Exercice 4 *Suite d'intégrales*

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier l'existence de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n}$.

2. Étudier la convergence de la suite (I_n).

Solution (**Ex.4 –** *Suite d'intégrales*)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n}$ est continue et positive sur $[0\,;\ +\infty[$.

$$f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} 1/t^2 & \text{si } n=0 \text{ ou } n=1 \\ 2/t^2 & \text{si } n=2 \\ 1/t^n & \text{si } n\geq 3 \end{cases}.$$

Comme $t \mapsto 1/t^m$ est intégrable sur $[1\,;\ +\infty[$ pour tout $m>1$, f_n est intégrable sur $[1\,;\ +\infty[$, donc sur $[0\,;\ +\infty[$ par continuité. Donc I_n existe.

2. • Soit $n \geq 2$. $\forall t \geq 1, 0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{1}{t^n}$ donc $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$, donc $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n-1}$.

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0$.

• Soit $t \in [0\,;\ 1[$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}$. La suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;\ 1[$.

De plus : $\forall n\mathbb{N}, \forall t \in [0\,;\ 1[, |f_n(t)| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0\,;\ 1[$.

Par le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

• Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 13 *Point fixe et approximations successives*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On suppose que A est diagonalisable et que toute valeur propre complexe λ de A vérifie $|\lambda| < 1$. Soit $(\mathrm{X}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant : $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_{p+1} = \mathrm{AX}_p + \mathrm{B}$.

1. La matrice $\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ est-elle inversible ?

2. Prouver l'existence et l'unicité d'une matrice $\mathrm{S} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{S} = \mathrm{AS} + \mathrm{B}$.

3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_p = \mathrm{S} + \mathrm{A}^p(\mathrm{X}_0 - \mathrm{S})$.

4. La suite $(\mathrm{X}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Solution (**Ex.13 –** *Point fixe et approximations successives*)

1. $1 \notin \mathrm{Sp(A)}$ donc $\mathrm{A} - \mathrm{I}_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. $\mathrm{S} = \mathrm{AS} + \mathrm{B} \iff (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{S} = -\mathrm{B} \iff \mathrm{S} = (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)^{-1}(-\mathrm{B})$ (existence et unicité).

3. Par récurrence. Hérédité :
$\mathrm{X}_{p+1} = \mathrm{A}(\mathrm{S} + \mathrm{A}^p(\mathrm{X}_0 - \mathrm{S})) + \mathrm{B} = \mathrm{AS} + \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{X}_0 - \mathrm{S}) + \mathrm{B} = \mathrm{S} + \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{X}_0 - \mathrm{S})$.

4. $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \mathit{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $|\lambda_i| < 1$ $(\forall i)$. Donc $\mathrm{D}^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Par continuité du produit matriciel, $\mathrm{A}^p = \mathrm{PD}^p\mathrm{P}^{-1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

D'où : $\mathrm{X}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{S}$.

Exercice 25 *Autour de la convergence dominée*

L'objectif de l'exercice est de déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)$.

1. Justifier que la suite (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}^+$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = |f_n|$.

2. Montrer que (g_n) converge simplement mais non uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. a) Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = 0$.

Solution (**Ex.25 –** *Autour de la convergence dominée*)

1. Pour $t = 3\pi/2$, $\sin(t) = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n(t) = \mathrm{e}^{-3\pi/2}(-1)^n$ donc $(f_n(t))_n$ diverge. Il n'y a pas convergence simple (en tout $t = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$...)

2. • Soit $t \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}$.

• Soit $t \notin \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t}|\sin(t)|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|\sin(t)| \in [0\,;\ 1[$.

• Donc $g_n \overset{CVS}{\longrightarrow} g : t \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(t)| \leq e^{-t}$ et $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable, Donc par domination $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)dt$ existe.

b) Les g_n sont continues, et leur limite simple est continue par morceaux. Les g_n sont uniformément dominée par φ intégrable. Par le théorème de convergence dominée, g est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x g(t)dt = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0.$$

Exercice 15 *Une application lipschitzienne en dimension infinie*

On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

On note F l'espace vectoriel des suites réelles dont la série associée est absolument convergente.

Pour tout élément u de E et tout élément v de F, on note : $N_E(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N_F(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$.

1. Démontrer que N_F est une norme sur F.

2. Quelle est la relation d'inclusion entre E et F ? Ces espaces sont-ils de dimension finie ?

3. Pour tout élément v de F, montrer qu'on peut définir sur E la forme linéaire $T_v : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ et que T_v est lipschitzienne.

Solution (**Ex.15 –** *Une application lipschitzienne en dimension infinie*)

1. Aucun problème. Cette norme est appelée « norme 1 », $||.||_1$. Celle sur E est la « norme infinie », $||.||_\infty$.

2. $F \subset E$ car $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow (u_n)$ bornée.

Ces deux espaces sont de dimensions infinies. Ils contiennent tous les deux la famille libre infinie $(u^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ où chaque $u^{(m)}$ est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(m)} = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit $v \in F$ fixé.

• Soit $u \in E$. Il faut s'assurer que $\sum_{n\geq 0} + u_n v_n$ converge pour pouvoir définie $T_v(u)$. Or u est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n v_n| \leq M|v_n|$, or $\sum_{n\geq 0}|v_n|$ converge. Par domination, $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ converge absolument, donc $T_v(u)$ est défini.

• Soit $(u, w) \in E^2$.

$$|T_v(u) - T_v(w)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - w_n)v_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n - w_n|\,|v_n|$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - w_n| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} |u_m - w_m| = N_E(u - w)$

$$|T_v(u) - T_v(w)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_E(u-w)\,|v_n| = N_E(u-w)\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n| = N_E(u-w)N_F(v).$$

Ainsi :

$\forall (u, w) \in E^2, \quad |T_v(u) - T_v(w)| \leq N_F(v)N_E(u - w)$: T_v est lipschitzienne de rapport $N_F(v)$.

Remarque : en prenant u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathit{sign}(v_n)$ et w la suite nulle, il y a égalité, donc $N_F(v)$ est le plus petit rapport possible.

Exercice 34 *Convergence et calcul*

Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} t e^{-\lfloor t\rfloor}dt.$$

Solution (**Ex.34 –** *Convergence et calcul*)

$f : t \mapsto te^{-\lfloor t\rfloor}$ est continue par morceaux sur $[0\,;\ +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, donc intégrable. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_n^{n+1} f(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_n^{n+1} e^{-n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)e^{-n}$.

Or pour $x \in\,]-1\,;\ 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Par la série géométrique de raison $e^{-1} \in [0\,;\ 1[$ et sa dérivée, $\int_0^{+\infty} f(t)dt =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n + \frac{1}{2}\right)e^{-n} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1+e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{e^2+e}{(e-1)^2}$$