Exercice 60 *Un endomorphisme en dimension infinie*

Montrer que $\Phi : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P(X) \mapsto P(X^2) + (1+X^2)P(X) \end{array}$ est linéaire.

Est-elle injective ? Surjective ?

Solution (**Ex.60 –** *Un endomorphisme en dimension infinie*)

Linéarité sans souci.

Une première idée

Pour déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$, prenons $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$. Supposons $P \neq 0$.

• Que dire d'abord de $\deg(P)$?

Soit $n = \deg(P)$. En prenant les degrés des deux membres de l'égalité $P(X^2) = -(1+X^2)P(X)$, on a

$$2n = 2 + n \text{ donc } n = 2.$$

• Posons alors $P = aX^2 + bX + c$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= aX^4 + bX^2 + c + aX^2 + bX + c + aX^4 + bX^3 + cX^2 \\ &= 2aX^4 + bX^3 + (b+a+c)X^2 + bX + 2c\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, $\Phi(P) = 0 \iff a = b = c = 0$.

Ceci est absurde car on a supposé $P \neq 0$.

• Conclusion : seul le polynôme nul vérifie $\Phi(P) = 0$, et $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$, donc Φ est injective.

• Pour la surjectivité, montrons que $\Phi(P) = 1$ n'a aucune solution. Le même raisonnement que précédemment montre que si $\Phi(P) = 1$ alors $\deg(P) = 2$ et les coefficients de P vérifient

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ c = 1/2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 1/2...$$

Ce système n'ayant aucune solution, 1 n'a pas d'antécédent (on peut montrer de même que X n'a pas d'antécédent). Donc Φ n'est pas surjective.

Une seconde idée

Intéressons-nous à l'image du monôme dominant d'un polynôme.

Soit a_dX^d le monôme dominant d'un polynôme P non nul (donc $a_d \neq 0$). Celui de $P(X^2)$ est a_dX^{2d} et celui de $(1+X^2)P(X)$ est a_dX^{d+2}, donc celui de $\Phi(P)$ est

$$\begin{cases} a_dX^{2d} & \text{si } d \geq 3 \\ 2a_2X^4 & \text{si } d = 2 \\ a_1X^3 & \text{si } d = 1 \\ a_0X^2 & \text{si } d = 0 \end{cases}$$

Donc si $P \neq 0$ alors $\Phi(P) \neq 0$, donc $\mathrm{Ker}\Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

De plus, on voit que $\deg(\Phi(P)) \geq 2$ pour tout $P \neq 0$ donc par exemple 1 et X n'ont pas d'antécédent et Φ n'est pas surjective.

Exercice 61 *Crochets de Lie*

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On fait l'hypothèse : $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Pour tout entier k, prouver la relation $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.

2. Prouver que f est nilpotent.
Indication : on pourra s'intéresser à $\varphi_g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), h \mapsto h \circ g - g \circ h$.

Solution (**Ex.61 –** *Crochets de Lie*)

1. Récurrence sur k. Initialisation évidente. Admettons la propriété au rang k, alors :
$f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} = f^{k+1} \circ g - \big(g \circ f\big) \circ f^k = f^{k+1} \circ g - \big(f \circ g - f\big) \circ f^k = f^{k+1} \circ g - \big(f \circ g - f\big) \circ f^k = f^{k+1} \circ g - f \circ g \circ f^k + f^{k+1} = f \circ \big(f^k \circ g - g \circ f^k\big) + f^{k+1} = kf^{k+1} + f^{k+1} = (k+1)f^{k+1}$...

2. On vérifie que φ_g est un endomorphisme sur $\mathcal{L}(E)$ (donc $\varphi_g \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$).
Si : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k \neq 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, k \in \mathrm{Sp}(\varphi_g)$ (et $f^k \in \mathrm{SEP}(\varphi_g, k)$). Donc φ_g admet une infinité de valeurs propres distinctes, ce qui est impossible car $\dim \mathcal{L}(E)$ est finie.
Donc : $\exists k \in \mathbb{N}, f^k = 0$.

Exercice 62 *Endomorphisme vérifiant une équation*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

3. Montrer que $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \geqslant 1$.

4. a) On suppose $f \neq 0$. Soit $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $(f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) En déduire $\mathrm{Tr}(f)$.

Solution (**Ex.62 –** *Endomorphisme vérifiant une équation*)

1. $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow (\exists y \in \mathrm{E}, x = f(y) \text{ et } f(x) = 0) \Longrightarrow f^3(y) = 0 \Longrightarrow f(y) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

2. 1. avec la formule du rang donne $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

3. $f^3 = -f$ donc $\det(f)^3 = \det(f^3) = (-1)^3 \det(f) = -\det(f)$ donc $\det(f)$ est une solution réelle de $x^3 + x = 0$, donc $\det(f) = 0$ (car $x^3 + x = x(x^2+1)$).
$\det(f) = 0$ donc $\mathrm{rg}(f) \leq 2$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 1$.

4. a) Supposons $af(x) + bf^2(x) = 0 \quad (1)$.
Alors $af^2(x) - bf(x) = 0 \quad (2)$.
$a \times (1) - b \times (2)$ donne $(a^2 + b^2) f(x) = 0$. Or $f(x) \neq 0$, donc $a^2 + b^2 = 0$, donc $a = b = 0$.
Ainsi $\big((f(x), f^2(x)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ dont la dimension est au plus 2. Du coup, $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ et $\big(f(x), f^2(x)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \{0\}$. Alors $\mathcal{B} \overset{\text{déf.}}{=} (y, f(x), f^2(x))$ est une base de E par concaténation de bases de sous-espaces supplémentaires.

Alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Tr}(f) = 0$.