Exercice 3 *Convergence d'une suite*
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $[0\,;\,1]$.
On suppose que, pour tout n, $u_{n+1}(1-u_n) > 1/4$.
Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Solution (**Ex.3 –** *Convergence d'une suite*)
• Tout repose sur la majoration classique :

$$\forall x \in [0\,;\,1]\,, x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

avec égalité si, et seulement si, $x = \dfrac{1}{2}$.
• De : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(1-u_n) > 1/4$, on tire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
Alors pour tout $n \geq 1$:
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}(1-u_n) > \dfrac{1}{4u_n}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{1}{4u_n(1-u_n)}$ d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ car $u_n(1-u_n) \leq \dfrac{1}{4}$
Donc (u_n) est croissante (strictement) et majorée par 1, donc convergente.
• Soit ℓ la limite de u.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}(1-u_n) = \ell(1-\ell)$ et par prolongement des inégalités larges, on a : $\ell(1-\ell) \geq \dfrac{1}{4}$.
Et : $\ell \in [0\,;\,1]$, toujours par prolongement des inégalités larges.
Donc $\ell(1-\ell) = \dfrac{1}{4}$ et $\ell = \dfrac{1}{2}$ par la remarque initiale.

Exercice 8 *Nature d'une série*
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

1. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec α un réel à déterminer.
2. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
3. La convergence de cette série est-elle absolue ?

Solution (**Ex.8 –** *Nature d'une série*)

1. $\sqrt{n^2+n+1} = n\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \cdots = n\left(1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{3}{8n^2}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$ par le développement $(1+v_n)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}v_n - \dfrac{1}{8}v_n^2 + \mathcal{O}\left(v_n^3\right)$ où $v_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.
   Donc $\alpha = \dfrac{3}{8}$.
2. De $\cos(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \theta) = (-1)^{n+1}\sin(\theta)$ on tir e :
   $$u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3}{8n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Par le théorème de Leibniz, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et par domination $\sum\limits_{n\geq 1}\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge puisque la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge.
   Donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.
3. $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$ donc $\sum\limits_{n\geq 1}|u_n|$ diverge par divergence de la série harmonique.

Exercice 18 *Dérivabilité et classe 1*
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Solution (**Ex.18 –** *Dérivabilité et classe 1*)

1. g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes opératoires usuels.
   $\forall x \neq 0, \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = x\sin\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ car $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq x$. g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
2. $\forall x \neq 0, g'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, en prenant $u_n = 1/(n\pi)$, $g'(u_n) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$, on voit que g' n'admet pas de limite en 0. En particulier, on n'a pas : $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g'(0)$. g n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 *Équation fonctionnelle*
Quelles sont les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t\,?$$

Solution (**Ex.19 –** *Équation fonctionnelle*)

Soit f une solution. Alors $t \mapsto tf(t)$ est continue et par le théorème fondamental de l'analyse, le second membre de l'expression est dérivable et même $\mathcal{C}^1$ donc f est $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xf(x),$$

donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'(x) - xy(x) = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda e^{x^2/2}$.

De plus, la relation induit $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$.

Réciproquement, on vérifie sans peine que, si $f : x \mapsto 0$, alors f est solution.

Exercice 31 *Prolongement indéfiniment dérivable*

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$ est continue, et prolongeable par continuité en 0.
2. On note encore f le prolongement obtenu. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Que vaut $f^{(2017)}(0)$? Et $f^{(2018)}(0)$?

Solution (**Ex.31 –** *Prolongement indéfiniment dérivable*)

1. $1 - \cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2$: $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2$ donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 2$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$, donc

   $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}\right) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n-2}}{(2n)!} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}$

   Pour $x = 0$, cette dernière série converge et sa somme est $2 = f(0)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}$.

   f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. En écrivant $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   Comme f est paire, $a_{2017} = 0$ donc $f^{(2017)}(0) = 0$.

   Et $f^{(2018)}(0) = 2018! a_{2018} = 2018! a_{2\times 1009} = 2018! \times \dfrac{(-1)^{1009} 4^{1010}}{(2020)!} = -\dfrac{4^{1010}}{2019 \times 2020}$.