Donc f_n est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

   • Soit $x > 0$. $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^n}$ est continue sur $[x\,;\,+\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[x\,;\,+\infty[$. Donc g_n est définie sur $]0\,;\,+\infty[$
2. Soit $x > 0$. Effectuons dans $f_n(x)$ le changement $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = x(1+t)$.
   $$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{(1+t)^n}\mathrm{d}t \overset{u=x(1+t)}{=} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(u-x)}}{(u/x)^n} \times \frac{1}{x}\mathrm{d}u = x^{n-1}\mathrm{e}^x g_n(x).$$
3. g_n est clairement dérivable (théorème fondamental de l'analyse) de dérivée $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}/t^n$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;\,+\infty[$ donc f_n est $\mathcal{C}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Soit $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{(1+t)^n}$.

   • Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue.

   • Pour tout $(x,t) \in [0\,;\,+\infty[^2$, $|h(x,k)| \leq \dfrac{1}{(1+t)^2}$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$ intégrable sur $[0\,;\,+\infty[$ car continue et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

   Donc f_n est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. Pour $n \geq 2$, on a : $\forall x > 0, g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{x^{n-1}\mathrm{e}^x}$ avec :

   • $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$,

   • $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f_n(0)$ par continuité.

   Or $f_n(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \left[\frac{-1}{(n-1)(1+t)^{n-1}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n-1}$

   Donc $g_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$.

   Pour $n = 1$, $g_n(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.
6. Par intégration par parties :
   $$g_n(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^n}\right]_x^{+\infty} - (n+1)\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\mathrm{d}t$$
   $$\text{Or : } 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{n+1}}\mathrm{d}t$$
   $$g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^n} - (n+1)\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\right]_x^{+\infty} + (n+1)(n+2)\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\mathrm{d}t$$
   $$\text{Or : } 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{n+2}}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x}\frac{1}{(n+1)x^{n+1}}$$
   $$\text{Donc : } g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^n} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^n} + o\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^n}\right).$$
   $$g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^n}.$$
7. Dérivons $f_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^x g_n(x)$ avec $g_n'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^n}$:
   $$f_n'(x) = (n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^x g_n(x) + x^{n-1}\mathrm{e}^x g_n(x) - \frac{1}{x}$$
   $f_n'(x) = \dfrac{n-1}{x}f_n(x) + f_n(x) - \dfrac{1}{x}$ donc f_n est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :
   $$y' - \frac{n-1+x}{x}y = -\frac{1}{x}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 40}}$ *Intégrale à paramètre*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ln(t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Solution (**Ex.40 –** *Intégrale à paramètre*)

Soit $g :]0\,;\,+\infty[^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\ln(t)$. La majoration de e^{-xt} par 1 n'assurant pas l'intégrabilité en $+\infty$, on va montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$. Soit donc $a > 0$.

• Pour tout $t \in]0\,;\,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;\,+\infty[$.

• Pour tout $x \in [a\,;\,+\infty[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$.

En effet, $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$ et $t \mapsto \ln t$ est de signe constant et intégrable sur $]\,0\,;\,1]$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]\,0\,;\,1]$. Et $g(x,t) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[\,1\,;\,+\infty[$.

• Pour tout $x \in [\,a\,;\,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-xt}\ln t$ est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

• $\forall (x,t) \in [\,a\,;\,+\infty[\times]\,0\,;\,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\,|\ln t|\,\mathrm{e}^{-xt}$,

or $t \mapsto t\,|\ln t|\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty[$ car continue, de limite nulle en 0 donc prolongeable par continuité en 0 et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,+\infty[$. Ceci pour tout $a>0$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

1.7 Calcul différentiel

Exercice 41 *Équation différentielle d'ordre 1*

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty[$.

2. (E) admet-elle des solutions sur $[\,0\,;\,+\infty[$?

Solution (**Ex.41** – *Équation différentielle d'ordre 1*)

1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée sur $]\,0\,;\,+\infty[$ est la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto x^{3/2}$.

En cherchant une solution de (E) par variation de la constante, donc du type $x \mapsto k(x)x^{3/2}$, on arrive à $2k'(x)x^{5/2} = \sqrt{x}$, et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto kx^{3/2} - \frac{1}{2}\sqrt{x}, k \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Une solution sur $[\,0\,;\,+\infty[$ est le prolongement d'une solution f sur $]\,0\,;\,+\infty[$. Avec $x=0$ dans (E), on a nécessairement par continuité $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Comme $kx^{3/2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, le prolongement obtenu en posant $f(0)=0$ est bien continu.

Mais alors : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$: f n'est pas dérivable en 0.

Moralité : (E) n'admet aucune solution sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

Exercice 42 *Variation de la constante version second ordre*

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (E) l'équation sur $\mathbb{R}$: $y'' + y = \cos^3 x$.

a) Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E).

b) Trouver une solution particulière y_{P} de (E) deux la forme

$$y_{\mathrm{P}}(x) = \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x)$$

où λ, μ sont deux fonctions dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)\cos(x) + \mu'(x)\sin(x) = 0.$$

c) Résoudre (E).

Solution (**Ex.42** – *Variation de la constante version second ordre*)

1. En linéarisant : $\cos^4(x) = \dfrac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$.

Donc $x \mapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ est une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.

2. a) $y_{\mathrm{P}}'' + y = \cos^3(x)$ conduit à $-\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos^3(x)$. Avec la condition sur λ' et μ', on trouve (en raisonnant par équivalence) : $\lambda'(x) = -\sin x\cos^3 x$ et $\mu'(x) = \cos^4$.

Donc $\lambda(x) = \dfrac{1}{4}\cos^4 x$ et $\mu(x) = \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ conviennent, et

$$y_{\mathrm{P}} : x \mapsto \frac{1}{4}\cos^5 + \left(\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right)\sin x \text{ convient.}$$

b) Les solutions sont les $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + y_{\mathrm{P}}(x)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

Exercice 43 *Système différentiel*

Résoudre le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 4x - 2y \\ y' & = & x + y \end{array}\right.$$

en posant $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, puis en diagonalisant A et en étudiant le système vérifié par $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ où P est une matrice de passage adaptée à la diagonalisation de A.

Solution (**Ex.43 –** *Système différentiel*)

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Alors $\mathcal{S} \iff X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A est diagonalisable, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Posons $Y = P^{-1}X$. Alors $Y' = DY$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Et $X = PY = \lambda \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

Exercice 44 *Équation différentielle et symétrie*

Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine et φ une fonction réelle, paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + \varphi y = 0$.

1. Montrer que si y est solution de (E), alors y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
2. Montrer que $x \mapsto y(-x)$ est également solution.

Solution (**Ex.44 –** *Équation différentielle et symétrie*)

1. On démontre la propriété « y est $\mathcal{C}^{2n}$ par récurrence sur n.
   Soit y est solution de (E). y est au moins deux fois dérivable donc continue. Donc y est $\mathcal{C}^0$.
   Pour l'hérédité, supposons n fixé et y de classe $\mathcal{C}^n$. Comme $y'' = -\varphi y$ avec φ $\mathcal{C}^\infty$, y'' est de classe $\mathcal{C}^n$. Donc y est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$.
   Par récurrence, on a prouvé que y est $\mathcal{C}^\infty$.
2. Soit y une solution de (E) et $f : x \mapsto y(-x)$. Alors : $\forall x \in I$,
   $f'(x) = -y'(-x)$, $f''(x) = y''(-x) = \varphi(-x)y(-x) = \varphi(x)f(x)$ par parité de φ.
   Donc f est solution de (E).

Exercice 45 *Extremums deux variables*

Soit $D = [-1\,;\ 1] \times \mathbb{R}$ et

$$f : D \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y).$$

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. a) Préciser les points critiques de f.
   b) Montrer que, pour tout $(x, y) \in D$,
   $$f(x, y) - f\big(\sqrt{3}/2, \pi\big) \leq x^2 + \sqrt{1-x^2} - 5/4.$$
   c) En posant $u = \sqrt{1-x^2}$, montrer que f atteint son maximum global en $(\sqrt{3}/2, \pi)$.
3. a) Étudier le signe de $f(0, y) - 1$.
   b) Faire un développement à l'ordre 2 de $f(x, \pi) - 1$.
   c) f atteint-elle un extremum local au point $(0, \pi)$?
4. Montrer que f atteint un minimum global en $(0, 0)$.

Solution (**Ex.45 –** *Extremums deux variables*)

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur $U =]-1\,;\ 1[\times \mathbb{R}$. Pour $(x, y) \in U$:
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos(y) = \left(2 + \dfrac{\cos(y)}{\sqrt{1-x^2}}\right)x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{1-x^2}\sin(y)$.
2. a) • $\partial_2 f(x,y) = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z}, y = k\pi$. Alors $\cos(y) = (-1)^k$.
   • Si k est pair : $\partial_1 f(x,y) = 0 \implies x = 0$.
   • Si k est impair : $\partial_1 f(x,y) = 0 \implies \big(x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}/2\big)$.
   • Réciproquement, on vérifie que l'ensemble des points critiques de f est : $\big\{(0, k\pi), k \in \mathbb{Z}\big\} \cup \big\{(\sqrt{3}/2, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\big\} \cup \big\{(-\sqrt{3}/2, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\big\}$.
   $\nabla f(x,y) = 0 \iff \big(x = 0$ et $\exists k \in \mathbb{Z}, y = k\pi\big)$
   b) • $f\big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pi\big) = \dfrac{5}{4}$.
   • $f(x,y) - f\big(\sqrt{3}/2, \pi\big) = x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y) - \dfrac{5}{4} \leq x^2 + \sqrt{1-x^2} - \dfrac{5}{4}$.
   c) $u = \sqrt{1-x^2} \implies x^2 = 1 - u^2 \implies x^2 + \sqrt{1-x^2} - \dfrac{5}{4} = -u^2 + u - \dfrac{1}{4} = -\big(u - \dfrac{1}{2}\big)^2 \leq 0$.

Ainsi : $\forall (x,y)\in \mathrm{D},\ f(x,y)-f\left(\sqrt{3}/2,\pi\right)\leq 0$, donc f atteint son maximum global en $(\sqrt{3}/2,\pi)$, qui vaut $\dfrac{5}{4}$.

3. a) $\forall y, f(0,y)-1=-\cos(y)-1\leq 0$.

b) $f(x,\pi)-1=x^2+\sqrt{1-x^2}-1=\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$.

c) • $f(0,\pi)=1$.

• Par a), $\forall y\in\mathbb{R}, f(0,y)\leq f(0,\pi)$ donc f n'atteint pas de minimum en $(0,\pi)$.

• Par b), $f(x,\pi)-1=x^2+\sqrt{1-x^2}-1\underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$ donc il existe un voisinage $]-\alpha\,;\ \alpha[$ de 0 tel que : $\forall x\in\,]-\alpha\,;\ \alpha[\,, f(x,\pi)-f(0,\pi)\geq 0$ donc f n'atteint pas de maximum en $(0,\pi)$.

• Bilan : f n'atteint pas d'extremum en $(0,_p i)$.

• $f(0,0)=-1$.

• $\forall (x,y)\in \mathrm{D},\ f(x,y)+1=x^2+\sqrt{1-x^2}\cos(y)+1\geq x^2-\sqrt{1-x^2}+1\geq 0$ car $1\geq\sqrt{1-x^2}$.

f atteint un minimum global en $(0,0)$.

Exercice 46 *Extremum à deux variables*

Soit $f(x,y)\mapsto x\ln y-y\ln x$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier l'existence d'extrema et préciser leur nature.

Solution (**Ex.46 –** *Extremum à deux variables*)

1. $\mathcal{D}_f=\,]0\,;\ +\infty[^2$.

2. • f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.

• Soit (x,y) un point critique de f.

$$\nabla f(x,y)=0\Longrightarrow\begin{cases}\ln y=\dfrac{y}{x}\\ \ln x=\dfrac{x}{y}\end{cases}$$

En particulier, $\ln y>0$ donc $y>1$.

$$\nabla f(x,y)=0\Longrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y}{\ln y}\\ \ln\dfrac{y}{\ln y}=\dfrac{1}{\ln y}\end{cases}\Longrightarrow \ln y-\ln\ln y-\frac{1}{\ln y}=0.$$

Étudions de $g:t\mapsto t-\ln t-\dfrac{1}{t}$ sur $]0\,;\ +\infty[$.

$g':t\mapsto\dfrac{t^2-t+1}{t^2}>\dfrac{(t-1)^2}{t^2}\geq 0$ donc g est strictement croissante, et comme $g(1)=0$, 1 est l'unique racine de g sur $]0\,;\ +\infty[$.

Donc $y=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ et $x=\mathrm{e}$.

• Réciproquement, $\nabla f(\mathrm{e},\mathrm{e})=(0,0)$.

• Donc (e,e) est l'unique point critique que f, donc s'il existe un extremum, il est nécessairement atteint en (e,e).

• $f(\mathrm{e},\mathrm{e})=0$.

$f(\mathrm{e}+h,\mathrm{e})=\mathrm{e}+h-\mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}+h))=\dfrac{h^2}{2\mathrm{e}}+o\left(h^2\right)$ est positif au voisinage de 0 et

$f(\mathrm{e},\mathrm{e}+k)=\mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}+k))-(\mathrm{e}+k)=-\dfrac{k^2}{2\mathrm{e}}+o\left(k^2\right)$ est négatif au voisinage de 0 :

il n'y a pas d'extremum en (e,e), donc f n'a aucun extremum sur $\mathcal{D}_f$.

2 Algèbre

2.1 Nombres complexes et polynômes

Exercice 47 *Division euclidienne*

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{A(X)}=a\mathrm{X}^{n+1}-b\mathrm{X}^n+1$ et $\mathrm{B(X)}=(\mathrm{X}-1)^2$.

1. Déterminer a et b pour que B divise A.
2. Dans ce cas, déterminer le quotient de la division euclidienne de A par B.

Solution (**Ex.47 –** *Division euclidienne*)

1. $\mathrm{A}(1)=0\Longrightarrow a-b+1=0$, $\mathrm{A}'(1)=0\Longrightarrow (n+1)a-nb=0$.

$a=n$ et $b=n+1$

2. $\mathrm{A}=(\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+1)\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{Q}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_k\mathrm{X}^k$ conduit par unicité des coefficients à

$$\begin{cases}a_{n-1}=n\\ a_{n-2}-2a_{n-1}=-(n+1)\\ \forall k\in[\![2\,;\ n-1]\!]\,,a_{k-2}-2a_{k-1}+a_k=0\\ -2a_0+a_1=0\\ a_0=1\end{cases}$$

suite récurrente linéaire dont la résolution donne : $\forall k\in[\![0\,;\ n-1]\!]\,,a_k=k+1$.

Exercice 48 *Autour de j*

On note j le nombre complexe $\exp(i2\pi/3)$.

On demande de trouver tous les polynômes complexes de degré au plus 3 vérifiant les égalités : $P(j) = j^2$, $P(j^2) = j$, $P'(j) = j$, $P'(j^2) = j^2$.

Pour cela, on utilisera le polynôme $P' - X$.

Solution (**Ex.48 –** *Autour de j*)

$Q = P' - X$ admet j et j^2 pour racines, et est de degré 2 au plus :

$Q = a(X - j)(X - j^2) = a(X^2 + X + 1)$.

$P' = aX^2 + (a+1)X + a$, $P = \dfrac{a}{3}X^3 + \dfrac{a+1}{2}X^2 + aX + b$.

La résolution du système d'inconnues a et b $\begin{cases} P(j) = j^2 \\ P(j^2) = j \end{cases}$ conduit à $a = -1$, $b = -\dfrac{2}{3}$.

$P = -\dfrac{1}{3}X^3 - X - \dfrac{2}{3}$.

Exercice 49 *Somme de binomiaux*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Solution (**Ex.49 –** *Somme de binomiaux*)

On note j le nombre complexe $\exp(i2\pi/3)$.

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k+2}$$

$$(1+j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k} + j\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k+1} + j^2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k+2}$$

$$(1+j^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k} + j^2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k+1} + j\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k+2}$$

En notant S_0, S_1 et S_2 ces trois sommes :

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 = 2^n \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 = (1+j)^n \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 = (1+j^2)^n \end{cases}$$

Comme $1 + j + j^2 = 0$, $L_1 + j^2L_2 + jL_3$ donne

$3S_1 = 2^n + j^2(1+j)^n + j(1+j^2)^n = 2^n + j^2(-j^2)^n + j(-j)^n = 2^n + 2\mathcal{R}e\big((-1)^n\big(\overline{j}^{n+1} + j^{n+1}\big)\big)$.

$S_1 = \dfrac{2^n + 2(-1)^n\mathcal{R}e(j^{n+1})}{3}$

$n = 3k \Longrightarrow S_1 = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$

$n = 3k+1 \Longrightarrow S_1 = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$

$n = 3k+2 \Longrightarrow S_1 = \dfrac{2^n - 2(-1)^n}{3}$

Exercice 50 *Recherche d'un polynôme*

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$\deg(P) = 7$, $(X-1)^4$ divise $P(X) + 1$ et $(X+1)^4$ divise $P(X) - 1$.

Solution (**Ex.50 –** *Recherche d'un polynôme*)

$Q = P(X) + 1$ admet 1 pour racine d'ordre 4 donc annule $Q' = P'$, $Q'' = P''$ et $Q''' = P'''$.

De même avec -1.

Donc comme $\deg P' = 6$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$P' = \alpha(X-1)^3(X+1)^3 = \alpha(X^2-1)^3 = \alpha\left(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1\right)$.

Et : $P = \dfrac{\alpha}{7}X^7 - \dfrac{3\alpha}{5}X^5 + 3\dfrac{\alpha}{3}X^3 - \alpha X + \beta$.

De plus, $(X-1)^4$ divise $P + 1$ donc $P(1) = -1$ et de même $P(-1) = 1$.

Ce qui donne deux équations linéaires en α et β, dont les solutions sont $\alpha = \dfrac{35}{16}$ et $\beta = 0$.

$P = \dfrac{35}{16}\big(\dfrac{1}{7}X^7 - \dfrac{3}{5}X^5 + X^3 - X\big)$, et c'est la seule solution.

Exercice 51 *Polynômes symétriques*

Pour tout entier naturel n, prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme réel P_n vérifiant l'identité :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\big(x + \dfrac{1}{x}\big) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$.

Solution (**Ex.51 –** *Polynômes symétriques*)

- Pour $n = 0$, $P_0 = 2$ convient.
- Pour $n = 1$, $P_1 = X$ convient.

• Supposons P_{n-1} et P_n connus.
$x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - x^{n-1} - \dfrac{1}{x^{n-1}} = P_n\left(x+\dfrac{1}{x}\right)P_1\left(x+\dfrac{1}{x}\right) - P_{n-1}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ donc $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$ convient.
Ce qui prouve l'existence par récurrence.

• $f : [1\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est continue avec $f(1) = 2$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc f prend une infinité de valeurs. Si P_n et Q_n vérifient la relation, ils sont égaux car $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines. D'où l'unicité.

Exercice 52 *Racines 7-èmes de l'unité*

On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$ puis $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Calculer $S + T$ et ST.

2. En déduire les valeurs de S et de T.

Solution (**Ex.52** – *Racines 7-èmes de l'unité*)

Rappel : $\omega^7 = 1$ et $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$.

1. $S + T = -1$, $ST = 2$

2. S et T sont les racines de $X^2 - (S+T)X + ST$, *i.e* $X^2 + X + 2$. $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$.
$x_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$
$\mathcal{I}m(S) = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$ or $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7} = \sin\dfrac{2\pi}{7} - \sin\dfrac{\pi}{7} \geq 0$ car sin est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{7}\,;\ \dfrac{2\pi}{7}\right]$. Comme $\sin\dfrac{4\pi}{7} \geq 0$, $\mathcal{I}m(S) \geq 0$, donc

$$T = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \text{ et } S = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 53 *Équation complexe et racines n-ièmes*

On fixe n dans $\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(E) \qquad (z+1)^n = (z-1)^n$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Solution (**Ex.53** – *Équation complexe et racines n-ièmes*)

$z = 1$ n'étant pas solution, (E) $\iff \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

Or : $\dfrac{z+1}{z-1} = \omega \iff (\omega - 1)z = \omega + 1$ ce qui interdit $\omega = 1$.

(E) $\iff z \neq 1$ et $\exists k \in [\![1\,;\ n-1]\!]$, $\dfrac{z+1}{z-1} = \exp(2ik\pi/n)$

(E) $\iff z \neq 1$ et $\exists k \in [\![1\,;\ n-1]\!]$, $z = \dfrac{\exp(2ik\pi/n) + 1}{\exp(2ik\pi/n) - 1}$

(E) $\iff \exists k \in [\![1\,;\ n-1]\!]$, $z = -i\cot\dfrac{k\pi}{n}$

Exercice 54 *Polynôme minimal d'un nombre complexe*

Soit $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

1. Calculer $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

2. Trouver un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré possible tel que $P(z) = 0$.

Solution (**Ex.54** – *Polynôme minimal d'un nombre complexe*)

1. $z = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \dfrac{1}{2^5}e^{i70\pi/12} = \dfrac{1}{2^5}e^{-i\pi/6}$ donc $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{64}$ et $\mathcal{I}m(z) = -\dfrac{1}{64}$.

2. Comme z n'est pas réel, $\deg P \geq 2$.
Comme $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\mathcal{R}e(z)X + |z|^2 \in \mathbb{R}[X]$, $P = (X - z)(X - \overline{z})$ convient.
Explicitement : $P = X^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{32}X + \dfrac{1}{1024}$.
Remarque : C'est aussi le seul polynôme *unitaire* de degré 2 convenable car si z est racine de $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{z}$ aussi, donc Q est factorisable par $(X - z)(X - \overline{z}) = P$. Autrement dit, l'ensemble des polynômes réels admettant z pour racine est $\{Q \times P, Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

Exercice 55 *Décomposition en somme de carrés*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P}(x) \geqslant 0$.

1. Que peut-on dire de $\deg(P)$?

2. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Indication : on pourra remarquer que $(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2$ pour tous polynômes A, B, C, D.

Solution (**Ex.55** – *Décomposition en somme de carrés*)

1. Si P était de degré impair, on aurait $\lim\limits_{x\to-\infty} \widetilde{P}(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} \widetilde{P}(x) = \pm\infty$.
2. La décomposition de P en produit de facteurs irréductibles ne peut faire apparaître que deux types de polynômes :
   • les $(X-\alpha)^k$ avec k pair (sinon P change de signe en α), que l'on peut écrire $\left[(X-\alpha)^{k/2}\right]^2 + 0^2$,
   • les $(X^2+aX+b)^k$ avec $a^2-4b<0$, or $X^2+aX+b = \left(X+\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b-\dfrac{a^2}{4}}\right)^2$,
   et par l'indication $(X^2+aX+b)^k$ est du coup une somme de carrés.

2.2 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 56 *Isomorphisme et composition*
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) w est un isomorphisme de E sur G.
(ii) u est injectif, v est surjectif et $F = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Solution (**Ex.56** – *Isomorphisme et composition*)
(i)$\Longrightarrow$(ii) :
$u(x) = u(y) \Longrightarrow w(x) = w(y) \Longrightarrow x = y$ car w injectif : donc u injectif.
$y \in G \Longrightarrow \exists x \in E, w(x) = y \Longrightarrow v\big(u(x)\big) = y$ car w surface : donc v surjectif.
$x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) \Longrightarrow (\exists y \in E, x = u(y) \text{ et } v(x) = 0) \Longrightarrow w(y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Soit $x \in F$. $x = k + i$ avec $i = u(w^{-1}(v(x)))$ et $k = x - i$.
Alors : $i \in \mathrm{Im}(u)$ et $v(i) = v(x)$ donc $k \in \mathrm{Ker} v$. Donc $F = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
(ii)$\Longrightarrow$(i) :
$w(x) = 0 \Longrightarrow v(u(x)) = 0 \Longrightarrow u(x) \in \mathrm{Ker} v \cap \mathrm{Im} u \Longrightarrow u(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$: w injectif.
Soit $z \in G$. $\exists y \in F, z = v(y)$. $\exists (k,i) \in \mathrm{Ker} v \times \mathrm{Im} u, y = k + i$. $\exists x \in E, i = u(x)$.
Alors : $w(x) = v(u(x)) = v(i) = v(k) + v(i) = v(k+i) = v(y) = z$. w surjectif.

Exercice 57 *Une base non échelonnée*
Soit pour tout entier k de 0 à n : $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Exprimer : $1, X, ..., X^n$ dans cette base.

Solution (**Ex.57** – *Une base non échelonnée*)

1. • $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1 = card(\{P_k, 0 \le k \le n\})$.
   • Soit $(a_k)_{0\le k\le n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que :
   $$(\heartsuit) : \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k P_k = 0.$$
   Notons que pour tout $k \ge 1$, 0 est racine d'ordre k de P_k donc racine de $P_k^{(i)}$ pour tout $i \in [\![0 ;\ k-1]\!]$ mais pas de $P_k^{(k)}$.
   $(\heartsuit)$ en $X = 0$ donne $a_0 = 0$.
   En dérivant $(\heartsuit)$ puis en évaluant en $X = 0$: $a_1 = 0$.
   En dérivant à nouveau $(\heartsuit)$ puis en évaluant en $X = 0$: $a_2 = 0$...
   En itérant, $\forall k \in [\![0 ;\ n]\!], a_k = 0$. Donc la famille est libre.
   • Bilan : la famille est bien une base.
2. $X^n = P_n$,
   $X^{n-1} = X^{n-1}(1-X) + X^n = P_{n-1} + P_n$,
   $X^{n-2} = X^{n-2}(1-X)^2 + 2X^{n-1} - X^n = P_{n-2} + 2P_{n-1} + P_n$ ...
   laisse conjecturer que : $X^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} P_{n-i}$. Vérifions-le :
   $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} P_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^{n-i}(1-X)^i = X^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^{n-k-i}(1-X)^i$
   $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} P_{n-i} = X^k(X+1-X)^{n-k} = X^k$

Exercice 58 *Bases non échelonnée bis*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux nombres complexes distincts.

1. Démontrer que si $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, alors $(P_k(X+a))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Montrer que $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Indication : On pourra considérer la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par :
$$\forall k\in [\![0\,;\ n]\!], P_k(X)=X^k(X+a-b)^{n-k}.$$

Solution (**Ex.58 –** *Bases non échelonnée bis*)

1. L'endomorphisme $\varphi_a : \mathbb{C}_x[X]\to\mathbb{C}_n[X], P\mapsto P(X+a)$ est bijectif car injectif en dimension finie ($\varphi_a(P)=0 \Longrightarrow (\forall x\in\mathbb{R}, P(x+a)=0)$, P nul car infinité de racines).
φ_a est un automorphisme, donc transforme la base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par :
$$\forall k\in [\![0\,;\ n]\!], P_k(X)=X^k(X+a-b)^{n-k}.$$
Soit $(a_k)_{0\leq k\leq n}\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que :
$$(\heartsuit) : \qquad \sum_{k=0}^{n} a_kP_k=0.$$
Notons que pour tout $k\geq 1$, 0 est racine d'ordre k de P_k donc racine de $P_k^{(i)}$ pour tout $i\in[\![0\,;\ k-1]\!]$ mais pas de $P_k^{(k)}$.
$(\heartsuit)$ en $X=0$ donne $a_0=0$.
En dérivant $(\heartsuit)$ puis en évaluant en $X=0$: $a_1=0$.
En dérivant à nouveau $(\heartsuit)$ puis en évaluant en $X=0$: $a_2=0$...
En itérant, $\forall k\in[\![0\,;\ n]\!], a_k=0$. Donc la famille est libre. Étant de cardinal $n+1$, c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
En appliquant le résultat de la première question avec $-a$,
$\left(\varphi_{-a}(P_k)\right)_{0\leq k\leq n}=\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 59 *Commuter avec un projecteur*
Soit E un espace vectoriel, p un projecteur de E et f un endomorphisme de E.

Montrer que $p\circ f=f\circ p$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

Solution (**Ex.59 –** *Commuter avec un projecteur*)
• Supposons $p\circ f=f\circ p$.
☞ $x\in\mathrm{Ker}(p)\Longleftrightarrow p(x)=0$.
$x\in\mathrm{Ker}(p)\Longrightarrow p(f(x))=f(p(x))=f(0)=0$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(p)$: $\mathrm{Ker}(p)$ est $f-$stable.
☞ $x\in\mathrm{Im}(p)\Longleftrightarrow p(x)=x$.
$x\in\mathrm{Im}(p)\Longrightarrow p(x)=x\Longrightarrow p(f(x))=f(p(x))=f(x)\Longrightarrow f(x)\in\mathrm{Im}(p)$: $\mathrm{Im}(p)$ est $f-$stable.

• Supposons $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ stables par f.

Comme p est un projecteur : $E=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$.

Soit $x\in E$ quelconque. $\exists(k,i)\in\mathrm{Ker}(p)\times\mathrm{Im}(p)$, $x=k+i$.

$f\circ p(x)=f\circ p(i)=f(i)$ et $p\circ f(x)=p(f(k)+f(i))=p(f(k))+p(f(i))=0+f(i)=f(i)$ car $f(k)\in\mathrm{Ker}(p)$ et $f(i)\in\mathrm{Im}(p)$.

Donc $f\circ p=p\circ f$.

Exercice 60 *Un endomorphisme en dimension infinie*

Montrer que $\Phi : \begin{array}{l}\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]\\ P(X)\mapsto P(X^2)+(1+X^2)P(X)\end{array}$ est linéaire.

Est-elle injective ? Surjective ?

Solution (**Ex.60 –** *Un endomorphisme en dimension infinie*)

Linéarité sans souci.

Une première idée

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$, prenons $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\Phi(P)=0$. Supposons $P\neq 0$.

• Que dire d'abord de $\deg(P)$?

Soit $n=\deg(P)$. En prenant les degrés des deux membres de l'égalité $P(X^2)=-(1+X^2)P(X)$, on a
$$2n=2+n \text{ donc } n=2.$$

• Posons alors $P=aX^2+bX+c$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(P)&=aX^4+bX^2+c+aX^2+bX+c+aX^4+bX^3+cX^2\\ &=2aX^4+bX^3+(b+a+c)X^2+bX+2c\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, $\Phi(P)=0\Longleftrightarrow a=b=c=0$.

Ceci est absurde car on a supposé $P\neq 0$.

• Conclusion : seul le polynôme nul vérifie $\Phi(P)=0$, et $\mathrm{Ker}(\Phi)=\{0\}$, donc Φ est injective.

• Pour la surjectivité, montrons que $\Phi(P)=1$ n'a aucune solution. Le même raisonnement que précédemment montre que si $\Phi(P)=1$ alors $\deg(P)=2$ et les coefficients de P vérifient

$$\begin{cases} 2a=0\\ b=0\\ a+b+c=0\\ b=0\\ 2c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=0\\ c=1/2\end{cases} \Rightarrow 0=1/2...$$

Ce système n'ayant aucune solution, 1 n'a pas d'antécédent (on peut montrer de même que X n'a pas d'antécédent). Donc Φ n'est pas surjective.

Une seconde idée

Intéressons-nous à l'image du monôme dominant d'un polynôme.

Soit $a_d\mathrm{X}^d$ le monôme dominant d'un polynôme P non nul (donc $a_d \neq 0$). Celui de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ est $a_d\mathrm{X}^{2d}$ et celui de $(1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est $a_d\mathrm{X}^{d+2}$, donc celui de $\Phi(\mathrm{P})$ est

$$\begin{cases} a_d\mathrm{X}^{2d} & \text{si } d\geq 3\\ 2a_2\mathrm{X}^4 & \text{si } d=2\\ a_1\mathrm{X}^3 & \text{si } d=1\\ a_0\mathrm{X}^2 & \text{si } d=0\end{cases}$$

Donc si $\mathrm{P}\neq 0$ alors $\Phi(\mathrm{P})\neq 0$, donc $\mathrm{Ker}\Phi=\{0\}$ et Φ est injective.

De plus, on voit que $\deg(\Phi(\mathrm{P}))\geq 2$ pour tout $\mathrm{P}\neq 0$ donc par exemple 1 et X n'ont pas d'antécédent et Φ n'est pas surjective.

Exercice 61 *Crochets de Lie*

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On fait l'hypothèse : $f\circ g - g\circ f = f$.

1. Pour tout entier k, prouver la relation $f^k\circ g - g\circ f^k = kf^k$.
2. Prouver que f est nilpotent.
   Indication : on pourra s'intéresser à $\varphi_g : \mathcal{L}(\mathrm{E})\to\mathcal{L}(\mathrm{E}), h\mapsto h\circ g - g\circ h$.

Solution (**Ex.61 –** *Crochets de Lie*)

1. Récurrence sur k. Initialisation évidente. Admettons la propriété au rang k, alors :
   $f^{k+1}\circ g - g\circ f^{k+1} = f^{k+1}\circ g - \big(g\circ f\big)\circ f^k = f^{k+1}\circ g - \big(f\circ g - f\big)\circ f^k = f^{k+1}\circ g - \big(f\circ g - f\big)\circ f^k = f^{k+1}\circ g - f\circ g\circ f^k + f^{k+1} = f\circ\big(f^k\circ g - g\circ f^k\big) + f^{k+1} = kf^{k+1}+f^{k+1} = (k+1)f^{k+1}$...
2. On vérifie que φ_g est un endomorphisme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ (donc $\varphi_g\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$).
   Si : $\forall k\in\mathbb{N}, f^k\neq 0$, alors $\forall k\in\mathbb{N}, k\in\mathrm{Sp}(\varphi_g)$ (et $f^k\in\mathrm{SEP}(\varphi_g,k)$). Donc φ_g admet une infinité de valeurs propres distinctes, ce qui est impossible car $\dim\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est finie.
   Donc : $\exists k\in\mathbb{N}, f^k=0$.

Exercice 62 *Endomorphisme vérifiant une équation*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3+f=0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)\geqslant 1$.
4. **a)** On suppose $f\neq 0$. Soit $x\in\mathrm{E}\setminus\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $(f(x),f^2(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   b) En déduire $\mathrm{Tr}(f)$.

Solution (**Ex.62 –** *Endomorphisme vérifiant une équation*)

1. $x\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) \Longrightarrow (\exists y\in\mathrm{E}, x=f(y) \text{ et } f(x)=0) \Longrightarrow f^3(y)=0 \Longrightarrow f(y)=0 \Longrightarrow x=0$.
2. 1. avec la formule du rang donne $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)$.
3. $f^3=-f$ donc $\det(f)^3=\det(f^3)=(-1)^3\det(f)=-\det(f)$ donc $\det(f)$ est une solution réelle de $x^3+x=0$, donc $\det(f)=0$ (car $x^3+x=x(x^2+1)$).
   $\det(f)=0$ donc $\mathrm{rg}(f)\leq 2$ et $\dim\mathrm{Ker}(f)\geq 1$.
4. **a)** Supposons $af(x)+bf^2(x)=0 \quad (1)$.
   Alors $af^2(x)-bf(x)=0 \quad (2)$.
   $a\times(1)-b\times(2)$ donne $(a^2+b^2)f(x)=0$. Or $f(x)\neq 0$, donc $a^2+b^2=0$, donc $a=b=0$.
   Ainsi $\big((f(x),f^2(x)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ dont la dimension est au plus 2. Du coup, $\dim\mathrm{Im}(f)=2$ et $\big(f(x),f^2(x)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   b) Soit $y\in\mathrm{Ker}(f)\setminus\{0\}$. Alors $\mathcal{B}\overset{\text{déf.}}{=}(y,f(x),f^2(x))$ est une base de E par concaténation de bases de sous-espaces supplémentaires.
   Alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Tr}(f)=0$.

Exercice 63 *Commutant d'un endomorphisme nilpotent*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n. On suppose que $f^{n-1} \neq 0$.
On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

1. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

2. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que la famille $(a; f(a); ...; f^{n-1}(a))$ constitue une base de E.

3. Soit $\varphi_a : C(f) \to E$ l'application définie par $\varphi_a(g) = g(a)$. Montrer que φ_a est un isomorphisme.

4. En déduire que $C(f) = \mathrm{V}ect(id_E; f; ...; f^{n-1})$.

Solution (**Ex.63 –** *Commutant d'un endomorphisme nilpotent*)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n. On suppose que $f^{n-1} \neq 0$.
On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

1. Sommairement :
$f \circ 0 = 0 = 0 \circ f$ donc $0 \in C(f)$.
$g, h \in C(f), \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h = \lambda g \circ f + h \circ f = (\lambda g + h) \circ f$.

2. Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.
Soit $x_0, \ldots, x_{n-1}$ n scalaires tels que

$$(\heartsuit) \qquad x_0 a + x_1 f(a) + \cdots + x_{n-1} f^{n-1}(a) = 0.$$

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-1}, comme $f^n = 0$, $x_0 = 0$.
Puis en composant $(\heartsuit)$ par f^{n-2}, $x_1 = 0$.
En itérant, on montre que : $\forall k \in [\![0 \,;\, n-1]\!], x_k = 0$.
La famille $(a; f(a); ...; f^{n-1}(a))$ est libre, de cardinal $n = \dim(E)$, donc constitue une base de E.

3. • La linéarité ne pose pas problème.
• Soit $g \in C(f)$ tel que $\varphi_a(g) = 0$.
Alors $g(a) = 0$, et $\forall k \in [\![1 \,;\, n-1]\!], g \circ f^k(a) = f^k \circ g(a) = f^k(0) = 0$, donc g est nulle sur la base $(a; f(a); ...; f^{n-1}(a))$, donc g est l'endomorphisme nul par linéarité.
Donc $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \{0\}$ et φ_a est injectif.
• Soit $x \in E$ quelconque. Écrivons $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k f^k(a)$. Soit $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k f^k$.
On a : $g(a) = x$ et $g \circ f = f \circ g$ car f commute avec chacune de ses puissances ($f \circ f^k = f^{k+1} = f^k \circ f$!!!).
Donc : $g \in C(f)$ et $\varphi_a(g) = x$.
Ainsi φ_a est surjectif.

4. φ_a^{-1} est un isomorphisme transformant toute base de E en base de $C(f)$.
Or, pour tout $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, $\varphi_a^{-1}(f^k(a)) = f^k$ car $f^k \in C(f)$.
Donc $(f^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $C(f)$, et $C(f) = \mathrm{V}ect(id_E; f; ...; f^{n-1})$, ... et même $\dim C(f) = n$, ce que ne demandait pas l'énoncé.

Exercice 64 *Inégalités sur les rangs*
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.
Démontrer que $|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.

Solution (**Ex.64 –** *Inégalités sur les rangs*)
De $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ on tire immédiatement $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
La décomposition $f = f + g + (-g)$ donne de même $\mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g)$, or $\mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(g)$ puisque $\mathrm{Im}(-g) = \mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f+g)$.
En permutant f et g, $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f+g)$.
D'où : $|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.

Exercice 65 *Hyperplan*
On rappelle qu'on appelle hyperplan d'un espace $\mathbb{R}-$vectoriel E tout noyau $\mathrm{Ker}(\varphi)$ d'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ non nulle. n désigne un entier naturel au moins égal à 1.

1. Dans cette question uniquement, E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n.
a) Montrer que tout hyperplan de E est de dimension $n-1$.
b) Montrer que tout sous-espace F de dimension $n-1$ est un hyperplan de E.
Indication : On pourra commencer par compléter une base de F en base de E.

2. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P'(0) = 0\}$.
a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Déterminer un supplémentaire de H.

3. Soit $H = \left\{h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), h'(0) = 0\right\}$.
a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
b) Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Solution (**Ex.65 –** *Hyperplan*)

1. a) Supposons $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Formule du rang : $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) \leq 1$, et si $\mathrm{rg}(\varphi) = 0$, φ est nulle, ce qui est interdit. Donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ et $\dim(\mathrm{H}) = n-1$.

b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ soit base de F (théorème de la base incomplète).

Soit $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x = x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1} + x_ne_n \mapsto x_n$. Alors :

(i) φ est une forme linéaire sur E,

(ii) $\varphi(e_n) = 1$ donc $\varphi \neq 0$,

(iii) $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Donc F est un hyperplan.

NB. : $x \mapsto \varphi(x)e_n$ est la projection de E sur $\mathrm{Vect}(e_n)$ parallèlement à F...

2. a) $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k \in \mathrm{H} \iff a_1 = 0 \iff \mathrm{P} \in \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3, \dots, \mathrm{X}^n)$ donne une description de H, avec clairement $\dim(\mathrm{H}) = n = \dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]) - 1$.

Sinon, on peut aussi observer que $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ où $\varphi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}, \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'(0)$ est une forme linéaire non nulle.

b) $(1, \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{X}^n, \mathrm{X})$ étant une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Vect}(\mathrm{X}) = \{a\mathrm{X}, a \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de H (et ce n'est pas le seul : tout $\mathrm{Vect}(\mathrm{X} + \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ convient, par exemple).

3. a) $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, h \mapsto h'(0)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.

b) Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors $h = f + g$ avec $f : x \mapsto h(x) - h'(0)x$ et $g : x \mapsto h'(0)x$. On a : $f \in \mathrm{H}$ et $g \in \mathrm{Vect}(x \mapsto x)$. En notant $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x \mapsto x)$, on a déjà : $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \mathrm{H} + \mathrm{F}$.

Soit $f \in \mathrm{H} \cap \mathrm{F}$. Alors : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, f : x \mapsto \alpha x$ car $f \in \mathrm{F}$. De plus, $f'(0) = 0$ car $f \in \mathrm{H}$. Donc $\alpha = 0$ et $f : x \mapsto 0$. Ainsi : $\mathrm{H} \cap \mathrm{F} = \{0\}$.

Bilan : $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x \mapsto x) = \{x \mapsto \alpha x / \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de H. Noter l'analogie avec la question précédente...

2.3 Matrices et déterminants

Exercice 66 *Un calcul de déterminant*

Calculer le déterminant d'ordre $(n+1)$ $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Solution (**Ex.66 –** *Un calcul de déterminant*)

En remplaçant la dernière colonne par la somme de toutes les colonnes, puis en factorisant :

$$\mathrm{D}_n = (a_1 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \qquad (\leftarrow \text{soit } \Delta_n \text{ ce déterminant})$$

Puis en soustrayant l'avant-dernière ligne à le dernière :

$$\mathrm{D}_n = (a_1 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\mathrm{D}_n = (-a_n)(a_1+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est Δ_{n-1}. En itérant les deux dernières étapes $\Delta_n \to \Delta n-1$, on obtient :

$$\mathrm{D}_n = (-a_1)\dots(-a_n)(a_1+\cdots+a_n) = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n a_k\right).$$

Exercice 67 *Un calcul de déterminant*

Soit $n \in \mathbb{N}\cap [3;+\infty[$.

Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{i,j}$ défini par :

$a_{i,i} = 2$; $a_{i,i+1} = 1$; $a_{i,i-1} = 3$; $a_{ij} = 0$ dans les autres cas.

Solution (**Ex.67** – *Un calcul de déterminant*)

$$\mathrm{D}_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0\dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Comme pour tout déterminant tridiagonal, un développement suivant la première ligne, puis première colonne donne :

$\mathrm{D}_n = 2\mathrm{D}_{n-1} - 3\mathrm{D}_{n-2}$, vraie dès $n=2$ en prenant $\mathrm{D}_0 = 1$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont $1 \pm i\sqrt{2} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta = \mathrm{Arctan}\sqrt{2}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{3}^n\big(\cos(n\theta) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(n\theta)\big)$.

Exercice 68 *Un calcul de déterminant*

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $\mathrm{P}(x) = \det(\mathrm{B}+x\mathrm{J})$.

1. Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus égal à 1.

2. Soit $(c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq b$. Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on pose $b_{ij} = \begin{cases} c_i & \text{si } i=j \\ a & \text{si } i>j \\ b & \text{si } i<j. \end{cases}$

Calculer $\det(\mathrm{B})$.

Solution (**Ex.68** – *Un calcul de déterminant*)

1. En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice $\mathrm{B}+x\mathrm{J}$ apparaît comme le déterminant d'une matrice où figurent des x seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que $\det(\mathrm{B}+x\mathrm{J})$ est une fonction affine de la variable x.

2. $\mathrm{P}(-a) = \displaystyle\prod_{i=1}^n (c_i - a)$ et $\mathrm{P}(-b) = \displaystyle\prod_{i=1}^n (c_i - b)$ (déterminants triangulaires).

En écrivant $\mathrm{P}(x) = \alpha x + \beta$, $\begin{cases} -a\alpha+\beta = \mathrm{P}(-a) \\ -b\alpha+\beta = \mathrm{P}(-b) \end{cases}$

D'où $(b-a)\beta = b\mathrm{P}(-a) - a\mathrm{P}(-b)$, donc :

$$\det(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(0) = \beta = \frac{b\displaystyle\prod_{i=1}^n (c_i-a) - a\prod_{i=1}^n (c_i-b)}{b-a}$$

Exercice 69 *Des déterminants et des matrices-colonnes*

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, X et Y deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer le rang de la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}$.

2. Soit $t \in \mathbb{C}$. Exprimer $\det(t\mathrm{I}_n - \mathrm{M})$ en fonction de t, X et Y.

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{Y} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$. En calculant $\det(\mathrm{M}+\mathrm{I}_n)$, montrer que : $\dfrac{\det\left(\mathrm{X}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}+\mathrm{A}\right)}{\det(\mathrm{A})} = 1 + \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}$.

Solution (**Ex.69 –** *Des déterminants et des matrices-colonnes*)

1. Les n colonnes de M sont proportionnelles à X, et comme il existe $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $y_i \neq 0$, la i–ème colonne de M est $y_i\mathrm{X} \neq 0$. Donc $\mathrm{rg(M)} = 1$.
2. $\det(t\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) = \chi_{\mathrm{M}}(t)$, or par 1., 0 est valeur propre avec un espace propre de dimension $n-1$, donc $\omega(0) \geq n-1$. Donc $\chi_{\mathrm{M}}(t) = t^{n-1}(t-\alpha)$. Or on sait que le coefficient de t^{n-1} dans χ_{M} est Tr(M), donc : $\det(t\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) = t^n - \mathrm{Tr(M)}t^{n-1} = t^n - \mathrm{Tr(XY^T)}t^{n-1}$.
3. $\det(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n) = (-1)^n\det(-\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) = (-1)^n\chi_{\mathrm{M}}(-1) = 1 + \mathrm{Tr(M)}$.
   Or : $\mathrm{M} = \mathrm{XX^TA^{-1}}$, donc $\mathrm{Tr(M)} = \mathrm{Tr(X \times X^TA^{-1})} = \mathrm{Tr(X^TA^{-1} \times X)} = \mathrm{X^TA^{-1}X} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$.
   De plus : $\det(\mathrm{MA + A}) = \det(\mathrm{XX^T + A})$ mais aussi $\det(\mathrm{MA + A}) = \det(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n)\det(\mathrm{A})$.
   Donc : $\dfrac{\det\left(\mathrm{XX^T + A}\right)}{\det(\mathrm{A})} = 1 + \mathrm{X^TA^{-1}X}$.

Exercice 70 *polynôme caractéristique d'un produit*

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. À l'aide de la matrice M =, montrer que
   $$\mathrm{X}^q\det(\mathrm{XI}_p - \mathrm{AB}) = \mathrm{X}^p\det(\mathrm{XI}_q - \mathrm{BA}).$$
2. Dans le cas $p = q$, que dire de χ_{AB} et χ_{BA}.

Solution (**Ex.70 –** *polynôme caractéristique d'un produit*)

1. $\mathrm{M}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ \mathrm{B} & -\mathrm{I}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{XI}_p - \mathrm{AB} & -\mathrm{A} \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{pmatrix}$,
   $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ \mathrm{B} & -\mathrm{XI}_q \end{pmatrix}\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{XI}_p & -\mathrm{A} \\ 0 & \mathrm{XI}_p - \mathrm{BA} \end{pmatrix}$,
   en passant au déterminant dans ces deux relations :
   $\det(\mathrm{M}) = (-1)^q\det(\mathrm{XI}_p - \mathrm{AB})$ et $(-1)^q\mathrm{X}^q\det(\mathrm{M}) = \mathrm{X}^p\det(\mathrm{XI}_q - \mathrm{AB})$,
   d'où la relation cherchée.
2. $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.

Exercice 71 *Similitude*

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = 0$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.71 –** *Similitude*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Puisque $f \neq 0$ et $f^2 = 0$, $\dim\mathrm{Im}(f) \geq 1$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc $1 \leq \dim\mathrm{Im}(f) \leq \dim\mathrm{Ker}(f)$. Comme $\dim\mathrm{Ker}(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = 3$, nécessairement $\dim\mathrm{Ker}(f) = 2$ et $\dim\mathrm{Im}(f) = 1$.

Soit $e_1 \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $e_2 = f(e_1)$. Alors $e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Complétons (e_2) en une base (e_2, e_3) de $\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$.

Supposons $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. En composant par f, $a = 0$. Et comme (e_2, e_3) est libre, $b = c = 0$.

$\mathcal{B}$ est libre de cardinal 3, c'est une base. Et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 72 *Similitude*

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 \neq 0$ et $\mathrm{A}^3 = 0$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.72 –** *Similitude*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Puisque $f^2 \neq 0$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x)\big)$.

Supposons $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$. En composant par f^2, $a = 0$. Puis en composant par f, $b = 0$. Donc aussi $c = 0$.

$\mathcal{B}$ est libre de cardinal 3, c'est une base. Et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 73 *Puissances*

Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solution (**Ex.73 –** *Puissances*)
On peut diagonaliser A sans subtilité :
$\chi_A = X^3 - 6 \cdot X^2 + 9 \cdot X - 4 = (X-4)(X-1)^2$,
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
vérifient : $D = P^{-1}AP$.
Alors $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$

• Sinon : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 5A - 4I_3$ donc $P = X^2 - 5X + 4$ est un polynôme annulateur de A.
Cherchons le reste de la division euclidienne de X^n par P qui est de degré au plus 1 :
$X^n = P(X)Q(X) + aX + b$ en $X = 4$ et $X = 1$ donne :
$$\begin{cases} 4a + b = 4^n \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{4^n-1}{3} \\ b = \dfrac{4-4^n}{3} \end{cases}$$
d'où $A^n = \dfrac{4^n-1}{3}A + \dfrac{4-4^n}{3}I_3$.

• Et sinon : $A = J + I_3$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $JI_3 = I_3J$, et : $\forall k \geq 1, J^k = 3^{k-1}J$.
$A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}J = I_3 + \frac{1}{3}\big(4^n - 1\big)J$ (y compris pour $n = 0$).

Exercice 74 *Puissances*

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, où $\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ si } i \neq j \\ a_{ij} = 0 \text{ si } i = j \end{cases}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
Calculer A^p.

Solution (**Ex.74 –** *Puissances*)
En notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a : $A = J - I_n$ avec $JI_n = I_nJ$, et : $\forall k \geq 1, J^k = n^{k-1}J$.
$A^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k (-I_n)^{p-k} = I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1}(-1)^{p-k}\right) J$ (en supposant $p \geq 1$)
$A^p = I_n + \dfrac{1}{n}\big((n-1)^p - (-1)^p\big)J$ (y compris pour $p = 0$ finalement).

Exercice 75 *Symétriques et antisymétriques*
Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose $\Delta_A = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;/\; M + M^T = \mathrm{T}r(M)A\right\}$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

1. Montrer que Δ_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \subset \Delta_A$.
2. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$, montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) = \Delta_A$.
3. Si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, déterminer Δ_A.
4. Si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, déterminer Δ_A.

Solution (**Ex.75 –** *Symétriques et antisymétriques*)

1. Sans problème. Remarque : la trace d'une matrice antisymétrique est nulle ($\forall i, m_{i,i} = -m_{i,i} \Longrightarrow m_{i,i} = 0$...).

2. Supposons $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \neq 2$.
$\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A} \Longrightarrow 2\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \Longrightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\big(2-\mathrm{Tr}(\mathrm{A})\big) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 2$.
Du coup, $\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = 0 \Longrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{A}_n(\mathbb{C})$.

3. Supposons $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 2$ et $\mathrm{A} \notin \mathrm{S}_n(\mathbb{C})$.
Soit $\mathrm{M} \in \Delta_{\mathrm{A}}$.
$\big(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} = \big(\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A}\big)^{\mathrm{T}} = \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \qquad (1)$
$\big(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}} + (\mathrm{M}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{A} \qquad (2).$
Supposons $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) \neq 0$. $(1)-(2) \Longrightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{A} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{C})$: absurde.
Donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0$, donc $\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = 0$, donc $\mathrm{M} \in \mathrm{A}_n(\mathbb{C})$.
Donc : $\Delta_{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_n(\mathbb{C})$.

4. Soit $\mathrm{M} \in \Delta_{\mathrm{A}}$. Décomposons M en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique :
$\mathrm{M} = \mathrm{S}+\mathrm{T}$ avec $\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}})$ et $\mathrm{T} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M}-\mathrm{M}^{\mathrm{T}})$.
Comme $\mathrm{T} \in \Delta_{\mathrm{A}}$ et Δ_{A} est un sous-espace vectoriel, donc $\mathrm{S} \in \Delta_{\mathrm{A}}$. Or S est symétrique.
$\mathrm{S}+\mathrm{S}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Tr}(\mathrm{S})\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{S} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{S})\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{S} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.
Réciproquement, si $\mathrm{S} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$, disons $\mathrm{S} = \alpha\mathrm{A}$, alors :
$\mathrm{S}+\mathrm{S}^{\mathrm{T}} = 2\alpha\mathrm{A} = \mathrm{Tr}(\mathrm{S})\mathrm{A}$ donc $\mathrm{S} \in \Delta_{\mathrm{A}}$.
Donc : $\Delta_{\mathrm{A}} = \mathrm{S}_n(\mathbb{C}) + \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.

Exercice 76 *Famille de matrices*

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M}(a)\mathrm{M}(b) = \mathrm{M}(c)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq \dfrac{1}{3}$.
a) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M}(a)\mathrm{M}(b) = \mathrm{I}_3$.
b) La matrice $\mathrm{M}(a)$ est-elle inversible ?

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{M}(a)$ soit inversible. Dans ce cas, écrire explicitement $\mathrm{M}(a)^{-1}$.

4. Déterminer tous les nombres réels a tels que $\mathrm{M}(a)^2 = \mathrm{M}(a)$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{I}_3 - \mathrm{P}$.
a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M}(a) = \mathrm{P} + \alpha\mathrm{Q}$.
b) Calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
c) En déduire $\mathrm{M}(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution (**Ex.76** – *Famille de matrices*)

1. $\mathrm{M}(a)\mathrm{M}(b) = \mathrm{M}(a+b-3ab)$

2. Comme $\mathrm{I}_3 = \mathrm{M}(0)$, on résout $a+b-3ab = 0$: $b = \dfrac{a}{3a-1}$ (chic ! $a \neq 1/3$).
$\mathrm{M}(a)$ est inversible d'inverse $\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{3a-1}\right)$.

3. $\mathrm{M}(1/3) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(\mathrm{M}(1/3)) = 1$ donc a est inversible si et seulement si $a \neq 1/3$.

4. $\mathrm{M}(a)^2 = \mathrm{M}(a) \Longleftrightarrow 2a - 3a^2 = a \Longleftrightarrow a(3a-1) = 0 \Longleftrightarrow a \in \{0, 1/3\}$.

5. a) $\mathrm{M}(a) = \mathrm{P} + \alpha\mathrm{Q}$ équivaut à deux équations équivalentes à $\alpha = 1-3a$.
b) $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ d'après 4., $\mathrm{PQ} = \mathrm{P}(\mathrm{I}_3-\mathrm{P}) = \mathrm{P}-\mathrm{P}^2 = 0$, $\mathrm{Q}^2 = (\mathrm{I}_3-\mathrm{P})^2 = \mathrm{I}_3-\mathrm{P} = \mathrm{Q}$, $\mathrm{QP} = (\mathrm{I}_3-\mathrm{P})\mathrm{P} = \mathrm{P}-\mathrm{P}^2 = 0$.
Remarque : P *et* Q *projecteurs associés,* $\mathrm{P}+\mathrm{Q} = \mathrm{I}_3$.
c) $\mathrm{M}(a)^n = (\mathrm{P}+\alpha\mathrm{Q})^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{P}^k\alpha\mathrm{Q}^{n-k} = \binom{n}{0}\alpha\mathrm{Q}^n + 0 + \binom{n}{n}\mathrm{P}^n = \mathrm{P} + \alpha^n\mathrm{Q}$

2.4 Réduction des endomorphismes

Exercice 77 *Endomorphisme sur matrices*

Pour toute matrice $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} d & 2c \\ 2b & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les éléments propres de f.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

Solution (**Ex.77 –** *Endomorphisme sur matrices*)

1. Clair.

2. Plusieurs pistes :

• $f(\mathrm{X}) = \lambda \mathrm{X} \Longrightarrow \begin{cases} d = \lambda a \\ 2c = \lambda b \\ 2b = \lambda c \\ a = \lambda d \end{cases}$.

En supposant $a \neq 0$: $\lambda^2 = 1$ donc $\lambda = \pm 1$.

En supposant $b \neq 0$: $\lambda^2 = 4$ donc $\lambda = \pm 2$.

On trouve alors que $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

• En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{\mathrm{M}} = (\mathrm{X}^2 - 1)(\mathrm{X}^2 - 4) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+2)$, scindé à racines simples.

3. f est diagonalisable et bijectif, car $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ ou encore $f(\mathrm{X}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{X} = 0$, en dimension finie.

Exercice 78 *Diagonalisation*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que A est diagonalisable.

2. Montrer que la matrice $\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible.

3. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

Solution (**Ex.78 –** *Diagonalisation*)

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_n) = 1$ donc $3 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, avec $\dim(\mathrm{E}_3) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_3) = n - 1$.

3. Soit $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{AU} = (n+3)\mathrm{U}$, donc $n + 3 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. Comme $\dim(\mathrm{E}_3) + \dim(\mathrm{E}_{n+3}) \leq n$, $\dim(\mathrm{E}_{n+3}) = 1$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{3, n+3\}$.
$\mathrm{E}_3 = \mathrm{Vect}\,(e_i - e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1)$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne la base canonique que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$\mathrm{E}_{n+3} = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.

Exercice 79 *Diagonalisabilité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Solution (**Ex.79 –** *Diagonalisabilité*)

• Si A est diagonalisable, soit $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.

Soit $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Q est inversible d'inverse $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et

$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BP} = \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, donc B diagonalisable.

• Si B est diagonalisable, on peut former une matrice de passage Q du type $\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_1 & 0 \\ \mathrm{Q}_3 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ car les n derniers vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ sont vecteurs propres de B. Q est telle que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ} = \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ avec D diagonale.

Comme $\det(\mathrm{Q}) = \det(\mathrm{Q}_1)\det(\mathrm{I}_n) = \det(\mathrm{Q}_1)$, on a : $\det(\mathrm{Q}_1) \neq 0$ et Q_1 inversible.

On vérifie que $\mathrm{Q}\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_1^{-1} & 0 \\ -\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_1^{-1} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \mathrm{I}_{2n}$ donc $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Q}_1^{-1} & 0 \\ -\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_1^{-1} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

Le premier bloc de $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ}$ est alors $\mathrm{Q}_1^{-1}\mathrm{AQ}_1$, donc $\mathrm{Q}_1^{-1}\mathrm{AQ}_1 = \mathrm{D}$ et A est diagonalisable.

Exercice 80 *Matrice vérifiant des contraintes*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = rg(\mathrm{A}) = 1$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

Solution (**Ex.80 –** *Matrice vérifiant des contraintes*)

1. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\dim \mathrm{E}_0 = n-1$. 0 est racine d'ordre au moins $n-1$ de χ_A : $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}+a)$ (car $\deg \chi_\mathrm{A} = n$ et χ_A est unitaire).
   On sait que le coefficient de X^{n-1} est $-\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$. Donc $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\mathrm{Tr}(\mathrm{A})) = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-1)$.
2. $\dim \mathrm{E}_0 = n-1 = \omega(0)$ et $1 \leq \dim \mathrm{E}_1 \leq \omega(\mathrm{Tr}(\mathrm{A})) = 1$, donc $\dim \mathrm{E}_1 = \omega(1)$: A est diagonalisable.
3. A est semblable à $\mathrm{D} = diag(1,0,\dots,0)$, or $\mathrm{D}^2 = \mathrm{D}$, donc $\mathrm{A}^2 = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{A}$.

Exercice 81 *Trigonalisation*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.

1. Montrer que A admet une unique valeur propre α, que l'on précisera.

   Dans toute la suite, on suppose que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $\mathrm{A}^2 = 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3$. En déduire, sans calcul, que A n'est pas diagonalisable.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer le sous-espace propre de f associé à α.
4. Montrer que A est semblable à $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.81 –** *Trigonalisation*)

1. Supposons $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} \neq 0$.
   Alors $\mathrm{A}^2\mathrm{X} = \lambda^2\mathrm{X}$ et $(2\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = (2\lambda-1)\mathrm{X}$, donc $(\lambda^2-2\lambda+1)\mathrm{X} = 0$, donc $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, donc $\lambda = 1$.
2. Si A est diagonalisable, comme $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1\}$, on aurait $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{I}_3\mathrm{P} = \mathrm{I}_3$, ce qui n'est pas le cas.
3. $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,1))$.
4. On cherche trois vecteurs formant une base U, V et W tels que $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)$ et $\mathrm{AW} = \mathrm{V}+\mathrm{W}$.
   $\mathrm{AW} = \mathrm{V}+\mathrm{W} \iff (\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)\mathrm{W} = \mathrm{V}$: donc $\mathrm{V} \in \mathrm{Im}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)$, or $\mathrm{A}-\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Prenons $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour compléter la base.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(P) = -1$ et on est sûr que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

Exercice 82 *Sous-espace de matrices nilpotentes*
Soit $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$ et F un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $F \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.
2. Montrer que $\dim(F) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Solution (**Ex.82 –** *Sous-espace de matrices nilpotentes*)

1. Soit $M \in F \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. M est symétrique réelle donc diagonalisable.
Soit $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale semblable à M. Alors M^n est semblable à $D^n = diag(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n)$ donc $\lambda_1^n = 0, \dots, \lambda_n^n = 0$, donc $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$, donc $D = 0$, donc $M = PDP^{-1} = 0$. Ainsi $F \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.
2. Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ et $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, et F et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe, $\dim(F) \leq n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2}$ *i.e* $\dim(F) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 83 *Matrice inversible*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = 0$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Solution (**Ex.83 –** *Matrice inversible*)
Notons J la matrice dont tous les coefficients valent 1. Alors $A = J - I$ et $J^2 = nJ$, donc puisque I et J commutent,
$A^2 = J^2 - 2J + I = (n-2)J + I = (n-2)(A+I) + I$
$A^2 - (n-2)A = (n-1)I$, donc $A\big(A - (n-2)I\big) = (n-1)I$.

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}A - \dfrac{n-2}{n-1}I$.

Exercice 84 *Étude d'une matrice*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_{i,j} = 1$ si $i = 2$ ou $j = 2$ et 0 sinon.

1. Calculer M^2.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres.

Solution (**Ex.84 –** *Étude d'une matrice*)

1. Tous les coefficients de M^2 valent 1 sauf celui situé 2−ème ligne 2−ème colonne qui vaut n.
2. M est symétrique réelle donc diagonalisable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathrm{rg}(M) = 2$ donc 0 est valeur propre (dès que $n \geq 3$) avec $\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker} A = n-2$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
$MX = \lambda X \iff \big(x_1 + \dots + x_n = \lambda x_2 \text{ et } \forall k \neq 2, x_2 = \lambda x_k\big)$
$\iff \big(\forall k \neq 2, x_k = \dfrac{x_2}{\lambda}, \text{ et } (\dfrac{n-1}{\lambda} + 1)x_2 = \lambda x_2\big)$
$\iff \big(\forall k \neq 2, x_k = \dfrac{x_2}{\lambda}, \text{ et } (\lambda^2 - \lambda - (n-1))x_2 = 0\big)$
Comme $x_2 = 0$ entraînerait $X = 0$, ce qui est exclus,
$MX = \lambda X \iff \big(x_1 + \dots + x_n = \lambda x_2 \text{ et } \forall k \neq 2, x_2 = \lambda x_k\big)$
$\iff \big(\forall k \neq 2, x_k = \dfrac{x_2}{\lambda}, \text{ et } (\dfrac{n-1}{\lambda} + 1)x_2 = \lambda x_2\big)$
$MX = \lambda X \iff \big(\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0 \text{ et } \forall k \neq 2, x_k = \dfrac{x_2}{\lambda}\big)$
Comme : $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0 \iff \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$, on peut conclure que
   - si $n = 2$, $\mathrm{Sp}(M) = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$,
   - si $n \geq 3$, $\mathrm{Sp}(M) = \left\{\dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}, 0, \dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right\}$.

   une valeur propre

Exercice 85 *Somme le long des lignes et valeurs propres*

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}(i,j) = 1$.

Montrer que 1 est valeur propre de M.

Solution (**Ex.85** – *Somme le long des lignes et valeurs propres*)

Il suffit d'observer que $\mathrm{M}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$...

Exercice 86 *Une famille de matrice*

Soit pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$. Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{M}(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. On note $\mathrm{J} = \mathrm{M}(0,1,0)$. Calculer J^2. Exprimer $\mathrm{M}(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?
3. La matrice J est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$, ainsi que ses vecteurs propres associés.
4. La matrice $\mathrm{M}(a,b,c)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
5. Montrer que $\mathrm{M}(a,b,c)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $b = c$.
6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\mathrm{M}(a,b,c)$. À quelles conditions $f_{a,b,c}$ est un projecteur ? Donner alors son noyau et son image.

Solution (**Ex.86** – *Une famille de matrice*)

Soit pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$. Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{M}(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \mathrm{M}(a,b,c) = a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{J} + c\mathrm{J}^2$.
2. $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{J}^2)$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Comme $\mathrm{J}^3 = \mathrm{I}$, E est stable pour le produit.
3. $\chi_{\mathrm{J}}(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - j^2)$ donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{J}) = \{1, j, j^2\}$.

   J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car $card(\mathrm{Sp}(\mathrm{J})) = 3$, avec 3 sous-espaces propres de dimension 1 mais pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{J}, 1) = 1 < 3$.
4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

   Soit X un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ. Alors :

   $\mathrm{M}(a,b,c) = (a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{J}^2)\mathrm{X} = a\mathrm{X} + b\lambda\mathrm{X} + c\lambda^2\mathrm{X} = (a + b\lambda + c\lambda^2)\mathrm{X}$,

   donc X est aussi un vecteur propre de $\mathrm{M}(a,b,c)$.

   Ainsi, tout vecteur propre de J est vecteur propre de $\mathrm{M}(a,b,c)$.

   Soit $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ une base de vecteurs propres de J de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. Alors $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ une base de vecteurs propres de $\mathrm{M}(a,b,c)$, qui est par conséquent diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
5. • Si $b = c$, $\mathrm{M}(a,b,c)$ est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   • Réciproquement, supposons $\mathrm{M}(a,b,c)$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$. En particulier, ses valeurs propres sont toutes réelles.

   Or par le calcul précédent, $a + bj + cj^2$ est une valeur propre de $\mathrm{M}(a,b,c)$. Comme $j^2 = \overline{j}$,

   $\mathcal{I}m(a + bj + cj^2) = \mathcal{I}m(a + bj + c\overline{j}) = (b - c)\mathcal{I}m(j)$ avec $\mathcal{I}m(j) \neq 0$.

   Donc $a + bj + cj^2$ réelle entraîne $b = c$.

   • Bilan : M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $b = c$.
6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\mathrm{M}(a,b,c)$. À quelles conditions $f_{a,b,c}$ est un projecteur ? Donner alors son noyau et son image. •*Analyse.*

   Si $f_{a,b,c}$ est un projecteur, alors il est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de spectre inclus dans $\{0, 1\}$.

   Donc $b = c$ par ce qui précède et $\{a + 2b, a + b(j + \overline{j})\} \subset \{0, 1\}$.

   Il n'y a que 4 possibilités :

$a+2b$	$a-b$	a	b	$f_{a,b,c=b}$
0	0	0	0	$0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$
1	1	1	0	$id_{\mathbb{R}^3}$
1	0	1/3	1/3	p
0	1	2/3	$-1/3$	$id_{\mathbb{R}^3}-p$

où p est l'endomorphisme canoniquement associé à $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

•*Synthèse.*
On vérifie sans problème que les 4 endomorphismes de la dernière colonne du tableau précédent sont des projecteurs.

Exercice 87 *Étude d'un endomorphisme*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. x désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1. a) On prend $n=2$. Calculer $\det_e(e_1-x,e_2-x)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x pour que (e_1-x,e_2-x) soit une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Calculer $\det_e(e_1-x,\dots,e_n-x)$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x pour que $(e_1-x,\dots,e_n-x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

2. On choisit f telle que, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $f(e_i)=e_i-x$.
a) Calculer $\det(f)$.
b) Trouver les valeurs propres de f et les vecteurs propres f.
c) L'application f est-elle diagonalisable ?

Solution (**Ex.87 –** *Étude d'un endomorphisme*)

1. a) $\det_e(e_1-x,e_2-x)=\begin{vmatrix}1-x_1 & -x_1\\ -x_2 & 1-x_2\end{vmatrix}=1-(x_1+x_2)$.
Une condition nécessaire et suffisante est $x_1+x_2\neq 1$.

b) $\det_e(e_1-x,\dots,e_n-x)=\det(\mathrm{E}_1-\mathrm{X},\mathrm{E}_2-\mathrm{X},\dots,\mathrm{E}_n(\mathrm{X}))=\det(\mathrm{E}_1-\mathrm{X},\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_n-\mathrm{E}_{n-1})$ en soustrayant la première colonne aux suivantes.
Puis en développant suivant la première colonne :
$\det_e(e_1-x,\dots,e_n-x)=(1-x_1)+x_2\times(-1)-x_3\times 1+\dots+(-1)^n x_n\times(-1)^{n+1}$,
$\det_e(e_1-x,\dots,e_n-x)=1-(x_1+x_2+\dots+x_n)$.
Une condition nécessaire et suffisante est $x_1+x_2+\dots+x_n\neq 1$.

2. On choisit f telle que, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $f(e_i)=e_i-x$.
a) $\mathcal{M}_e(f)=(\mathrm{E}_1-\mathrm{X},\mathrm{E}_2-\mathrm{X},\dots,\mathrm{E}_n-\mathrm{X})$ donc $\det(f)=\det_e(e_1-x,\dots,e_n-x)=1-(x_1+x_2+\dots+x_n)$.
b) Trouver les valeurs propres de f et les vecteurs propres f.
• On remarque que : $\forall i\in[\![2\,;\,n]\!], f(e_1-e_i)=e_1-x-e_i+x=e_1-e_i$, donc 1 est valeur propre de $\mathrm{Vect}(e_1-e_i, i\in[\![2\,;\,n]\!])\subset \mathrm{E}_1$, donc E_1 est de dimension $n-1$ au moins.
• Cherchons l'éventuelle autre valeur propre λ de f, qui rendrait f diagonalisable. Si f diagonalisable, alors $n-\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=\mathrm{Tr}(f)=(n-1)+\lambda$ donc $\lambda=1-\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$. La seule autre valeur propre possible de f est $\lambda=1-\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$.
• De plus,
$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n x_i(e_i-x)=\sum_{i=1}^n x_ie_i-\sum_{i=1}^n x_ix=\left(1-\sum_{i=1}^n x_i\right)x.$$
Si $x_1+x_2+\dots+x_n\neq 0$, alors $1-\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\neq 1$ est une autre valeur propre de f et f est diagonalisable.
Si $x_1+x_2+\dots+x_n=0$, alors f est diagonalisable si et seulement si $\dim(\mathrm{E}_1)=n$, *i.e* f est l'identité, *i.e* $x=0$.

c) L'application f est diagonalisable si et seulement si $x=0$ ou $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\neq 0$.

Exercice 88 *Vecteur propre commun à deux endomorphismes*
Soit E un $\mathbb{C}$−espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe a, non nul, et b dans $\mathbb{C}$ tels que $f\circ g-g\circ f=af+bg$. On pose, pour tout $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\varphi_g(u)=u\circ g-g\circ u$.
Dans les quatre premières questions, on suppose que $b=0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est stable par g.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $\varphi_g(f^n) = anf^n$.

3. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = 0$.

4. En considérant $\tilde{g}$, endomorphisme induit par g sur $\mathrm{Ker} f$, montrer que f et g admettent un vecteur propre commun.

5. On passe à présent au cas général. Montrer que f et g admettent un vecteur propre commun. *Indication :* On pourra considérer $h = af + bg$ et $\varphi_g(h)$.

Solution (**Ex.88 –** *Vecteur propre commun à deux endomorphismes*)

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe a, non nul, et b dans $\mathbb{C}$ tels que $fg - gf = af + bg$. On pose, pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\varphi_g(u) = ug - gu$.

Dans les quatre premières question, on suppose que $b = 0$.

1. Pour $x \in \mathrm{Ker} f$, $f \circ g(x) = g \circ f(x) + af(x) = 0$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker} f$.

2. • La propriété est vraie pour $n = 0$ car $\varphi_g(id) = 0$.
• Supposons-la vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.
$\varphi_g(f^{n+1}) = f^{n+1}g - gf^{n+1} = f^{n+1}g - fgf^n + af^{n+1}$ car $gf = fg - af$,
$\varphi_g(f^{n+1}) = f\varphi_g(f^n) + af^{n+1} = anf^{n+1} + af^{n+1} = a(n+1)f^{n+1}$.
Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
• Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_g(f^n) = anf^n$.

3. On vérifie sans peine que φ_g est un endomorphisme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, *i.e* $\varphi_g \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(\mathrm{E})\big)$. Or $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est de dimension finie, donc φ_g n'a qu'un nombre fini de valeurs propres.
Si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n \neq 0$, alors d'après ce qui précède, φ_g possède une infinité de valeurs propres distinctes, les $(an)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ceci est impossible donc il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = 0$.
Autrement dit, f est nilpotent.

4. Observons que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ car sinon f serait bijectif (car E est dimension finie), donc non nilpotent ($\det(f) \neq 0 \Longrightarrow \det(f^n) \neq 0$).
Soit $\tilde{g} : \mathrm{Ker} f \to \mathrm{Ker} f, x \mapsto g(x)$. $\tilde{g}$ possède au moins une valeur propre car le corps est $\mathbb{C}$, donc au moins un vecteur propre y. y est du coup vecteur propre de g, mais aussi de f car : $y \in \mathrm{Ker} f \Longrightarrow f(y) = 0 \times y$.

5. Soit $h = af + bg$.
Alors $\varphi_g(h) = a\varphi_g(f) + b\varphi_g(g) = a(af + bg) = ah$.
En appliquant ce qui précède à h, g et h ont un vecteur propre commun y, associé respectivement aux valeurs propres λ et 0.
Alors $f(y) = \dfrac{1}{a}(h(y) - bg(y)) = \dfrac{1}{a}(0 - b\lambda y) = \dfrac{-b\lambda}{a} y$: y est aussi un vecteur propre de f.

Exercice 89 *Endomorphismes dans un espace de polynômes*

Soit $n \geq 1$. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Est-il injectif ?

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $g(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}^{n-k}$. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et que $h = g \circ f \circ g^{-1}$ n'est pas diagonalisable.

4. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], f(\mathrm{P}) + h(\mathrm{P}) = a\mathrm{XP} + b(\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'$.

Solution (**Ex.89 –** *Endomorphismes dans un espace de polynômes*)

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$ sans souci.
$\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] \neq \{0\}$ donc f n'est pas injectif.

2. $f(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{P}' = \lambda\mathrm{P}$ or si $\mathrm{P} \neq 0$, $\deg \mathrm{P}' < \deg \mathrm{P}$ donc $f(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P} \Longrightarrow (\lambda = 0$ ou $\mathrm{P} = 0)$.
La seule valeur propre de f est 0 avec $\mathrm{SEP}(f, 0) = \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$. Comme $\dim \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = 1 < \dim < \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n + 1$, f n'est pas diagonalisable.

3. • $\forall k \in [\![0\,;\, n]\!], g \circ g(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}^k$ donc puisque $(\mathrm{X}^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $g \circ g = id_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$ et g est un automorphisme involutif *i.e* $g^{-1} = g$, autrement dit une symétrie.
• En notant M, N et Q les matrices respectives de f, h et g relativement à la base canonique, on a : $\mathrm{N} = \mathrm{QMQ}^{-1}$. Donc N et M sont semblables, or M n'est pas diagonalisable, donc N n'est pas diagonalisable.

4. $\forall k \in [\![0\,;\, n]\!], f(\mathrm{X}^k) + h(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^{k-1} + (n-k)\mathrm{X}^{k+1} = n\mathrm{X}^{k+1} - k(\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{X}^{k-1} = a\mathrm{X} \times \mathrm{X}^k + b(\mathrm{X}^2 - 1)k\mathrm{X}^{k-1}$ avec $a = n$ et $b = -1$.
Par linéarité et comme $(\mathrm{X}^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], f(\mathrm{P}) + h(\mathrm{P}) = n\mathrm{XP} - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'$.

Exercice 90 *Diagonalisation et symétries*

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n et $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ une symétrie autre que $\pm id_{\mathrm{E}}$. On considère $\varphi : f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \frac{1}{2}\big(f \circ s + s \circ f\big) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Calculer $\varphi(id_{\mathrm{E}})$ et $\varphi(s)$.
2. On note E_1 et E_{-1} les sous-espaces propres à s. Donner une relation entre E_1, E_{-1} et E.
3. Montrer que φ est un endomorphisme.
4. Montrer que f est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ si, et seulement si, $f(\mathrm{E}_1) \subset \mathrm{E}_{-1}$ et $f(\mathrm{E}_{-1}) \subset \mathrm{E}_1$.
5. Soit λ une valeur propre de φ et f un vecteur propre associé. Soit $x \in \mathrm{E}_1$. Donner une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$.
6. Même question avec $x \in \mathrm{E}_{-1}$.

Solution (**Ex.90 –** *Diagonalisation et symétries*)

1. $\varphi(id_{\mathrm{E}}) = s$ et $\varphi(s) = id_{\mathrm{E}}$.
2. $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_{-1}$.
3. On vérifie sans peine que φ est un endomorphisme.
4. • Supposons $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $f \circ s = -s \circ f$.
   Soit $x \in \mathrm{E}_1$. $f(x) = f(s(x)) = -s(f(x))$ donc $f(x) \in \mathrm{E}_{-1}$: $f(\mathrm{E}_1) \subset \mathrm{E}_{-1}$.
   Soit $x \in \mathrm{E}_{-1}$. $f(x) = f(-s(x)) = s(f(x))$ donc $f(x) \in \mathrm{E}_1$: $f(\mathrm{E}_{-1}) \subset \mathrm{E}_1$.
   • Supposons $f(\mathrm{E}_1) \subset \mathrm{E}_{-1}$ et $f(\mathrm{E}_{-1}) \subset \mathrm{E}_1$.
   Soit $x \in \mathrm{E}$ quelconque : $\exists (x_1, x_{-1}) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_{-1}, x = x_1 + x_{-1}$.
   $s \circ f(x) = s \circ f(x_1) + s \circ f(x_{-1}) = -f(x_1) + f(x_{-1}) = -f \circ s(x_1) - f \circ s(x_{-1}) = -f \circ s(x)$.
   Ainsi, $s \circ f = -f \circ s$ et $\varphi(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$: $f \in \mathrm{Ker}\varphi$.
5. Avec $x \in \mathrm{E}_1$, d'une part : $\varphi(f)(x) = \lambda f(x)$,
   d'autre part : $\varphi(f)(x) = \frac{1}{2}(f \circ s(x) + s \circ f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + s(f(x)))$.
   Donc $s(f(x)) = (2\lambda - 1)f(x)$.
6. Avec $x \in \mathrm{E}_{-1}$, d'une part : $\varphi(f)(x) = \lambda f(x)$,
   d'autre part : $\varphi(f)(x) = \frac{1}{2}(f \circ s(x) + s \circ f(x)) = \frac{1}{2}(-f(x) + s(f(x)))$.
   Donc $s(f(x)) = (2\lambda + 1)f(x)$.

Exercice 91 *Polynôme annulateur et puissances*

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Vérifier que $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^2(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par χ_{A}.
4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n, I_3, A et A^2.

Solution (**Ex.91 –** *Polynôme annulateur et puissances*)

1. $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - 5 \cdot \mathrm{X}^2 + 8 \cdot \mathrm{X} - 4 = (\mathrm{X} - 2)^2 \cdot (\mathrm{X} - 1)$.
2. $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^2(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = 0$.
3. Soit $\mathrm{R} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ le reste cherché.
   $\mathrm{X}^n = \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{X}) + a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ évaluée en $\mathrm{X} = 1$ et en $\mathrm{X} = 2$ donne :
   $a + b + c = 1$ et $4a + 2b + c = 2^n$
   En dérivant et en évaluant en à nouveau en 2 :
   $4a + b = 2^{n-1}n$.
   On résout et on obtient : $a = 2^{n-1}n - 2^n + 1$, $b = -3 \times 2^{n-1}n + 2^{n+2} - 4$ et $c = 2^n n - 3 \times 2^n + 4$.
4. Comme $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0$, on a : $\mathrm{A}^n = a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{A} + c\mathrm{I}_3$.

2.5 Espaces préhilbertiens et euclidiens

Exercice 92 *Projeté*

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et $2\pi-$périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\big(f \mid g\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Solution (**Ex.92** – *Projeté*)

1. Voir cours.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$. En notant $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}$, $u = h - \dfrac{1}{2}g$ avec $g \in \mathrm{F}$.
   $\big(f \mid h\big) = 0$ et $\big(g \mid h\big) = 0$ donc $h \in \mathrm{F}\perp$.
   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $-\dfrac{1}{2}g$.

Exercice 93 *Cauchy-Schwarz*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h continue et positive sur $[a\,;\,b]$.
   En utilisant $\mathrm{H} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$, montrer que :
   $$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a\,;\,b], h(t) = 0.$$
2. Soit E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $[a\,;\,b]$. Montrer que
   $$(.\mid.) : (f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
   définit un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}t$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution (**Ex.93** – *Cauchy-Schwarz*)

1. H est $\mathcal{C}^1$, de dérivée $h \geq 0$, donc H est croissante, nulle et a et en b, donc nulle sur $[a\,;\,b]$.
2. Classique.
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^1 t\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

Exercice 94 *Distance à un sous-espace*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que : $\langle .,. \rangle : (\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{B})$ défini un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
5. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Solution (**Ex.94** – *Distance à un sous-espace*)

1. À savoir faire.
2. $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I},\mathrm{K})$ où $\mathrm{I} = \mathrm{I}_2$, $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $\mathrm{M} \in \mathcal{F}^\perp \Longleftrightarrow \big(\langle \mathrm{M},\mathrm{I}\rangle = 0 \text{ et } \langle \mathrm{M},\mathrm{K}\rangle = 0\big) \Longleftrightarrow \big(d = -a \text{ et } c = b\big)$.
   Donc $\mathcal{F}^\perp = \mathrm{Vect}(\mathrm{L},\mathrm{N})$ où $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\mathrm{J} = \mathrm{I} + \mathrm{N}$ avec $\mathrm{I} \in \mathcal{F}$ et $\mathrm{N} \in \mathcal{F}^\perp$, donc $p_{\mathcal{F}^\perp}(\mathrm{J}) = \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. $d(\mathrm{J},\mathcal{F}) = ||\mathrm{J} - p_{\mathcal{F}}(\mathrm{J})|| = ||\mathrm{J} - \mathrm{I}|| = ||\mathrm{N}|| = \sqrt{2}$.

Exercice 95 *Supplémentaires*

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que :
$\forall x \in \mathrm{E},\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Soit $y \in \mathrm{E}$ et $x = u(y) - y$. On suppose que $x \in \mathrm{Ker}\,(u - id_\mathrm{E})$.
   Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(y)$ en fonction de x, y et k.
2. En déduire que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(u - id_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Im}\,(u - id_\mathrm{E})$.

Solution (**Ex.95** – *Supplémentaires*)

1. $u(y) = x + y$, $u^2(y) = u(x) + u(y) = x + x + y = 2x + y$, $u^3(y) = 2u(x) + u(y) = 3x + y$, et par itération immédiate, $u^k(y) = kx + y$ ... y compris si $k = 0$.
2. Par le théorème du rang, il suffit de vérifier : $\mathrm{Ker}\,(u - id_\mathrm{E}) \cap \mathrm{Im}\,(u - id_\mathrm{E}) = \{0\}$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \cap \operatorname{Im}(u - id_{\mathrm{E}})$, et soit y tel que $x = (u - id_{\mathrm{E}})(y) = u(y) - y$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, x = \dfrac{1}{k}(u^k(y) - y)$, donc $||x|| \leq \dfrac{1}{k}\left(\left|\left|u^k(y)\right|\right| + ||(||\,y)\right) \leq \dfrac{2}{k}\,||y||$ par l'hypothèse sur u.

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq ||x|| \leq \dfrac{2}{k}\,||y||$. Par encadrement, en passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, $\lim\limits_{k\to+\infty} ||x|| = 0$, donc $||x|| = 0$ (indépendante de k), donc $x = 0$. Gagné.

Exercice 96 *Une inégalité*

Soit S une matrice symétrique réelle.

Montrer que $\dfrac{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})^2}{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2)} \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

Exercice 97 *Équation matricielle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

1. Montrer que M est inversible et symétrique.
2. Déterminer M.

Exercice 98 *Générer des matrices positives*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$.

1. Montrer que S est symétrique et positive.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur A S est-elle définie ?
3. $(.\mid.)$ défini sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$\left(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\right) = (\mathrm{AX})^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}$$

est-il un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 99 *Un endomorphisme en dimension 3*

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner un maximum de propriétés de f...
2. Que peut-on dire de $\dfrac{1}{2}(id_{\mathrm{E}} + f)$ où id_{E} désigne l'endomorphisme identité de E ?

Exercice 100 *Endomorphisme symétrique*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 fg$.

On définit T par : $\forall f \in \mathrm{E}, \mathrm{T}(f) = u' \cdot f' + u \cdot f''$, où u est un élément donné de E, tel que : $u(0) = u(1) = 0$.
Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E.

Solution (**Ex.100 –** *Endomorphisme symétrique*)
• Endomorphisme par la linéarité de la dérivation.
• $\left(\mathrm{T}(f) \mid g\right) = \displaystyle\int_0^1 (u'f' + uf'')g = \int_0^1 (uf')'g \overset{\mathrm{IPP}}{=} 0 - \int_0^1 uf'g'$ (expression symétrique et f et g).
De même, $\left(f \mid \mathrm{T}(g)\right) = \displaystyle\int_0^1 f(u'g' + ug'') = \int_0^1 f(ug')' \overset{\mathrm{IPP}}{=} 0 - \int_0^1 uf'g'$.
Donc $\left(\mathrm{T}(f) \mid g\right) = \left(f \mid \mathrm{T}(g)\right)$: T est symétrique.

Exercice 101 *Diagonalisation et transposition*

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ disposant de n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer que M^{T} est diagonalisable, avec les mêmes valeurs propres que M.
2. Pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, soit $\mathrm{V}_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \lambda_k\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{W}_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} - \lambda_k\mathrm{I}_n)$ des vecteurs non nuls. Montrer que pour $i \neq j$, $\mathrm{V}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{W}_j = 0$.
3. En déduire que, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{V}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{W}_i \neq 0$.
4. Pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, soit $\mathrm{B}_k = \dfrac{1}{\mathrm{V}_k^{\mathrm{T}}\mathrm{W}_k}\mathrm{W}_k\mathrm{V}_k^{\mathrm{T}}$. Calculer $\mathrm{B}_k\mathrm{V}_i$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{B}_k$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$.

Solution (**Ex.101** – *Diagonalisation et transposition*)

1. $\chi_{M^T}(X) = \det(XI_n - M^T) = \det\big({}^t(XI_n - M)\big) = \det(XI_n - M) = \chi_M$ donc M^T et M ont exactement les mêmes valeurs propres. Comme elles sont d'ordre n avec n valeurs propres distinctes, elles sont diagonalisables.
2. Pour $i \neq j$, calculons de deux façons $V_i^T M^T W_j$:
$V_i^T M^T W_j = V_i^T(\lambda_j W_j) = \lambda_j V_i^T W_j$,
$V_i^T M^T W_j = ({}^T M V_i) W_j) = \lambda_i V_i^T W_j$,
donc $(\lambda_i - \lambda_j) V_i^T W_j = 0$, or $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, donc $V_i^T W_j = 0$.
3. Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. Supposons : $V_i^T W_i = 0$. Notons $(.\mid.) : (X, Y) \mapsto X^T Y$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors : $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!], (V_i \mid W_j) = 0$ *i.e* $V_i \perp W_j$.
Comme $(W_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, cela entraîne $V_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^\perp$, donc $V_i = 0$. Ceci est impossible, donc $V_i^T W_j \neq 0$. Alors
4. Pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, soit $B_k = \dfrac{1}{V_k^T W_k} W_k V_k^T$. Calculer $B_k V_i$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$.
   - Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. Décomposons V_i suivant la base $(W_j)_{1\leq j\leq n}$: $V_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j W_j$.
   $B_k V_i = \dfrac{1}{V_k^T W_k} W_k V_k^T \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j W_j = \dfrac{1}{V_k^T W_k} W_k x_k V_k^T W_k = x_k W_k$.
   - $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k\right) V_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k W_k = V_i$, et comme $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k = I_n$.
   - $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k\right) V_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k M^T W_k = M^T \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k W_k = M^T V_i$, et comme $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k = M^T$.

Exercice 102 *Minimisation*

Pour P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ et que $(1, X-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Trouver le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $(a, b) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt$.

Solution (**Ex.102** – *Minimisation*)

L'existence de toutes les intégrales est garantie par $e^{-t}P(t)Q(t) = o\left(1/t^2\right)$ en $+\infty$, ceci pour tous polynômes P et Q.

On gagne du temps en sachant/montrant que : $\forall k \in \mathbb{N}, I_k \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$

1. • Bilinéarité, symétrie et positivité sans souci. Pour la définition, être rigoureux : $t \mapsto e^{-t}P^2(t)$ continue positive d'intégrale nulle sur $]\,0\,;\,+\infty[$ entraîne $t \mapsto e^{-t}P^2(t)$ nulle sur $]\,0\,;\,+\infty[$, donc P a une infinité de racines, donc est le polynôme nul.
• $\langle 1, 1\rangle = I_0 = 1$, $\langle 1, X-1\rangle = \langle 1, X\rangle - \langle 1, 1\rangle = I_1 - I_0 = 1 - 1 = 0$ et
$\langle X-1, X-1\rangle = \langle X, X\rangle - 2\langle 1, X\rangle + \langle 1, 1\rangle = I_2 - 2I_1 + I_0 = 2 - 2 + 1 = 1$.
$(1, X-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt = \min_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \left|\left|X^2 - P\right|\right|^2$ existe et est atteint si et seulement si $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$ où $p_{\mathbb{R}_1[X]}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.
Comme $(1, X-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$,
$p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \left\langle X^2, 1\right\rangle 1 + \left\langle X^2, X-1\right\rangle (X-1) = I_2 + \big(I_3 - I_2\big)(X-1) = 4X - 2$
$\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt = \left|\left|X^2 - 4X + 2\right|\right|^2 = \left|\left|X^2\right|\right|^2 + 16\,||X||^2 + 4\,||1||^2 - 8\left\langle X^2, X\right\rangle + 4\left\langle X^2, 1\right\rangle - 16\left\langle X, 1\right\rangle = 24 + 32 + 4 - 48 + 8 - 16 = 4$.

3 Probabilités

3.1 Probabilités discrètes

Exercice 103 *Majoration d'une probabilité d'intersection*

Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ des événements mutuellement indépendants. Montrez que la probabilité qu'aucun des A_k ne se réalise est inférieure à $\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)\right)$.

Solution (**Ex.103 –** *Majoration d'une probabilité d'intersection*)

On cherche la probabilité de $B = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$.

Par indépendance, $\mathbb{P}(B) = \prod_{k=1}^{n}\big(1-\mathbb{P}(A_k)\big)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$, donc $1-\mathbb{P}(\overline{A_k}) \leq e^{\mathbb{P}(\overline{A_k})}$, d'où $\mathbb{P}(B) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)\right)$

Exercice 104 *Jeu équitable ?*

Deux personnes A et B jouent : A lance deux fois une pièce équilibrée, et B ne lance qu'une fois une pièce qui amène pile avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de piles. Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne se termine jamais ?
4. Existe-il un p tel que le jeu est équitable ?

Solution (**Ex.104 –** *Jeu équitable ?*)

1. Notons, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : « il y a égalité au $k-$ième tour ».
Il y a égalité au premier tour lorsque :
A obtient deux fois face et B obtient face, ou A obtient une fois pile et une fois face et B obtient pile.
Par incompatibilité des événements, puis par indépendance des lancers, on obtient :
$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-p) + (\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2})p = \frac{1+p}{4}$.
2. Notons, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, F_k l'événement : « A obtient plus de piles que B au $k-$ième tour », et A_k l'événement : « A gagne au $k-$ième tour ».
   - A gagne au premier tour lorsque :
   A obtient deux fois pile,
   ou A obtient une fois pile et une fois face et B obtient face.
   Ainsi : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + (2\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-p)) = \frac{3-2p}{4}$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $A_k = E_1 \cap \Delta\Delta\Delta \cap E_{k-1} \cap F_k$.
   Ainsi par indépendance des résultats à chaque lancer :
   $\mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1+p}{4}\right)^{k-1} \times \frac{3-2p}{4}$.
   - L'événement G_A : « A gagne » s'écrit : $G_A = d = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$.
   Par incompatibilité des événements A_k :
   $P(G_A) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1+p}{4}\right)^{k-1}\frac{3-2p}{4} = \frac{3-2p}{3-p}$.
3. - L'événement F : « le jeu ne se termine pas » s'écrit : $F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$.
   Les événements E_k forment une suite décroissante d'événements, donc par continuité monotone :
   $\mathbb{P}(F) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(E_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+p}{4}\right)^n = 0$.
   On en déduit que le jeu se termine presque sûrement.
4. Le jeu est équitable si et seulement $\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{2}$.
Et : $\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{2} \iff 2(3-2p) = 3-p \iff p = 1$.
Dans ce cas, le joueur B fait systématiquement pile (sa pièce est truquée : elle possède deux piles et pas de face). C'est la seule possibilité pour que le jeu soit équitable...

Exercice 105 *Séquence pile-pile et séquence pile-face*

On dispose d'une pièce, faisant pile avec la probabilité $p \in]0\,;\,1[$. On effectue une séquence infinie de lancers.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs sans avoir eu auparavant la séquence pile-face ?

Indication : on pourra lister précisément tous les tirages possibles amenant le résultat voulu ou s'appuyer sur le système complet $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$...

Solution (**Ex.105 –** *Séquence pile-pile et séquence pile-face*)
Soit $q = 1 - p$. Les seuls tirages favorables sont :
P_1P_2 de probabilité p^2,
$F_1P_2P_3$ de probabilité qp^2,
$F_1F_2P_3P_4$ de probabilité q^2p^2,
$\vdots$
Notons E_n l'événement $F_1 \dots F_nP_{n+1}P_{n+2}$ de probabilité q^np^2.
L'événement PP sort avant PF est : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Par incompatibilité 2 à 2, sa probabilité est : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{p^2}{1-q} = p.$
Beaucoup plus élégant : à méditer...
Soit A l'événement « PP sort avant PF ». $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ étant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(A) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2)\mathbb{P}_{P_1\cap P_2}(A) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(A) = q\mathbb{P}(A) + p^2 \times 1 + pq \times 0 = (1-p)\mathbb{P}(A) + p^2$, et il n'y a plus qu'à isoler $\mathbb{P}(A)$:
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{p^2}{p} = p.$

$\boxed{\textbf{Exercice 106}}$ *Sommes paires*
On lance n dés ($n \in \mathbb{N}^*$). Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit paire ?

Solution (**Ex.106 –** *Sommes paires*)
On note P_k l'événement « la somme des k premiers dés est paire ».
On a : $\mathbb{P}(P_1) = 1/2$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathbb{P}(P_k) = \dfrac{1}{2}$.
$(P_k, \overline{P_k})$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(P_{k+1}) = \mathbb{P}(P_k)\mathbb{P}_{P_k}(P_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{P_k})\mathbb{P}_{\overline{P_k}}(P_{k+1}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.$
Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(P_k) = \dfrac{1}{2}.$

$\boxed{\textbf{Exercice 107}}$ *Somme de trois dés*
On jette trois dés cubiques non pipés respectivement rouge, vert et bleu.

1. Proposer un univers Ω permettant de modéliser cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins un as. On exprimera le résultat sous la forme d'une fraction.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre.
4. Soit E et F deux ensembles finis tels qu'il existe une bijection de E sur F. Que peut-on dire de leurs cardinaux ?
5. Calculer la probabilité que la somme des points soit paire.
   Indications : considérer l'application $f : \Omega \to \Omega, \omega = (i, j, k) \mapsto (7-i, 7-j, 7-k)$.
6. Montrer que les deux événements considérés aux questions 3) et 5) sont indépendants.

Solution (**Ex.107 –** *Somme de trois dés*)

1. $\Omega = \{(r, v, b)/(r, v, b) \in [\![1\,;\ 6]\!]\} = [\![1\,;\ 6]\!]^3$ convient.
2. Soit A l'événement “avoir au moins un as”. $\overline{A} = [\![2\,;\ 6]\!]^3$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$.
   Donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{91}{216}$.
3. Soit B l'événement “obtenir au moins deux faces portant le même chiffre”. $\overline{B} = \{(r, v, b)/r \neq v, r \neq b, v \neq b\}$ et $\mathrm{Card}\,(\overline{B}) = 6 \times 5 \times 4$.
   D'où : $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \dfrac{20}{6^2} = \dfrac{5}{9}$, et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{4}{9}$.
4. $\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(F)$. Pourquoi ? Comme f est injective, $\mathrm{Card}\,(E) \leq \mathrm{Card}\,(F)$ (sinon deux éléments de E au moins auront la même image) et comme f est surjective, $\mathrm{Card}\,(E) \geq \mathrm{Card}\,(F)$...
5. On chercher la probabilité de $\Omega_P = \{(r, v, b) \in \Omega/r + v + b \text{ est paire}\}$.
   On note $\Omega_I = \overline{\Omega_P} = \{(r, v, b) \in \Omega/r + v + b \text{ est impaire}\}$.
   L'application $f : \Omega \to \Omega$ est une bijection de Ω sur lui-même car $f \circ f(i, j, k) = (i, j, k)$, donc $f \circ f = id_\Omega$... f est sa propre réciproque (involution).
   De plus : $f(\Omega_P) = \Omega_I$ car $(7 - i) + (7_j) + (7 - k) = 21 - (i + j + k)$ est impaire lorsque $i + j + k$ est paire, est paire lorsque $i + j + k$ est impaire.
   Du coup, $\mathrm{Card}\,(\Omega_P) = \mathrm{Card}\,(\Omega_I)$, donc $\mathbb{P}(\Omega_P) = \mathbb{P}(\Omega_I) = 1 - \mathbb{P}(\Omega_P)$, d'où $\mathbb{P}(\Omega_P) = \dfrac{1}{2}$.

6. On peut remarquer que $f(B\cap\Omega_P)=B\cap\Omega_I$ donc $\mathrm{Card}\,(B\cap\Omega_P)=\dfrac{\mathrm{Card}\,(B)}{2}$.

D'où : $\mathbb{P}(B\cap\Omega_P)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\Omega_P)\mathbb{P}(B)$, B et Ω_P sont indépendants.

Exercice 108 *Jeu équitable*

Deux archers se disputent un match selon les règles suivantes :
- A et B tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche.
- A tire en premier (il tirera donc aux rangs impairs).
- Les réussites successives aux tirs sont supposées mutuellement indépendantes.
- La probabilité que A touche la cible, à chaque tir, est p_1.
- De même, la probabilité que l'archer B touche la cible est p_2.

On note $q_i=1-p_i$ pour $i=1$ et $i=2$.

1. Calculer la probabilité que A l'emporte au rang $2n+1$.

2. Calculer la probabilité que B l'emporte au rang $2n+2$.

3. On note G_1 (resp. G_2) l'événement « A (resp. B) l'emporte ».
Calculer $\mathbb{P}(G_1)$ et $\mathbb{P}(G_2)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(G_1)+\mathbb{P}(G_2)$ et en déduire la probabilité que le match dure indéfiniment.

5. a) On dira que le match est équilibré lorsque $\mathbb{P}(G_1)=\mathbb{P}(G_2)$.
Montrer que ceci est réalisé si, et seulement si, $p_2=\dfrac{p_1}{1-p_1}$.

b) Que peut-on dire si $p_1=1/2$?

c) Et si $p_1>1/2$?

Solution (**Ex.108** – *Jeu équitable*)

1. En notant A_n l'événement dont on cherche la probabilité, $P(A_n)=p_1(q_1q_2)^n$ car on doit avoir indépendamment n échecs et un succès de A, et n échecs de B.

2. $\mathbb{P}(B_n)=p_2q_2^nq_1^{n+1}$ par un raisonnement analogue.

3. $\mathbb{P}(G_1)=\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\overset{\text{incomp.}}{=}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\dfrac{p_1}{1-q_1q_2}$ car somme géométrique de raison $q_1q_2\in\,]\,0\,;\,1[$.
Et de façon analogue : $\mathbb{P}(G_2)=\dfrac{q_1p_2}{1-q_1q_2}$.

4. Comme $p_1+q_1p_2=(1-q_1)+q_1(1-q_2)=1-q_1q_2$, $\mathbb{P}(G_1)+\mathbb{P}(G_2)=1$: la probabilité que la match dure indéfiniment est nulle.

5. a) $\mathbb{P}(G_1)=\mathbb{P}(G_2)\iff p_1=q_1p_2\iff p_2=\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{p_1}{1-p_1}$

6. a) Si $p_1=1/2$, alors le jeu équitable si, et seulement si, $p_2=1$... logique non ?

b) Si le jeu est équitable, alors : $p_1>1/2\implies 1-p_1<1/2\implies p_2>1$, impossible. Le jeu ne peut pas être équitable si $p_1>1/2$.

3.2 Variables aléatoires réelles

Exercice 109 *Exploitation de la fonction génératrice*

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{P}(X=k)=\frac{k-1}{2^k}.$$

1. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice $\mathcal{G}_X$ de X et expliciter $\mathcal{G}_X(t)$ pour tout t de $]-R\,;\,R[$.

3. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance de X.

Exercice 110 *Matrice aléatoire*

Soit $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, $X_{2,1}$ et $X_{2,2}$ quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$.
On suppose que ces quatre variables suivent la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ et on pose, pour tout $\omega\in\Omega$,

$$M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}X_{1,1}(\omega) & X_{1,2}(\omega)\\ X_{2,1}(\omega) & X_{2,2}(\omega)\end{pmatrix}.$$

Ainsi, M est une variable aléatoire matricielle.
On pose enfin $D=\det(M)$ et $T=\mathrm{Tr}(M)$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$.

2. Déterminer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

4. Déterminer la probabilité que M soit orthogonale.

Exercice 111 *Produit de deux V.A.R.*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X, et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2\}$.
Soit $Z = XY$.

1. a) Donner l'espérance et la variance de Z.
b) Donner la loi de Z.

2. Calculer la probabilité que Z soit paire.

Solution (**Ex.111 –** *Produit de deux V.A.R.*)

1. a) Par indépendance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda\dfrac{3}{2} = \dfrac{3\lambda}{2}$.

De même : $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2)\mathbb{E}(Y^2) = (\lambda + \lambda^2)(\dfrac{5}{2}) = \dfrac{5\lambda + 5\lambda^2}{2}$,

$\mathbb{V}(Z) = \dfrac{10\lambda + 10\lambda^2 - 9\lambda^2}{4} = \dfrac{5}{2}\lambda + \dfrac{1}{4}\lambda^2$

b) • Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.
• Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $Y = 2$ entraîne Z pair :
$[Z = 2k + 1] = [X = 2k + 1] \cap [Y = 1]$
Par indépendance :
$\mathbb{P}(Z = 2k + 1) = \mathbb{P}(X = 2k + 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2k+1}}{2(2k + 1)!}$.
$[Z = 2k] = \big([X = 2k] \cap [Y = 1]\big) \cup \big([X = k] \cap [Y = 2]\big)$
La réunion étant disjointe :
$\mathbb{P}(Z = 2k) = \mathbb{P}\big([X = 2k] \cap [Y = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 2]\big)$
Par indépendance :
$\mathbb{P}(Z = 2k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2k}}{2(2k)!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k}}{2k!}$.

2. $\mathbb{P}(Z \text{ impaire}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z = 2k + 1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\mathrm{sh}(\lambda) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}$ et $\mathbb{P}(Z \text{ paire}) = \dfrac{3 + \mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}$

Exercice 112 *Loi géométrique et multiples*

Soit $a \geq 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0\,;\ 1\right[$.

1. Pour tout $d \geq 2$, on note A_d l'événement « X est un multiple de d ». Calculer $\mathbb{P}(A_d)$.

2. Les événements A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Solution (**Ex.112 –** *Loi géométrique et multiples*)

1. Soit $q = 1 - p$.
$[A_d] = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*}[X = kd]$. Cette réunion étant une réunion d'événements deux à deux disjointes, par additivité :
$\mathbb{P}(A_d) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = kd) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{kd-1}p = pq^{d-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(q^d)^k = \dfrac{pq^{d-1}}{1 - q^d}$.

2. Notons que : $A_2 \cap A_3 = A_6$.
$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \iff \dfrac{pq^5}{(1 - q^6)} = \dfrac{p^2q^3}{(1 - q^2)(1 - q^3)} \iff \dfrac{q^2}{(1 + q^3)} = \dfrac{p}{(1 - q^2)}$
$\iff \dfrac{q^2}{(1 + q^3)} = \dfrac{1}{(1 + q)} \iff q^2(1 + q) = 1 + q^3 = \!\!\iff q^2 = 1 \iff q = 1 \iff$ $p = 0$: impossible.
Les événements A_2 et A_3 ne sont pas indépendants.

Exercice 113 *Matrice aléatoirement diagonalisable*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et $q > 0$.

Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Solution (**Ex.113 –** *Matrice aléatoirement diagonalisable*)

Comme $\mathrm{Sp}(A) = X, Y$, A est diagonalisable si $X \neq Y$.
Si $X = Y$, alors A n'a qu'une valeur propre mais n'est pas égale à XI_2, donc A n'est pas diagonalisable.
La probabilité de l'événement D : « A n'est pas diagonalisable » est donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{D})=\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=k)\overset{\text{indép.}}{=}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{D})=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p(1-q)^{k-1}q=pq\sum_{k=0}^{+\infty}\big((1-p)(1-q)\big)^k=\frac{pq}{1-(1-p)(1-q)}$$

$\mathbb{P}(\mathrm{D})=\dfrac{pq}{p+q-pq}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{A}\ \textit{diagonalisable})=\mathbb{P}(\overline{\mathrm{D}})=1-\mathbb{P}(\mathrm{D})$.

Exercice 114 *Couple de VAR et parité*

Soit Y et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad p_{i,j}=\mathbb{P}\big(\mathrm{X}=i,\ \mathrm{Y}=j\big)=\frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}j!}.$$

1. Justifier que la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. a) Montrer que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1 et X + 1 suit la loi géométrique de paramètre 1/2.
   b) En déduire que l'espérance et la variance de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. a) Exprimer l'événement $[\mathrm{X}=\mathrm{Y}]$ à l'aide des événements $(\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Y}=k)$.
   b) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$.
5. On s'intéresse à l'événement A : ≪ Y est un entier pair ≫.
   a) Identifier la loi de la variable $\mathrm{Z}=\dfrac{1}{2}(1+(-1)^{\mathrm{Y}})$.
   b) Exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ en fonction de $\mathcal{G}_{\mathrm{Y}}(-1)$ où $\mathcal{G}_{\mathrm{Y}}$ désigne la fonction génératrice de Y.
   c) Quel est le plus probable : A ou son contraire ?

Solution (**Ex.114 –** *Couple de VAR et parité*)

1. a) Soit $j\in\mathbb{N}$.
   La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big([\mathrm{X}=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ donne :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=j)=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)=\frac{1}{\mathrm{e}2j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{\mathrm{e}j!}=\mathrm{e}^{-1}\frac{1^j}{j!}.$$
   Soit $i\in\mathbb{N}$.
   La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big([\mathrm{Y}=j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ donne :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)=\frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{1}{2^{i+1}},$$
   Ainsi : $(\mathrm{X}+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(\mathrm{X}+1=i)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=i-1)=\dfrac{1}{2^i}=\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{i-1}\times\dfrac{1}{2}$.
   $$\mathrm{X}+1\hookrightarrow\mathcal{G}(1/2)\text{ et }\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathcal{P}(1).$$
   b) Par le cours : $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=1$, et par linéarité : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}+1-1)=\mathrm{E}(\mathrm{X}+1)-1=2-1=1$.
   De plus : $\mathrm{V}(\mathrm{Y})=1$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{V}(\mathrm{X}+1)=\dfrac{1-1/2}{(1/2)^2}=2$.
   $$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{Y})=1,\ \mathrm{V}(\mathrm{X})=2\text{ et }\mathrm{V}(\mathrm{Y})=1.$$
2. Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^*,\mathrm{P}(\mathrm{X}=i)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=j)=\dfrac{1}{2^{i+1}}\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{j!}=\mathrm{P}(\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)$, donc
   X et Y sont indépendantes.
3. a) $[\mathrm{X}=\mathrm{Y}]=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\big((\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Y}=k)\big)$.
   b) La réunion précédente est une réunion d'événements deux à deux incompatibles, donc par $\sigma-$additivité :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}k!}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\sum_{k+0}^{+\infty}\frac{(1/2)^k}{k!}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\mathrm{e}^{1/2}$$
   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.$$
4. a) Lorsque la valeur de la variable X est un entier pair (resp. impair), la variable aléatoire Y prend la valeur 1 (resp. 0). La variable aléatoire Y suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p=\mathrm{P}(\mathrm{A})$.
   $$\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathcal{B}(\mathrm{P}(\mathrm{A})).$$
   b) La fonction génératrice $\mathrm{G_X}$ est assurément définie sur $[-1;1]$ et $\mathrm{G_X}(t)=\mathrm{E}(t^{\mathrm{X}})$ pour tout $t\in[-1,1]$.
   Le paramètre p est l'espérance de la variable Y et, par linéarité de l'espérance,
   $$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\frac{1}{2}(1+\mathrm{E}((-1)^{\mathrm{X}}))=\frac{1}{2}(1+\mathrm{G_X}(-1)).$$
   $$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{2}(1+\mathrm{G_X}(-1)).$$

c) Lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre 1, on sait $G_X(t) = e^{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $P(A) = \dfrac{1+e^{-2}}{2} > \dfrac{1}{2}$ donc A est plus probable que $\overline{A}$.

Exercice 115 *Probabilités asymptotiques*

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et admettant une variance. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \dfrac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}$.
3. Application : on effectue des tirages successifs et avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   En notant Y_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement « le $i^{ème}$ tirage donne une boule rouge », déterminer à partir de combien de tirages on peut garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges restera strictement comprise entre 0.35 et 0.45.

Solution (**Ex.115 –** *Probabilités asymptotiques*)

1. Si $\mathbb{V}(X)$ existe, alors : $\forall a > 0, \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\big) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$.
2. Par linéarité : $\mathbb{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = n\mathbb{E}(Y_1)$, donc $\mathbb{E}\big(\dfrac{S_n}{n}\big) = \mathbb{E}(Y_1)$.
   Par indépendance des Y_i, $\mathbb{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) = n\mathbb{V}(Y_1)$, donc $\mathbb{V}\big(\dfrac{S_n}{n}\big) = \dfrac{\mathbb{V}(Y_1)}{n}$.
   L'inégalité demandée est l'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev à la VAR $\dfrac{S_n}{n}$.
3. Chaque Y_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{5}$ et les Y_i sont mutuellement indépendantes car les tirages s'effectuent avec remise.
   Soit $P_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{n}$ la proportion de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.
   On a, par ce qui précède, $\mathbb{E}(P_n) = \dfrac{2}{5} = 0,4 = 40\%$ et $\mathbb{V}(P_n) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{6}{25n}$.
   On veut que n soit assez grand pour garantir $\mathbb{P}(0,35 < P_n < 0,45) \geq 95\%$.
   Or : $\big[0,35 \leq P_n \leq 0,45\big] = \big[\,|P_n - \mathbb{E}(Y_1)| \leq 0,05\big] = \overline{\big[\,|P_n - \mathbb{E}(Y_1)| \geq 0,05\big]}$
   Prenons $a = 0,05 = \dfrac{1}{20}$ dans l'inégalité précédente.
   On sait alors que : $\mathbb{P}(\big[\,|P_n - \mathbb{E}(Y_1)| \geq 0,05\big]) \leq \dfrac{6 \times 20^2}{25n}$.
   Il suffit donc que n soit tel que $\dfrac{6 \times 20^2}{25n} \leq 5\%$
   $\dfrac{6 \times 20^2}{25n} \leq 5\% \iff n \geq \dfrac{6 \times 4^2}{1/20} \iff n \geq 6 \times 16 \times 20$ i.e. $n \geq 1920$.

Exercice 116 *Temps d'attente au guichet*

Trois individus A_1, A_2 et A_3 se présentent dans un bureau de poste comportant 2 guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée, A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet. Le temps passé au guichet par A_i est noté X_i $(1 \leq i \leq 3)$; on suppose que chaque X_i suit une loi géométrique de paramètre p et que les X_i sont indépendantes.
On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminez $\mathbb{P}(Y > k)$. Donnez la fonction de répartition de Y.
2. Montrer que Y suit une loi usuelle à préciser.
3. Déterminez le temps moyen passé par A_3 à la poste.

Solution (**Ex.116 –** *Temps d'attente au guichet*)

1. $Y = \min(X_1, X_2)$ donc $(Y > k) = (X_1 > k) \cap (X2 > k)$ puis $P(X_i > k) = (1-p)^k$ (k échecs successifs et indépendants !).
   Alors par indépendance de X_1 et X_2, $P(Y > k) = (1-p)^{2k}$
   En notant F la fonction de répartition de Y, on a :
   pour $x < 1$, $F(x) = 0$;
   pour $x \geq 1$, $F(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y > x) = 1 - \mathbb{P}(Y > k) = 1 - (1-p)^{2k}$ où k est la partie entière de x.
2. On pose $q = 1 - p$.
   $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et, pour tout $k \geq 2$,

$[Y=k]=[Y>k-1]\setminus[Y>k]$, avec $[Y>k-1]\subset[Y>k]$, donc :
$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Y>k-1)-\mathbb{P}(Y>k)=q^{2k-2}-q^{2k}=(q^2)^{k-1}(1-q^2)$.
Donc Y suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2=p(2-p)$.

3. Soit Z le temps passé par A_3 à la poste. $Z=Y+X_3$ donc par linéarité :
$\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X_3)=\dfrac{1}{p(2-p)}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{1+2-p}{p(2-p)}=\dfrac{3-p}{p(2-p)}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 117}}$ *Matrice aléatoire*

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $\mathbb{P}(Y=k)=P(Y=-k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et que $|Y|$ suive une loi de Poisson. On pose $A=\begin{pmatrix}0&Y&1\\Y&0&1\\Y&1&0\end{pmatrix}$.

1. Donnez la loi du rang de A.

2. Calculez la probabilité que A soit diagonalisable.

Solution (**Ex.117 –** *Matrice aléatoire*)

Commençons par la loi de Y*...*

Soit $\lambda\in]0\,;\,+\infty[$ le paramètre de la loi de Poisson de $|Y|$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(|Y|=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Comme $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Y=-k)$, on en déduit :

• $\mathbb{P}(Y=0)=e^{-\lambda}$,

• $\forall k\in\mathbb{Z}^*, \mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{1}{2}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{|k|}}{|k|!}$.

1. On a $\mathrm{rg}(A)\geq 2$ car (C_1,C_3) libre, donc :
$\mathrm{rg}(A)=2\iff\det(A)=0\iff Y+Y^2=0\iff(Y=0 \text{ ou } Y=-1)$
Ainsi, en notant R la VAR égale au rang de A :
$((\Omega)R)=\{2,3\}$, $\mathbb{P}(R=2)=\mathbb{P}([Y=0]\cup[Y=-1])\overset{\text{incomp.}}{=}e^{-\lambda}\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)$, et $\mathbb{P}(R=3)=1-\mathbb{P}(R=2)$.

2. $\chi_A(X)=X^3-(1+Y+Y^2)X-Y^2-Y=(X+1)(X^2-X-Y-Y^2)$.
$\chi_A(X)=(X+1)(X+Y)(X-Y-1)$, donc les racines de χ sont -1, $-Y$ et $Y+1$.

$\mathrm{rg}(A+I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&Y&1\\Y&1&1\\Y&1&1\end{pmatrix}=\begin{cases}1&\text{si } Y=1\\2&\text{si } Y\neq 1\end{cases}$

Donc $\dim E_{-1}=\begin{cases}2&\text{si } Y=1\\1&\text{si } Y\neq 1\end{cases}$

Premier cas : $Y=1$.
$\mathrm{Sp}(A)=\{-1,2\}$ avec $\dim E_{-1}=2$ donc A est diagonalisable.
Deuxième cas : $Y=-2$.
$\mathrm{rg}(A-2I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&-2&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}=2$ donc $\dim E_{-2}=1$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,2\}$ avec $\dim E_{-2}=1$ et $\dim E_{-1}=1$, donc A n'est pas diagonalisable.
Troisième cas : $Y\neq 1$ et $Y\neq -2$.
Alors A a trois valeurs propres distinctes (car $-Y=Y+1\iff Y=-1/2$, valeur impossible), donc A est diagonalisable.
Soit D l'événement « A est diagonalisable ».
$\mathbb{P}(D)=1-\mathbb{P}(\overline{D})=1-\mathbb{P}(Y=-2)=1-\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^2}{4}$.