Constante d'Euler, équivalence de restes et développement asymptotique de la série harmonique...

... encore des thèmes ultraclassiques de concours

Exercice 1 *La constante γ d'Euler et développement de la série harmonique*

1. *Constante d'Euler*
En considérant la suite définie pour tout $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

montrer qu'il existe une constante γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

2. *Équivalence des t.g. et équivalence des restes*

a) Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles ne s'annulant pas.
Montrer l'équivalence

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \quad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\, |b_n|\,.$$

b) Soit $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} b_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.
On note $\mathrm{R}_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $\mathrm{R}'_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ leur reste respectif.
On suppose que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Montrer que

$$\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{R}'_n.$$

3. *Application à la série de Riemann de paramètre 2.*
On note, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}.$$

b) En déduire un équivalent de R_n.

4. *Exploitation pour un développement asymptotique de la série harmonique*
Soit $w_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$,

$$w_n = \frac{1}{n} - \big(\ln(n) - \ln(n-1)\big).$$

a) Déterminer un équivalent simple de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En s'intéressant à $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$