Exercice 1 *Exemple polynomial*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. En déduire, à l'aide d'identités remarquables, ses extrema sur $\mathbb{R}^2$.

Solution (**Ex.1 –** *Exemple polynomial*)

1. $\nabla f(x,y) = (x-y+1) \times (2,-2)$

Les points critiques de f sont tous les points de la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-y+1)^2 - 1 \geqslant -1$, or si (a,b) est un point critique $f(a,b) = -1$. Donc f atteint en chaque point critique un minimum global valant -1.

Exercice 2 *Exemple polynomial, bis*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2(x-y) + x^3 + y^3$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Qu'en déduire quant aux extrema de f ?

Solution (**Ex.2 –** *Exemple polynomial, bis*)

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2$ ne s'annulant pas, f n'a aucun point critique.

2. ... donc f n'atteint aucun extremum dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 *Inspiré par ECRICOME 99*

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x^n - y)\mathrm{e}^{x-y}$.

1. Déterminer les points critiques de f_n sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer, qu'en ses points critiques, la fonction f_1 atteint un minimum global.

Solution (**Ex.3 –** *Inspiré par ECRICOME 99*)

1. $\nabla f_n(x,y) = 0 \iff (nx^{n-1} + x^n - y, -1 - x^n + y) = (0,0)$

- Si $n = 1$, les points critiques sont les $(x, x+1)$ où $x \in \mathbb{R}$.
- Si $n \geqslant 2$ est pair, l'unique point critique est $\left((1/n)^{1/(n-1)}, 1 + (1/n)^{n/(n-1)}\right)$.
- Si $n \geqslant 2$ est impair, les points critiques sont $\left((1/n)^{1/(n-1)}, 1 + (1/n)^{n/(n-1)}\right)$ et $\left(-(1/n)^{1/(n-1)}, 1 - (1/n)^{n/(n-1)}\right)$.

2. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x,y) = g(x-y)$ où $g : t \mapsto t\exp(t)$. L'étude de g sur $\mathbb{R}$ montre que g atteint un minimum global en -1 donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x,y) \geqslant g(-1)$ *i.e.* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x,y) \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$. Or en chaque point critique $(x, x+1)$, f_1 vaut $-\mathrm{e}^{-1}$. Donc en chaque point critique, f_1 atteint son minimum global égal à $-1/\mathrm{e}$.

Exercice 4 *Une fonction définie par une intégrale*

Soit $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \int_x^y \varepsilon(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner ses dérivées premières.

2. On suppose que $\varepsilon : t \mapsto t - 1$. Déterminer les extrema de f.

Solution (**Ex.4 –** *Une fonction définie par une intégrale*)

1. Soit Φ la primitive de ε s'annulant en 0. Φ est $\mathcal{C}^1$ car $\Phi' = \varepsilon$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \Phi(y) - \Phi(x)$ donc f admet des dérivées partielles premières :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\varepsilon(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varepsilon(y)$

Comme ε est continue, ces dérivées partielles sont continues donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Par les dérivées précédentes, l'unique point critique est $\mathcal{C} = (1,1)$ et $f(\mathcal{C}) = 0$. Or

- $\forall h \in \left]-1\,;\ 1\right[\setminus \{0\}, f(1, 1+h) = \displaystyle\int_1^{1+h} (t-1)\mathrm{d}t = \frac{h^2}{2} > 0,$
- $\forall h \in \left]-1\,;\ 1\right[\setminus \{0\}, f(1+h, 1) = \displaystyle\int_{1+h}^{1} (t-1)\mathrm{d}t = -\frac{h^2}{2} < 0$

donc f n'atteint pas d'extremum en $\mathcal{C}$, donc f n'atteint aucun extremum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 *Extrema sur un disque*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les extrema globaux de f sur le disque

$$\mathrm{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Solution (**Ex.5 –** *Extrema sur un disque*)

1. f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$. $(0, 0)$ est l'unique point critique, avec $f(0, 0) = 0$, mais $f(x, 0) = x^3$ est du signe de x donc
$\forall x > 0, f(x, 0) > f(0, 0)$ et $\forall x < 0, f(x, 0) < f(0, 0)$: pas d'extremum local en $(0, 0)$.
Bilan : f n'a aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D le disque fermé de centre $\mathrm{O} = (0, 0)$ et de rayon 2. Comme f est continue sur le fermé borné D, f y est bornée et atteint ses bornes. Ses bornes ne sont pas atteintes à l'intérieur du disque ouvert, car alors ces points constitueraient des extremums locaux (or il n'y en n'a pas).

Il faut donc chercher les extrema de f sur D sur le cercle frontière $\mathrm{C} \overset{\text{déf}}{=} \{(x, y)/x^2 + y^2 = 4\} = \{(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)/\alpha \in [\,0\,;\ 2\pi]\}$.

Directement...

$\forall (x, y) \in \mathrm{C}, f(x, y) = x^3 + y^2 = x^3 + 4 - x^2$.
Étudions $g : x \mapsto x^3 + y^2 = x^3 + 4 - x^2$ sur $[\,-2\,;\ 2]$.
$g'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ donc les extremums éventuels de g sont parmi $g(-2) = -8$, $g(0) = 4$, $g(3/2) = \dfrac{104}{27} = 4 - \dfrac{4}{27}$ et $g(2) = 8$. Donc le minimum de g est -8 atteint en $(-2, 0)$ et son maximum est 8 atteint en $(2, 0)$.

...ou avec la paramétrisation trigonométrique...

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$f(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) = 8\cos^3(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) = 8\cos^3(\alpha) + 4(1 - \cos^2(\alpha)) = 4\mathrm{P}(\cos\alpha)$ où $\mathrm{P} = 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1$.
$\mathrm{P}' = 6\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = 2\mathrm{X}(3\mathrm{X} - 1)$, P croît sur $[\,-1\,;\ 0]$, décroît sur $[\,0\,;\ 1/3]$ et croît sur $[\,1/3\,;\ 1]$.
$\mathrm{P}(-1) = -2$, $\mathrm{P}(0) = 1$, $\mathrm{P}(1/3) = 26/27$ et $\mathrm{P}(1) = 2$.
Le maximum de P est 2, le minimum -2.
Sur la frontière, pour chaque point du cercle il existe $\alpha \in [\,0\,;\ 2\pi[$ tel que $\mathrm{M} = (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$. Alors $f(\mathrm{M}) = 4\mathrm{P}(\cos(\alpha)) \in [\,-8\,;\ 8]$ d'après 2.b)
De plus, $f(\mathrm{M}) = -8$ pour $\mathrm{P}(\cos(\alpha)) = -2$ donc pour $\cos(\alpha) = -1$, donc pour $\alpha = \pi$, donc pour $\mathrm{M} = (-2, 0)$.
De même, $f(\mathrm{M}) = 8$ pour $\mathrm{P}(\cos(\alpha)) = 2$ donc pour $\cos(\alpha) = 1$, donc pour $\alpha = 0$, donc pour $\mathrm{M} = (2, 0)$.
Les extremums de f sur D sont -8 et 8 atteints en $(-2, 0)$ et $(2, 0)$ respectivement.

Exercice 6 *Suivant les droites ou suivant une parabole ?*

Soit f définie par $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$

1. Déterminer l'unique point critique de f.

2. a) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que, pour (x, y) parcourant la droite d'équation $y = ax$, $f(x, y)$ atteint un minimum en $(0, 0)$.

b) Qu'en est-il lorsque (x, y) parcourt la parabole d'équation $y = 2x^2$?

3. a) Que peut-on en conclure ?

b) Représenter les régions du plan où f prend des valeurs positives (resp. négatives).

Solution (**Ex.6 –** *Suivant les droites ou suivant une parabole ?*)

1. f polynomiale donc $\mathcal{C}^1$.
$\nabla f(x, y) = 0 \iff (12x^3 - 8xy, -4x^2 + 2y) = (0, 0)$
$\iff (x(3x^2 - 2y), y - 4x^2) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$
Donc l'unique point critique de f est $(0, 0)$.

2. a) $f(x, ax) = x^2(3x^2 - 4ax + a^2)$ est positif au voisinage de 0. En effet :
• si $a = 0$, $f(x, ax) = 3x^4$;
• si $a \neq 0$, le trinôme $3x^2 - 4ax + a^2$ vaut $a^2 > 0$ en $x = 0$, donc est strictement positive au voisinage de 0. Ainsi lorsque (x, y) parcourt la droite Δ_a, $f(x, y)$ atteint un minimum local valant 0 en $(0, 0)$.

b) $f(x, 2x^2) = -x^4$ atteint un maximum valant 0 en $(0, 0)$.

3. a) f n'atteint pas d'extremum local en $(0, 0)$.

b) On vérifie que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$...
On trace les paraboles d'équation $\mathcal{P}_3\ :\ y = 3x^2$ et $\mathcal{P}_1\ :\ y = x^2$, lieux des points où f est nulle, puis on partitionne le plan suivant le signe

de f dans chacune des zones délimitées.

Exercice 7 *Variance minimale, variance maximale*

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. On pose $p_k \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{P}(X = k)$ et on cherche pour quelles valeurs de p_{-1}, p_0 et p_1 $\mathbb{V}(X)$ est maximale, ou est minimale.

1. Montrer que ce problème se ramène à la recherche des extremums de
$$f : (p_{-1}, p_1) \mapsto \ ???$$
sur le domaine fermé et borné $D = \{(p_{-1}, p_1) \in [0\,;\ 1]^2, p_{-1} + p_1 \leq 1\}$.

2. Résoudre le problème, et commenter les résultats.

Solution (**Ex.7 –** *Variance minimale, variance maximale*)

1. $\mathbb{E}(X) = -p_{-1} + p_1$ et $\mathbb{E}(X^2) = p_{-1} + p_1$, donc
$f(p_{-1}, p_1) = \mathbb{V}(X) = p_{-1}+p_1-(-p_{-1}+p_1)^2 = p_{-1}+p_1+2p_{-1}p_1-p_{-1}^2-p_1^2$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} p_{-1} \in [0\,;\ 1] \\ p_1 \in [0\,;\ 1] \\ p_0 \in [0\,;\ 1] \\ p_{-1} + p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_{-1} \in [0\,;\ 1] \\ p_1 \in [0\,;\ 1] \\ p_{-1} + p_1 \leqslant 1 \\ p_0 = 1 - p_{-1} - p_1 \end{cases}$$
qui correspondent bien au domaine D .

2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale sur l'intérieur de D.
$\nabla f(p_{-1}, p_1) = (0, 0)$ conduit à un système linéaire sans solution. f n'a pas de point critique donc pas d'extremum à l'intérieur de D.
$g : x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum sur $[0\,;\ 1]$ qui vaut $1/4$ en $x = 1/2$, or $f(p_{-1}, 0) = g(p_{-1})$, $f(0, p_1) = g(p_1)$ et $f(p_{-1}, 1-p_{-1}) = 4g(p_{-1})$ donc le maximum de f sur le bord de D est $4 \times \frac{1}{4} = 1$ obtenu pour $p_{-1} = 1/2$ et $p_1 = 1/2$.
$\mathbb{V}(X)$ est maximum pour $p_{-1} = p_1 = 1/2$ et $p_0 = 0$, c'est-à-dire X suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$: X prend équiprobablement les valeurs extrêmes, maximisant la variance.
$\mathbb{V}(X)$ est minimum pour $(p_{-1}, p_0, p_1) = (1, 0, 0)$, $(p_{-1}, p_0, p_1) = (0, 1, 0)$ ou $(p_{-1}, p_0, p_1) = (0, 0, 1)$ c'est-à-dire lorsque X est constante, ce qui annule la variance.

Exercice 8 *Sur une partie ouverte de* $\mathbb{R}^2$

Soit $f :]0\,;\ +\infty[^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + y) \times \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.
Déterminer les points critiques de f puis ses extremums.

Solution (**Ex.8 –** *Sur une partie ouverte de* $\mathbb{R}^2$)

Notons que $f(x, y) = 2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2 + \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

• f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\ +\infty[^2$ avec
$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{x^2y^2}\left(2x - x^2y - y^3, 2y - x^3 - y^2x\right).$$
Si (x, y) est un point critique, la différence des deux dérivées conduit à $x^3 - x^2y + y^2x - y^3 + 2x - 2y = 0$, *i.e.* $(x - y)(x^2 + y^2 + 2) = 0$. Donc $x = y$.
Réciproquement, si $x = y$, alors $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.
Les points critiques de f sont les points (x, x) où $x \in \mathbb{R}$.

• En ses points critiques, f vaut 4. On a
$$\forall (x, y) \in]0\,;\ +\infty[^2, f(x, y) - 4 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 \geqslant 0.$$
Donc le minimum global de f est 4 et est atteint en tous ses points critiques.

Exercice 9 *Extremum à deux variables*

Soit $f(x, y) \mapsto x \ln y - y \ln x$.
Préciser le domaine de définition de f et étudier l'existence d'extrema.

Solution (**Ex.9 –** *Extremum à deux variables*)

1. $\mathcal{D}_f =]0\,;\ +\infty[^2$.

2. • f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.
• Soit (x, y) un point critique de f.
$$\nabla f(x, y) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \ln y = \dfrac{y}{x} \\ \ln x = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$
En particulier, $\ln y > 0$ donc $y > 1$.

$$\nabla f(x,y)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y}{\ln y} \\ \ln\dfrac{y}{\ln y}=\dfrac{1}{\ln y} \end{cases} \Longrightarrow \ln y-\ln\ln y-\frac{1}{\ln y}=0.$$

Étudions de $g : t \mapsto t-\ln t-\dfrac{1}{t}$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

$g' : t \mapsto \dfrac{t^2-t+1}{t^2} > \dfrac{(t-1)^2}{t^2} \geq 0$ donc g est strictement croissante, et comme $g(1)=0$, 1 est l'unique racine de g sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

Donc $y=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ et $x=\mathrm{e}$.

- Réciproquement, $\nabla f(\mathrm{e},\mathrm{e})=(0,0)$.
- Donc (e,e) est l'unique point critique que f, donc s'il existe un extremum, il est nécessairement atteint en (e,e).
- $f(\mathrm{e},\mathrm{e})=0$.

$f(\mathrm{e}+h,\mathrm{e})=\mathrm{e}+h-\mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}+h))=\dfrac{h^2}{2\mathrm{e}}+o\left(h^2\right)$ est positif au voisinage de 0 et

$f(\mathrm{e},\mathrm{e}+k)=\mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}+k))-(\mathrm{e}+k)=-\dfrac{k^2}{2\mathrm{e}}+o\left(k^2\right)$ est négatif au voisinage de 0 :

il n'y a pas d'extremum en (e,e), donc f n'a aucun extremum sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 10 *Recherche d'extremum*

Soit $f :]\,0\,;\ +\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto x\big((\ln x)^2+y^2\big)$.

Déterminer les extrema locaux de f sur $]\,0\,;\ +\infty[\times\mathbb{R}$

Solution (**Ex.10 –** *Recherche d'extremum*) • f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}=\,]\,0\,;\ +\infty[\times\mathbb{R}$ par les propriétés algébriques classiques.

• $\nabla f(x,y)=(\ln^2 x+2\ln x+y^2, 2xy)$ et comme $x\neq 0$,

$\nabla f(x,y)=0 \Longleftrightarrow (y=0 \text{ et } \ln^2 x+2\ln x=0) \Longleftrightarrow (y=0 \text{ et } \ln x(\ln x+2)=0)$

$\Longleftrightarrow ((x,y)=(1,0) \text{ ou } (x,y)=(\mathrm{e}^{-2},0))$.

f possède deux points critiques : $\mathrm{A}=(1,0)$ et $\mathrm{B}=(\mathrm{e}^{-2},0)$.

• $\forall x>0, \forall y\in\mathbb{R}, f(x,y)\geq 0$ or $f(1,0)=0$, donc minimum global en $(1,0)$.

• Avec un D.L. à l'ordre 2 en h : $f(e^{-2}+h,0)-f(e^{-2},0)=-\mathrm{e}^2h^2+o(h^2)$, donc est négative strictement au voisinage de 0, tandis que : $f(e^{-2},h)-f(e^{-2},0)=\mathrm{e}^{-2}h^2+o(h^2)$, donc est positive strictement au voisinage de 0, donc il n'y a pas d'extremum.

Exercice 11 *Extremums de x^y*

Quels sont les extrémums locaux de $f : (x,y)\mapsto x^y$ sur $]\,0\,;\ +\infty[\times\mathbb{R}$?

Solution (**Ex.11 –** *Extremums de x^y*)

Par définition, $f(x,y)=\exp(y\ln(x))$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\nabla f(x,y)=(yx^{y-1},\ln(x)x^y)$.

L'unique point critique de f est $(1,0)$ et $f(1,0)=1$.

$\forall h\in\,]\,0\,;\ 1\,[, \forall k\in\,]\,0\,;\ 1\,[, f(1+h,k)=(1+h)^k>1$ car $k\ln(1+h)>0$,

$\forall h\in\,]\,0\,;\ 1\,[, \forall k\in\,]\,0\,;\ 1\,[, f(1-h,k)=(1-h)^k<1$ car $k\ln(1-h)<0$,

donc f ne présente pas d'extremum.