Sur le lien intime entre les produits scalaires et les matrices définies positives

Exercice 1 *Les produits scalaires et les matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*

Rappel de cours : parmi les matrices symétriques réelles S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on distingue les

— **matrices symétriques réelles positives** dont l'ensemble se note $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ qui vérifient
$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{SX} \geqslant 0;$$

— **matrices symétriques réelles définies positives** dont l'ensemble se note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui vérifient
$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{SX} > 0.$$

Comme il s'agit de matrice symétrique réelles, donc diagonalisable à valeurs propres toutes réelles, une étude plus fine montre qu'on a la **caractérisation par les valeurs propres** suivante :
pour toute matrice $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset [\,0\,;\,+\infty[\,;$$
$$\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset \,]\,0\,;\,+\infty[\,.$$

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 1$, et $\mathcal{B} = \big(\mathrm{E}_i\big)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ la base canonique de E.
On note $\big(.\mid.\big)$ le produit scalaire canonique de E.

1. Pour X et Y dans E, rappeler l'écriture de $\big(\mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\big)$ sous forme d'un produit matriciel.

2. Soit $\mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}, (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{BY}$.

a) **Un calcul précieux pour exhiber les coefficients par un produit matriciel !**
Que vaut $\varphi(\mathrm{E}_i,\mathrm{E}_j)$?

b) À quelle condition nécessaire et suffisante sur B φ est-il un produit scalaire sur E ?

3. Soit φ un produit scalaire quelconque de E et $\mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad b_{i,j} = \varphi(\mathrm{E}_i,\mathrm{E}_j).$$

a) Montrer que
$$\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{BY}.$$

b) En déduire que $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) Justifier l'unicité de la matrice B permettant d'écrire
$$\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{BY}.$$

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A})$.

b) Montrer que $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{A} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

5. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et φ le produit scalaire défini par $\varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{BY}$.
Soit $\mathcal{C} = (\mathrm{F}_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ une base de E orthonormale pour le produit scalaire φ (obtenue par exemple par le procédé de Gramm-Schmidt).
On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

a) Justifier que $\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{BP} = \mathrm{I}_n$.

b) En déduire l'existence d'une matrice inversible A tel que $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$.

Solution (**Ex.1 –** *Les produits scalaires et les matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*)

1. $\big(\mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\big) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$ où l'on convient que $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ (ce qui se pratique largement)
$\big(\mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\big) = \mathrm{Tr}(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y})$ si l'on veut éviter la convention précédente.

2. a) $\varphi(\mathrm{E}_i,\mathrm{E}_j) = {\mathrm{E}_i}^{\mathrm{T}}\mathrm{BE}_j = b_{i,j}$.

b) (i) $\varphi(\lambda\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \lambda\varphi(\mathrm{X},\mathrm{Z}) + \varphi(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ par linéarité de la transposition et distributivité du produit matriciel.

(ii) Montrons que φ est symétrique si, et seulement si, B est symétrique.

- Si B est symétrique, alors $\varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{BY} \overset{(*)}{=} \big(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{BY}\big)^{\mathrm{T}} = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{BX} = \varphi(\mathrm{Y},\mathrm{X})$, $(*)$ provenant du fait qu'il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 1.
- Si $\varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \varphi(\mathrm{Y},\mathrm{X})$ pour tout (X,Y), alors en particulier $\varphi(\mathrm{E}_i,\mathrm{E}_j) = \varphi(\mathrm{E}_j,\mathrm{E}_i)$ pour tout (i,j), c'est-à-dire $b_{i,j} = b_{j,i}$. Donc B est symétrique.

(iii) $\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}\setminus\{0\}, \varphi(\mathrm{X},\mathrm{X}) > 0 \Longleftrightarrow \forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}\setminus\{0\}, \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{BX} > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
La condition nécessaire et suffisante cherchée est « $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ».

3. Soit φ un produit scalaire quelconque de E et $\mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad b_{i,j} = \varphi(\mathrm{E}_i,\mathrm{E}_j).$$

a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
X^T BY &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i\right)^T BY = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i {E_i}^T\right) BY = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i {E_i}^T BY\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i {E_i}^T B \left(\sum_{j=1}^{n} y_j E_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j {E_i}^T BE_j\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j b_{i,j}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(E_i, E_j)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \left(\varphi(E_i, \sum_{j=1}^{n} y_j E_j)\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\varphi(E_i, Y)\right) \\
&= \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i, Y) = \varphi(X, Y)
\end{aligned}$$

b) D'après 2.b), $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) Si $\forall (X,Y) \in E^2, \quad X^T BY = X^T B'Y$, alors en particulier $\forall (i,j), E_i^T BE_j = E_i^T B'E_j$, c'est-à-dire $b_{i,j} = b'_{i,j}$ donc $B = B'$.

4. a) • Si $X \in \mathrm{Ker}(A)$ alors $AX = 0$ donc $A^T AX = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(A^T A)$.

• Si $X \in \mathrm{Ker}(A^T AX)$ alors $A^T AX = 0$ donc $X^T A^T AX = 0$ donc $\big(AX \mid AX\big) = 0$ donc $||AX||^2 = 0$ donc $AX = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

• Bilan : $\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$.

b) $\forall X \in E, X^T A^T AX = ||AX||^2 \geqslant 0$ donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

c) • Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et
$X^T A^T AX = 0 \Rightarrow ||AX|| = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X = 0$ car $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.
Donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

• Si $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors
$AX = 0 \Rightarrow ||AX||^2 = 0 \Rightarrow X^T A^T AX = 0 \Rightarrow X = 0$ car $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

• Bilan : $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

5. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et φ le produit scalaire défini par $\varphi(X, Y) = X^T BY$.

Soit $\mathcal{C} = (F_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ une base de E orthonormale pour le produit scalaire φ (obtenue par exemple par le procédé de Gramm-Schmidt).
On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

a) En effectuant le produit matriciel,

$\left(P^T BP\right)_{i,j} = {F_i}^T BF_j = \varphi(F_i, F_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$ car $\mathcal{C}$ est orthonormale pour le produit φ.

Donc $P^T BP = I_n$.

b) On a alors $B = (P^T)^{-1} P^{-1}$ et en posant $A = P^{-1}$, $B = A^T A$ car $(P^T)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^T$ pour toute matrice inversible P.

Et quelques grands classiques d'analyse...

Exercice 2 *Une bonne vieille comparaison série-intégrale*

On considère, pour $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{\ln p}{p}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, justifier

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}.$$

2. Justifier l'existence d'une constante réelle C telle que

$$u_n = \frac{\ln^2 n}{2} + C + o(1).$$

3. À l'aide de la constante γ d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right),$$

calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Solution (**Ex.2 –** *Une bonne vieille comparaison série-intégrale*)

1. En introduisant $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$, on a : $\forall p \geq \mathrm{e}, \displaystyle\int_p^{p+1} f \leq \frac{\ln p}{p} \leq \int_{p-1}^p f$

d'où : $u_n = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + v_n$, avec $\displaystyle\int_4^{n+1} f \leq v_n \leq \int_3^n f$.

Comme $\displaystyle\int_?^n f \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2 n}{2}$, donc u_n aussi.

2. En posant $w_n = u_n - \dfrac{\ln^2 n}{2}$, on montre que w est décroissante et minorée, par des comparaisons analogues.
Donc w converge, vers disons C... et $w_n = \mathrm{C} + o(1)$...

3. En séparant termes pairs et impairs,

$\mathrm{S}_{2\mathrm{N}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\ln(2n)}{n} - \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{\ln n}{n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} + u_{\mathrm{N}} - u_{2\mathrm{N}}$.

Conclusion : $\mathrm{S} = \dfrac{\ln(2)}{2}(2\gamma - \ln 2)$.

Exercice 3 *Un peu d'analyse pour finir...*

On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer l'existence et déterminer la valeur de

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} \mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.3 –** *Un peu d'analyse pour finir...*)

Observer que $\forall x \in \,]\,0\,;\ 1\,[\,, \dfrac{\ln(x)}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(x)(-x)^n$ et appliquer le théorème d'interversion série-intégrale à la suite de fonctions $f_n : \,]\,0\,;\ 1\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n x^n \ln(x)$.

Techniquement :

(i) Comme $\sqrt{x} f_n(x) = (-1)^n x^{n+1/2} \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $f_n(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ce qui prouve l'intégrabilité sur $]\,0\,;\ 1\,]$;

(ii) Une intégration par partie montre que $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -t^n \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$ ce qui assure la sommabilité de $\displaystyle\sum_n \int_{]\,0\,;\ 1\,[} |f_n|$.

Finalement, $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = -\mathrm{I} + \mathrm{P}$.

Or $\mathrm{P} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\mathrm{I} = \dfrac{\pi^2}{6} - \mathrm{P} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\pi^2}{6}$, d'où $\mathrm{I} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{-\pi^2}{12}$, le théorème des séries alternées prévoyait bien une somme négative...

Exercice 4 *Un reste d'analyse pour s'achever...*

On pose, sous réserve d'existence, pour $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en

a) utilisant un théorème du cours ;

b) justifiant l'encadrement $\dfrac{x}{1+x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

Solution (**Ex.4 –** *Un reste d'analyse pour s'achever...*)

1. La série étant divergente pour $x = 0$, éloignons nous un peu. Soit $a > 0$.
On raisonne sur $\mathrm{I}_a = [\,a\,;\ +\infty[$.

- Pour tout $x \in \mathrm{I}_a$, la SUITE RÉELLE $\left(\dfrac{1}{1+nx}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante de limite nulle. Le théorème des séries alternées garantit que la série définissant $f(x)$ converge. Il y a donc convergence simple sur $\mathrm{I}_a = [\,a\,;\ +\infty[$.
- Le même théorème assure que

$$|\mathrm{R}_n(x)| \overset{déf}{=} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

Donc : $\forall x \in \mathrm{I}_a, |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+na}$. (J'aurais bien pris « $\dfrac{1}{na}$) » mais ça ne convient pas si $n = 0$! ! !)

Ainsi la fonction R_n est bornée sur I.

• De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant ||\mathrm{R}_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{1+na}$ donc par encadrement $||\mathrm{R}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi la série définissant f converge uniformément sur I.

• Comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ sont toutes continues sur I_a, f est continue sur I_a.

• Donc f est définie et continue sur tout intervalle $\mathrm{I}_a = [\,a\,;\,+\infty[$ où $a > 0$.

• Donc f est définie et continue $]\,0\,;\,+\infty[= \bigcup_{a>0} [\,a\,;\,+\infty[$.

2. a) utilisant un théorème du cours ;

Comme la convergence est uniforme sur $[\,1\,;\,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(-1)^n}{1+nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{0,n}$, le théorème de la double limite assure que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{0,n} = 1.$$

b) Par le théorème des séries alternées, pour tout $x > 0$

• $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} \leqslant 1$ car la dernière somme est négative (signe de son premier terme),

• $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} \geqslant 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ car cette fois la dernière somme est positive.

• ainsi $\dfrac{x}{1+x} \leqslant f(x) \leqslant 1$ et par encadrement $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

3. En posant $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ sur $\mathrm{I}_a = [\,a\,;\,+\infty[$, les f_n sont $\mathcal{C}^1$.

Il suffit de montrer que la convergence de $\sum f_n'$ est uniforme.

Attention, nous allons rencontrer une petite difficulté !

$\forall x \geqslant a, f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}$ mais **la suite** $(|f_n'(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas décroissante... enfin au début...**

$\left|f_{n+1}'(x)\right| - |f_n'(x)| = \dfrac{(n+1)(1+nx)^2 - n(1+(n+1)x)^2}{\ldots(>0)} = \dfrac{1-n(n+1)x^2}{\ldots(>0)}$

La suite décroît dès que $n(n+1)x^2 \geqslant 1$, i.e. $n(n+1) \geqslant \dfrac{1}{x^2}$. Comme $x \geqslant a$, si $n(n+1) \geqslant \dfrac{1}{a^2}$, alors $n(n+1) \geqslant \dfrac{1}{a^2}$.

Soit n_0 tel que $n_0(n_0+1) \geqslant \dfrac{1}{a^2}$. Soit $x \geqslant a$.

Alors la suite $(f_n'(x))_{n\geqslant n_0}$ est décroissante de limite nulle, le théorème des séries alternées s'applique et pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{n+1}{(1+(n+1)x)^2} \leqslant \frac{n+1}{[(n+1)x]^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)x^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)a^2}.$$

Ce qui prouve que le reste R_n est bornée et

$$\forall n \geqslant n_0, ||\mathrm{R}_n||_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)a^2}.$$

Par encadrement, $||\mathrm{R}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc il y a bien convergence uniforme et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty[= \bigcup_{a>0} [\,a\,;\,+\infty[$.

Finalement, tout finit bien, il faut juste éviter d'affirmer que la suite des $|f_n'|$ est décroissante, elle ne l'est qu'à partir d'un certain rang, et comme il s'agit de majorer le reste qui ignore les premiers termes, cela n'est pas un souci...

Non demandé : $\forall x > 0, \quad f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}$.