Exercice 1 *Étude d'une fonction de deux variables*

$\mathcal{R}$ désigne le rectangle ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\times\left]-1\,;\ 1\right[$ et f la fonction

$$f:\mathcal{R}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto y^2+3\big(1-\cos(x)\big)y-4\cos(x)+2\cos^2(x).$$

1. *Résultat préliminaire*
Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et g un fonction numérique continue définie sur I telle qu'au voisinage de 0 on ait

$$g(x)=\alpha+\beta x^2+o\left(x^2\right)$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\left]0\,;\ +\infty\right[$.
Justifier *rigoureusement* que g atteint un minimum local en 0, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon\in\left]0\,;\ +\infty\right[$ tel que

$$\forall x\in\left]-\varepsilon\,;\ \varepsilon\right[,\quad g(x)\geqslant\alpha.$$

2. a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Montrer que f admet un unique point critique. On notera C ce point.

3. Uniquement pour les 5/2 !
a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et expliciter sa matrice hessienne en C.
b) Cette matrice permet-conclure quant à la nature du point critique C ?

4. a) Montrer qu'en suivant la droite d'équation $y=0$, f atteint un minimum local en C.
b) Montrer qu'en suivant la droite d'équation $x=0$, f atteint un minimum local en C.
c) Soit $k\in\mathbb{R}^*$. Montrer qu'en suivant la droite d'équation $y=kx$, f atteint un minimum local en C.
d) Qu'a-t-on démontré dans cette question ?

5. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on définit la courbe Γ_a par

$$\Gamma_a=\big\{(x,y)\in\mathcal{R},y=a(\cos(x)-1)\big\}.$$

a) Dans un même repère orthonormé, représenter Γ_1, Γ_2, Γ_{-1} et $\Gamma_{3/2}$.
b) Que vaut $f(x,y)$ lorsque $(x,y)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$?
c) **Si** f atteint un extremum en C, celui-ci est-il strict ?
d) Soit $a\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. Montrer que pour $(x,y)\in\Gamma_a$, $f(x,y)-f(\mathrm{C})$ est du signe de a^2-3a+2.
e) Qu'a-t-on démontré dans cette question ?

6. a) Justifier que tout point de $\mathcal{R}$ d'abscisse non nulle appartient à une et une seule courbe Γ_a.
b) Dans le repère précédent, représenter la zone dans lesquelles le signe de $f(x,y)-f(\mathrm{C})$ est positif, et celle où ce signe est négatif.
c) Retrouver ces résultats en factorisant $f(x,y)-f(\mathrm{C})$.

Solution (**Ex.1** – *Étude d'une fonction de deux variables*)

1. *Résultat préliminaire*
Méthode epsilonnique –
$g(x)=\alpha+x^2(\beta+o(1))=\alpha+x^2(\beta+\varphi(x))$ où φ est une fonction telle que $\varphi(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$.

Appliquons la définition de la limite avec $\dfrac{\beta}{2}>0$:

$$\exists\varepsilon>0,\quad\forall x\in\left]-\varepsilon\,;\ \varepsilon\right[,\quad|\varphi(x)|\leqslant\frac{\beta}{2}\text{ i.e. }-\frac{\beta}{2}\leqslant\varphi(x)\leqslant\frac{\beta}{2}\text{ donc }\frac{\beta}{2}\leqslant\beta+\varphi(x).$$

On a alors, puisque $\dfrac{\beta}{2}>0$,

$$\forall x\in\left]-\varepsilon\,;\ \varepsilon\right[,\quad g(x)=\alpha+x^2(\beta+\varphi(x))\geqslant\alpha,$$

donc g atteint un minimum valant α en 0.
Méthode rapide –
$g(x)-\alpha \underset{x\to 0}{=} \beta x^2 + o\left(x^2\right)$ donc $g(x)-\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \beta x^2$, or deux quantités équivalentes au voisinage d'un point sont de même signe au voisinage de ce point. Comme $\beta x^2 \geqslant 0$ puisque $\beta > 0$, g atteint un minimum valant α en 0.

2. a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ car somme de produits de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{R}$.

b) $\forall (x,y) \in \mathcal{R}, \nabla f(x,y) = \big(3\sin(x)y + 4\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x), 2y + 3(1-\cos(x)\big)$
Résolvons $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
Comme $\partial_1 f(x,y) = \sin(x)\big(3y + 4 - 4\cos(x)\big)$, une disjonction de cas s'impose.
1er cas : $x = 0$.
Alors comme $\nabla f(0,y) = (0,2y)$, on conclut : $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$.
2nd cas : $x \neq 0$, donc $\sin(x) \neq 0$ puisque $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 4(1-\cos(x)) + 3y = 0 \\ 3(1-\cos(x)) + 2y = 0 \end{cases} \overset{2L_1-3L2}{\Rightarrow} 1-\cos(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, ce qui est exclu.
Conclusion : f n'a qu'un point critique, à savoir $\mathrm{C} = (0,0)$.

3. Uniquement pour les 5/2 !

a) f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec des justifications à celles de la classe $\mathcal{C}^1$.
$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3\cos(x)y + 4\cos(x) + 4\sin^2(x) - 4\cos^2(x) & 3\sin(x) \\ 3\sin(x) & 2 \end{pmatrix}$, donc
$\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) La hessienne est positive mais non définie, donc on ne peut rien conclure concernant la nature du point critique $\mathrm{C} = (0,0)$.

4. a) $f(\mathrm{C}) = -2$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, f(x,0) - f(\mathrm{C}) = -4\cos(x) + 2\cos^2(x) + 2 = 2(\cos(x)-1)^2 \geqslant 0$$

donc $f(x,0) \geqslant f(\mathrm{C})$: en suivant la droite d'équation $y = 0$, f atteint un minimum local en C.

b) De façon analogue,

$$\forall y \in \left]-1\,;\,1\right[, f(0,y) - f(\mathrm{C}) = y^2 \geqslant 0$$

donc en suivant la droite d'équation $x = 0$, f atteint un minimum local en C.

c) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $kx \in \left]-1\,;\,1\right[$, c'est-à-dire au voisinage de 0. En développant $\cos(x)$ à l'ordre 2, on obtient

$$f(x,kx) = -2 + k^2x^2 + o\left(x^2\right) = f(\mathrm{C}) + k^2x^2 + o\left(x^2\right).$$

En vertu de la question préliminaire, ceci prouve qu'en suivant la droite d'équation $y = kx$, f atteint un minimum local en C.

d) On a démontré qu'en suivant n'importe quelle droite passant par C, f atteint un minimum local en C.

5. a) Voir en fin de corrigé.

b) Pour $(x,y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, on obtient $f(x,y) = -2$.

c) Si cet extremum -2 était strict, il existerait un disque $\mathcal{D}$ de rayon $r > 0$ autour de C sur lequel f ne prendrait pas la valeur -2. Ceci est impossible car une infinité de point de Γ_1 appartiennent à $\mathcal{D}$.

d) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$. Pour $(x,y) \in \Gamma_a$,
$f(x,y)-f(\mathrm{C}) = f(x, a(\cos(x)-1))+2 = \cdots = (a^2-3a+2)(\cos(x)-1)^2$, donc $f(x,y)-f(\mathrm{C})$ est du signe de a^2-3a+2.

e) $a^2-3a+2 = (a-1)(a-2)$ donc pour tout $a \in]\,1\,;\ 2[$, $f(x, a(\cos(x)-1)) - f(\mathrm{C}) < 0$ pour $x \neq 0$ et pour tout $a \in]-\infty\,;\ 1[\cup]\,2\,;\ +\infty[$, $f(x, a(\cos(x)-1)) - f(\mathrm{C}) > 0$ toujours pour $x \neq 0$.
Suivant Γ_a, $f(\mathrm{C})$ est un minimum strict si $a \notin [\,1\,;\ 2]$ et un maximum si $a \in]\,1\,;\ 2[$. Donc f n'atteint pas d'extremum en C

6. a) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ et $y\,]-1\,;\ 1[$. Comme $\cos(x) \neq 1$,

$$y = a(\cos(x)-1) \iff a = \frac{y}{\cos(x)-1}.$$

Donc (x,y) appartient à une et une seule courbe Γ_a.

b) Voir en fin de corrigé.

c) $f(x,y) - f(\mathrm{C}) = \big(y-(\cos(x)-1)\big)\big(y-2(\cos(x)-1)\big)$ et le signe de ce produit dépend de la position de (x,y) par rapport aux courbes Γ_1 et Γ_2.