Exercice 71 *Similitude*

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.71** – *Similitude*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Puisque $f \neq 0$ et $f^2 = 0$, $\dim \mathrm{Im}(f) \geq 1$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc $1 \leq \dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim \mathrm{Ker}(f)$. Comme $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 3$, nécessairement $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.

Soit $e_1 \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $e_2 = f(e_1)$. Alors $e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Complétons (e_2) en une base (e_2, e_3) de $\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$.

Supposons $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. En composant par f, $a = 0$. Et comme (e_2, e_3) est libre, $b = c = 0$.

$\mathcal{B}$ est libre de cardinal 3, c'est une base. Et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 72 *Similitude*

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.72** – *Similitude*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Puisque $f^2 \neq 0$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x)\big)$.

Supposons $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0$. En composant par f^2, $a = 0$. Puis en composant par f, $b = 0$. Donc aussi $c = 0$.

$\mathcal{B}$ est libre de cardinal 3, c'est une base. Et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 73 *Puissances*

Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solution (**Ex.73** – *Puissances*)

On peut diagonaliser A sans subtilité :

$\chi_A = X^3 - 6 \cdot X^2 + 9 \cdot X - 4 = (X-4)(X-1)^2$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

vérifient : $D = P^{-1}AP$.

Alors $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$

• Sinon : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 5A - 4I_3$ donc $P = X^2 - 5X + 4$ est un polynôme annulateur de A.

Cherchons le reste de la division euclidienne de X^n par P qui est de degré au plus 1 :

$X^n = P(X)Q(X) + aX + b$ en $X = 4$ et $X = 1$ donne :

$$\begin{cases} 4a + b = 4^n \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{4^n - 1}{3} \\ b = \dfrac{4 - 4^n}{3} \end{cases}$$

d'où $A^n = \dfrac{4^n-1}{3}A + \dfrac{4-4^n}{3}I_3$.

• Et sinon : $A = J + I_3$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $JI_3 = I_3J$, et : $\forall k \geq 1, J^k = 3^{k-1}J$.

$A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)J$ (y compris pour $n = 0$).

Exercice 74 *Puissances*

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, où $\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ si } i \neq j \\ a_{ij} = 0 \text{ si } i = j \end{cases}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

Calculer A^p.

Solution (**Ex.74 –** *Puissances*)

En notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a : $A = J - I_n$ avec $JI_n = I_nJ$, et : $\forall k \geq 1, J^k = n^{k-1}J$.

$A^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k (-I_n)^{p-k} = I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} (-1)^{p-k} \right) J$ (en supposant $p \geq 1$)

$A^p = I_n + \dfrac{1}{n}\big((n-1)^p - (-1)^p\big)J$ (y compris pour $p = 0$ finalement).

Exercice 65 *Hyperplan*

On rappelle qu'on appelle hyperplan d'un espace $\mathbb{R}-$vectoriel E tout noyau $\text{Ker}(\varphi)$ d'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ non nulle. n désigne un entier naturel au moins égal à 1.

1. Dans cette question uniquement, E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n.
   - **a)** Montrer que tout hyperplan de E est de dimension $n-1$.
   - **b)** Montrer que tout sous-espace F de dimension $n-1$ est un hyperplan de E. *Indication :* On pourra commencer par compléter une base de F en base de E.
2. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P'(0) = 0\}$.
   - **a)** Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
   - **b)** Déterminer un supplémentaire de H.
3. Soit $H = \big\{h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), h'(0) = 0\big\}$.
   - **a)** Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
   - **b)** Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Solution (**Ex.65 –** *Hyperplan*)

1. a) Supposons $H = \text{Ker}(\varphi)$.
Formule du rang : $\varphi : E \to \mathbb{R}$ donc $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ donc $\text{rg}(\varphi) \leq 1$, et si $\text{rg}(\varphi) = 0$, φ est nulle, ce qui est interdit. Donc $\text{rg}(\varphi) = 1$ et $\dim(H) = n-1$.

b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ soit base de F (théorème de la base incomplète).
Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}, x = x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1} + x_ne_n \mapsto x_n$. Alors :
(i) φ est une forme linéaire sur E,
(ii) $\varphi(e_n) = 1$ donc $\varphi \neq 0$,
(iii) $F = \text{Ker}(\varphi)$.
Donc F est un hyperplan.
NB. : $x \mapsto \varphi(x)e_n$ est la projection de E sur $\text{Vect}(e_n)$ parallèlement à F...

2. a) $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in H \iff a_1 = 0 \iff P \in \text{Vect}(1, X^2, X^3, \ldots, X^n)$ donne une description de H, avec clairement $\dim(H) = n = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1$.
Sinon, on peut aussi observer que $H = \text{Ker}(\varphi)$ où $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto P'(0)$ est une forme linéaire non nulle.

b) $(1, X^2, \ldots, X^n, X)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, $\text{Vect}(X) = \{aX, a \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de H (et ce n'est pas le seul : tout $\text{Vect}(X + \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ convient, par exemple).

3. a) $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, h \mapsto h'(0)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $H = \text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.

b) Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors $h = f + g$ avec $f : x \mapsto h(x) - h'(0)x$ et $g : x \mapsto h'(0)x$.
On a : $f \in H$ et $g \in \text{Vect}(x \mapsto x)$. En notant $F = \text{Vect}(x \mapsto x)$, on a déjà : $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = H + F$.
Soit $f \in H \cap F$. Alors : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, f : x \mapsto \alpha x$ car $f \in F$. De plus, $f'(0) = 0$ car $f \in H$. Donc $\alpha = 0$ et $f : x \mapsto 0$. Ainsi : $H \cap F = \{0\}$.
Bilan : $E = H \oplus F$ et $F = \text{Vect}(x \mapsto x) = \{x \mapsto \alpha x / \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de H. Noter l'analogie avec la question précédente...