Exercice 48 *Autour de j*
On note j le nombre complexe $\exp(i2\pi/3)$.
On demande de trouver tous les polynômes complexes de degré au plus 3 vérifiant les égalités : $\mathrm{P}(j) = j^2$, $\mathrm{P}(j^2) = j$, $\mathrm{P}'(j) = j$, $\mathrm{P}'(j^2) = j^2$.
Pour cela, on utilisera le polynôme $\mathrm{P}' - \mathrm{X}$.

Solution (**Ex.48 –** *Autour de j*)
$\mathrm{Q} = \mathrm{P}' - \mathrm{X}$ admet j et j^2 pour racines, et est de degré 2 au plus :
$\mathrm{Q} = a(\mathrm{X} - j)(\mathrm{X} - j^2) = a(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$.
$\mathrm{P}' = a\mathrm{X}^2 + (a+1)\mathrm{X} + a$, $\mathrm{P} = \dfrac{a}{3}\mathrm{X}^3 + \dfrac{a+1}{2}\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$.
La résolution du système d'inconnues a et b $\begin{cases} \mathrm{P}(j) = j^2 \\ \mathrm{P}(j^2) = j \end{cases}$ conduit à $a = -1$, $b = -\dfrac{2}{3}$.
$\mathrm{P} = -\dfrac{1}{3}\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - \dfrac{2}{3}$.

Exercice 53 *Équation complexe et racines n-ièmes*
On fixe n dans $\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad (z+1)^n = (z-1)^n$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Solution (**Ex.53 –** *Équation complexe et racines n-ièmes*)
$z = 1$ n'étant pas solution, $(\mathrm{E}) \iff \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.
Or : $\dfrac{z+1}{z-1} = \omega \iff (\omega - 1)z = \omega + 1$ ce qui interdit $\omega = 1$.
$(\mathrm{E}) \iff z \neq 1$ et $\exists k \in [\![1\,;\ n-1]\!], \dfrac{z+1}{z-1} = \exp(2ik\pi/n)$
$(\mathrm{E}) \iff z \neq 1$ et $\exists k \in [\![1\,;\ n-1]\!], z = \dfrac{\exp(2ik\pi/n) + 1}{\exp(2ik\pi/n) - 1}$
$(\mathrm{E}) \iff \exists k \in [\![1\,;\ n-1]\!], z = -i\cot\dfrac{k\pi}{n}$

Exercice 54 *Polynôme minimal d'un nombre complexe*
Soit $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

1. Calculer $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
2. Trouver un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de plus petit degré possible tel que $\mathrm{P}(z) = 0$.

Solution (**Ex.54 –** *Polynôme minimal d'un nombre complexe*)
1. $z = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \dfrac{1}{2^5}e^{i70\pi/12} = \dfrac{1}{2^5}e^{-i\pi/6}$ donc $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{64}$ et $\mathcal{I}m(z) = -\dfrac{1}{64}$.
2. Comme z n'est pas réel, $\deg \mathrm{P} \geq 2$.
   Comme $(\mathrm{X} - z)(\mathrm{X} - \overline{z}) = \mathrm{X}^2 - 2\mathcal{R}e(z)\mathrm{X} + |z|^2 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - z)(\mathrm{X} - \overline{z})$ convient.
   Explicitement : $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{32}\mathrm{X} + \dfrac{1}{1024}$.
   Remarque : C'est aussi le seul polynôme *unitaire* de degré 2 convenable car si z est racine de $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, alors $\overline{z}$ aussi, donc Q est factorisable par $(\mathrm{X} - z)(\mathrm{X} - \overline{z}) = \mathrm{P}$. Autrement dit, l'ensemble des polynômes réels admettant z pour racine est $\{\mathrm{Q} \times \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$.

Exercice 1001 *Exercice supplémentaire*
Factoriser dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 + 1.$$

Solution (**Ex.1001 –** *Exercice supplémentaire*)
• Factorisation dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$:
Première méthode – Par les identités remarquables
$\mathrm{P} = (\mathrm{X}^2 + i)(\mathrm{X}^2 + i) = \left(\mathrm{X}^2 - (e^{i\pi/4})^2\right)\left(\mathrm{X}^2 - (e^{3i\pi/4})^2\right)$
$\mathrm{P} = (\mathrm{X} - e^{i\pi/4})(\mathrm{X} + e^{i\pi/4})(\mathrm{X} - e^{3i\pi/4})(\mathrm{X} + e^{3i\pi/4})$
Seconde méthode – En recherchant les racines de P
$z^4 + 1 = \mathrm{P} \iff z^4 = -1 \iff \exists k \in [\![0\,;\ 3]\!], z = e^{2ik\pi/4}e^{i\pi/4}$
donc $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{k=0}^{3}\left(\mathrm{X} - e^{(2k+1)i\pi/4}\right)$
• Puis dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:
Comme les racines de P sont deux à deux conjuguées et $(\mathrm{X} - \alpha)(\mathrm{X} - \overline{\alpha}) = \mathrm{X}^2 - 2\mathcal{R}e(\alpha)\mathrm{X} + |\alpha|^2$ est un polynôme réel, on a
$\mathrm{P} = \left(\mathrm{X}^2 - 2\mathcal{R}e(e^{i\pi/4})\mathrm{X} + 1\right)\left(\mathrm{X}^2 - 2\mathcal{R}e(e^{3i\pi/4})\mathrm{X} + 1\right)$
$\mathrm{P} = \left(\mathrm{X}^2 - \sqrt{2}\mathrm{X} + 1\right)\left(\mathrm{X}^2 + \sqrt{2}\mathrm{X} + 1\right)$