Exercice 52 *Racines 7-èmes de l'unité*

On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$ puis $\mathrm{S} = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $\mathrm{T} = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Calculer $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ et ST.

2. En déduire les valeurs de S et de T.

Solution (**Ex.52 –** *Racines 7-èmes de l'unité*)

Rappel : comme ω est une racine 7-ème de l'unité et que l'ensemble des racines 7-ème de l'unité est $\{\omega^k, k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\}$, on a :

$$\omega^7 = 1 \text{ et } 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0.$$

1. À l'aide de ces relations, on trouve $\mathrm{S} + \mathrm{T} = -1$, $\mathrm{ST} = 2$

2. S et T sont les racines de $\mathrm{X}^2 - (\mathrm{S}+\mathrm{T})\mathrm{X} + \mathrm{ST}$, *i.e* $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 2$. $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$.

$x_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$

$\mathcal{I}m(\mathrm{S}) = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$ or $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7} = \sin\dfrac{2\pi}{7} - \sin\dfrac{\pi}{7} \geq 0$ car sin est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{7}\,;\,\dfrac{2\pi}{7}\right]$. Comme $\sin\dfrac{4\pi}{7} \geq 0$, $\mathcal{I}m(\mathrm{S}) \geq 0$, donc

$$\mathrm{T} = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \text{ et } \mathrm{S} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 57 *Une base non échelonnée*

Soit pour tout entier k de 0 à n : $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $(\mathrm{P}_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. Exprimer : $1, \mathrm{X}, ..., \mathrm{X}^n$ dans cette base.

Solution (**Ex.57 –** *Une base non échelonnée*)

1. • $\dim(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]) = n + 1 = card(\{\mathrm{P}_k, 0 \leq k \leq n\})$.

• Soit $(a_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que :

$$(\heartsuit) : \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}_k = 0.$$

Notons que pour tout $k \geq 1$, 0 est racine d'ordre k de P_k donc racine de $\mathrm{P}_k^{(i)}$ pour tout $i \in [\![0\,;\,k-1]\!]$ mais pas de $\mathrm{P}_k^{(k)}$.

$(\heartsuit)$ en $\mathrm{X} = 0$ donne $a_0 = 0$.

En dérivant $(\heartsuit)$ puis en évaluant en $\mathrm{X} = 0$: $a_1 = 0$.

En dérivant à nouveau $(\heartsuit)$ puis en évaluant en $\mathrm{X} = 0$: $a_2 = 0$...

En itérant, $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], a_k = 0$. Donc la famille est libre.

• Bilan : la famille est bien une base.

2. $\mathrm{X}^n = \mathrm{P}_n$,

$\mathrm{X}^{n-1} = \mathrm{X}^{n-1}(1-\mathrm{X}) + \mathrm{X}^n = \mathrm{P}_{n-1} + \mathrm{P}_n$,

$\mathrm{X}^{n-2} = \mathrm{X}^{n-2}(1-\mathrm{X})^2 + 2\mathrm{X}^{n-1} - \mathrm{X}^n = \mathrm{P}_{n-2} + 2\mathrm{P}_{n-1} + \mathrm{P}_n$ ...

laisse conjecturer que : $\mathrm{X}^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\mathrm{P}_{n-i}$. Vérifions-le :

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\mathrm{P}_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\mathrm{X}^{n-i}(1-\mathrm{X})^i = \mathrm{X}^k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\mathrm{X}^{n-k-i}(1-\mathrm{X})^i$

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\mathrm{P}_{n-i} = \mathrm{X}^k(\mathrm{X} + 1 - \mathrm{X})^{n-k} = \mathrm{X}^k$

Remarque : on sait que toute famille échelonnée en degrés est libre, mais cette propriété est vraie pour toute famille échelonnée en « valuation ». La valuation d'un polynôme non nul est le degré du plus bas monôme non nul de ce polynôme :

$$\text{Si } \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k\mathrm{X}^k, \text{ alors } val(\mathrm{P}) = \min\{k | a_k \neq 0\}.$$

La matrice représentant une telle famille dans la base canonique est alors triangulaire inférieure à pivots tous non nuls, donc est inversible, donc cette famille est une base.

Ici, la famille $(\mathrm{P}_k)_{0\leq k\leq n}$ est échelonnée en valuation donc est une base.

En effet, $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^k = \mathrm{X}^k\big(1 + \underbrace{\dots}_{\deg\geqslant 1}\big) = \mathrm{X}^k + \underbrace{\dots}_{\deg\geqslant k+1}$ donc $val(\mathrm{P}_k) = k$.