Exercice 1 *Limites classiques*

Déterminer les limites des expressions suivantes au point indiqué quand elles existent :

a) $\dfrac{x^2-x-12}{x-4}$ en 4 **b)** $x+\sqrt{x^2-1}$ en $-\infty$ **c)** $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

d) $\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$ **e)** $x\sin\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$ **f)** $x\sin x$ en $+\infty$

g) $\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ en 0 **h)** $\dfrac{\sin x}{x}$ en $-\infty$ **i)** $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en $+\infty$

Solution (**Ex.1 –** *Limites classiques*)

a) $\forall x\neq 4, \dfrac{x^2-x-12}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x+3)}{x-4}=x+3\xrightarrow[x\to 4]{}7.$

b) $\forall x<-1, f(x)\overset{\text{déf.}}{=}x+\sqrt{x^2-1}=x+|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$

donc $f(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}x\dfrac{1}{2x^2}\xrightarrow[x\to-\infty]{}0.$

c) • Version quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\xrightarrow[x\to 0]{}1.$$

• Version développement limité :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\big(1+x/2+o(x)\big)-\big(1-x/2+o(x)\big)}{x}=1+o(1)\xrightarrow[x\to 0]{}1.$$

d) $x\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\times\dfrac{-a}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim}-a$ donc $x\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}-a.$

Par composition par exp : $\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x\xrightarrow[x\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-a}.$

e) $x\sin\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\sim}x\times\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$

f) Soit $f : x\mapsto x\sin x$.

$\forall n\in\mathbb{N}, f(n\pi)=0\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$

$\forall n\in\mathbb{N}, f\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty,$

donc f diverge (sans limite) en $+\infty$.

g) $\forall x\in\mathbb{R}^*, \left|\sin x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|\sin x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0$, donc $\sin x\sin\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ par encadrement.

h) $\forall x\in\mathbb{R}^*, \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\left|\dfrac{1}{x}\right|$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right|=0$, donc $\dfrac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$ par encadrement.

i) $\forall x>1, \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$, donc $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$. Donc $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$

Exercice 2 *Convergence*

1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

a) $\ln(n+1)-\ln(n)$; **b)** $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

2. Soit u une suite réelle. *Frai ou faux ?*

a) $\left(u_{n+1}-u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\right)\Longrightarrow\left(u \text{ converge }\right)$?

b) $\left(u \text{ converge }\right)\Longrightarrow\left(u_{n+1}-u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\right)$?

Solution (**Ex.2 –** *Convergence*)

1. a) $\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}.$

b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/2}-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}.$

2. a) Faux : les suites $\big(\ln(n)\big)_{n\geq 1}$ ou $\big(\sqrt{n}\big)_{n\geq 0}$ sont deux contre-exemples.

b) Vrai : car (u_{n+1}) est une suite extraite de la suite u, donc converge vers la même limite que u.

Exercice 3 *Équivalences et signes*

1. On considère deux suites réelles u et v telles que v soit non nulle à partir d'un certain rang.

On suppose que : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$.

Montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n=\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)-\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution (**Ex.3 –** *Équivalences et signes*)

1. Soit n_0 tel que : $\forall n\geq n_0, \quad v_n\neq 0$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, en prenant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1/2$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}.$$

Alors : $\forall n \geq n_1, \quad 0 < \dfrac{u_n}{v_n}$.

Donc pour tout $n \geq n_1$, u_n et v_n sont de même signe.

2. $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^3} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^3}$.

À partir d'un certain rang, u_n est strictement négatif.

Exercice 4 *Fonctions bornées*

Soit f une fonction réelle continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. a) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie. Montrer que f est bornée.

b) f atteint-elle nécessairement un maximum global ?

2. On suppose que f est nulle en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f atteint un maximum global et un minimum global.

Solution (**Ex.4 –** *Fonctions bornées*)

1. a) Soit $\ell \overset{\text{déf.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Par la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leqslant 1$, donc $\forall x \geq A, \ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$: f est bornée sur $[A\,;\,+\infty[$.

Comme f est continue sur $[0\,;\,A]$ qui est fermé borné, f est aussi bornée sur $[0\,;\,A]$.

Ainsi, f est bornée sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) $f : [0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto -\dfrac{1}{x+1}$ est continue strictement croissante avec $f([0\,;\,+\infty[) = \left[f(0)\,;\,\lim\limits_{+\infty} f\right[= [-1\,;\,0[$ n'atteint pas de maximum global.

2. • 1-er cas : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 0$. Alors le maximum global de f est 0, atteint en 0.

• 2-ème cas : $\exists a \in]0\,;\,+\infty[, f(a) > 0$. Alors par la définition de la limite :

$$\exists b \in]a\,;\,+\infty[, \forall x \geq b, f(x) \leqslant f(a).$$

Comme f est continue sur $[0\,;\,b]$, f y atteint un maximum M au moins égal à $f(a)$ (car $a \in [0\,;\,b]$). De plus, sur $[b\,;\,+\infty[$, f est majorée par $f(a)$ donc par M.

Donc f atteint un maximum global M sur $[0\,;\,+\infty[$.

• On raisonne de façon analogue pour justifier l'existence d'un minimum global.

Variante :

On considère la fonction $g : [0\,;\,\pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si } x \in [0\,;\,\pi/2[\\ 0 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$. Elle est continue sur $[0\,;\,\pi/2]$ donc bornée et atteint ses bornes. Et on passe à f sans problème : les extremums de f sur $[0\,;\,+\infty[$ sont ceux de g sur $[0\,;\,\pi/2]$...

Exercice 5 *Accroissements écrasés*

Soit $\alpha \in]1\,;\,+\infty[$ un réel fixé.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(u) - f(v)| \leq |u - v|^\alpha \quad (\sharp).$$

Solution (**Ex.5 –** *Accroissements écrasés*)

Soit $v \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall u \neq v, \quad \left|\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}\right| \leq |u - v|^{\alpha - 1}$.

Par encadrement, comme $\alpha - 1 > 0$, $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} \xrightarrow[u\to v]{} 0$: f est dérivable en v avec $f'(v) = 0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle, donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est constante, alors f vérifie $(\sharp)$.

Ainsi, les fonctions vérifiant $(\sharp)$ sont exactement les fonctions constantes.

Exercice 6 *Rolle sur des intervalles non bornés*

1. Soit $f : [0\,;\,+\infty[$ une fonction dérivable.

On suppose que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

a) Montrer que $g : [0\,;\,\pi/2[, x \mapsto f\big(\tan(x)\big)$ est dérivable et peut être prolongée en une fonction continue sur $[0\,;\,\pi/2]$.

b) En déduire qu'il existe $c \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. a) Énoncer et démontrer une propriété analogue pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) En est-il de même si cette limite commune est infinie ?

Solution (**Ex.6 –** *Rolle sur des intervalles non bornés*)

1. a) Comme $\tan([0\,;\,\pi/2[) = [0\,;\,+\infty[$, g est dérivable par composition de fonctions dérivables.
Donc g est continue sur $[0\,;\,\pi/2[$. De plus, $\lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie : c'est $f(0)$. Donc g peut être prolongée en une fonction continue sur $[0\,;\,\pi/2]$ en posant $g(\pi/2) = f(0)$.

b) g étant continue sur $[0\,;\,\pi/2]$ et dérivable sur $[0\,;\,\pi/2[$, avec $g(0) = g(\pi/2) = f(0)$, il existe, d'après le théorème de Rolle, $a \in\,]0\,;\,\pi/2[$ tel que $g'(a) = 0$.
Or : $\forall x \in\,]0\,;\,\pi/2[\,, g'(x) = f'\big(\tan(x)\big) \times (1+\tan^2 x)$.
Donc : $f'(\mathrm{Arctan}(a))(1+\tan^2 a) = 0$, et $f'(\tan(a)) = 0$.
Or : $c \overset{\text{déf.}}{=} \tan(a) \in\,]0\,;\,+\infty[$. Donc il existe bien $c \in\,]0\,;\,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. a) • Énoncé :
soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
• Preuve :
On reprend la même méthode que précédemment avec :

$$g : [-\pi/2\,;\,\pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f\big(\tan(x)\big) & \text{si } x \in\,]-\pi/2\,;\,\pi/2[\,, \\ \lim\limits_{y\to\pm\infty} f(y) & \text{sinon .} \end{cases}$$

g est continue sur $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$ et dérivable sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ avec $g(-\pi/2) = g(\pi/2)$, donc par le théorème de Rolle il existe $a \in\,]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ tel que $g'(a) = 0$. Et du coup $f'\big(\tan(a)\big) = 0$.

b) Il en est de même si cette limite commune est infinie. Supposons pour fixer les idées que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in\,]-\infty\,;\,0[$ tel que $f(a) = f(0)+1$ et il existe $b \in\,]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(b) = f(0)+1$.
Le théorème de Rolle sur $[a\,;\,b]$ montre qu'il existe $c \in\,]a\,;\,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : un raisonnement analogue via le théorème des valeurs intermédiaires aurait pu permettre de démontrer les propriétés précédente sans utiliser tan ... dont le mérite est d'envoyer bijectivement et de façon $\mathcal{C}^\infty$ des intervalles bornés sur des intervalles non bornés.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ *Dérivable... lipschitzienne*

Soit $f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

1. Dans cette question, on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0\,;\,1], \quad |f(x)| \le k\,|x|.$$

2. Dans cette question, on suppose f dérivable.

a) Soit $g :]0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable en une fonction continue sur $[0\,;\,1]$.

b) En déduire :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0\,;\,1], \quad |f(x)| \le k\,|x|.$$

Solution (**Ex.7 –** *Dérivable... lipschitzienne*)

1. Comme f' est continue sur le segment fermé borné $[0\,;\,1]$, $|f'|$ est bornée : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in [0\,;\,1], |f'(t)| \leqslant k$.
Soit $x \in [0\,;\,1]$ quelconque. L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur le segment $[0\,;\,x]$ donne :
$|f(x) - f(0)| \le k\,|x-0|$. Ainsi :

$$|f(x)| \le k\,|x|.$$

2. a) $g :]0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur $]0\,;\,1]$ comme quotient de fonctions cotinues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Comme : $\forall x \in\,]0\,;\,1], g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et f est dérivable en 0, g admet une limite finie en 0, égale à $f'(0)$.
Ainsi g est prolongeable par continuité en 0.

b) J'appelle encore g ce prolongement par continuité. g est continue sur le segment fermé borné $[0\,;\,1]$, donc g est bornée :
$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in [0\,;\,1], |g(x)| \leqslant k$.
Vu la définition de g : $\forall x \in\,]0\,;\,1], |f(x)| \leqslant k\,|x|$.

Et comme l'inégalité est claire pour $x=0$,
$$\forall x \in [\,0\,;\ 1\,]\,, |f(x)| \leqslant k\,|x|.$$

Exercice 8 *Divergence de la série harmonique*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $\quad \mathrm{H}_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geq \dfrac{1}{2}$.

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n$.

Solution (**Ex.8 –** *Divergence de la série harmonique*)

1. $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2. $\mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ donc (H_n) est croissante, donc soit converge, soit diverge vers $+\infty$.
Si $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0 \geq \dfrac{1}{2}$: absurde.

Exercice 9 *Nature des suites (cos(n)) et (sin(n))*

1. a) Exprimer $\sin(n+1) - \sin(n-1)$ en fonction de $\cos(n)$. En déduire que, si la suite $\big(\sin(n)\big)$ converge, alors $\big(\cos(n)\big)$ converge vers 0.

b) En exprimant $\cos(2n)$ à l'aide de $\cos^2(n)$, montrer finalement que $\big(\sin(n)\big)$ diverge.

2. Établir la divergence de la suite $\big(\cos(n)\big)$.

Solution (**Ex.9 –** *Nature des suites (cos(n)) et (sin(n))*)

1. a) $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n)$.
Si la suite $\big(\sin(n)\big)$ converge vers ℓ :
$\cos(n) = \dfrac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2\sin(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell - \ell}{2\sin(1)} = 0$.

b) Toujours si la suite $\big(\sin(n)\big)$ converge, en passant à la limite dans $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$, $0 = -1$: absurde. Donc $\big(\sin(n)\big)$ diverge, sans limite.

2. Si la suite $\big(\cos(n)\big)$ converge vers ℓ,
$\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2\sin(n)\sin(1)$ entraîne $\sin(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or la suite $(\sin(n))$ diverge. Donc $\big(\cos(n)\big)$ diverge.

Exercice 10 *Équivalent d'une somme*

On pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.10 –** *Équivalent d'une somme*)

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \dfrac{2}{2\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 0$.
De façon analogue, $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
$u_n - v_n = 2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc u et v sont adjacentes.

2. En notant ℓ leur limite commune,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Exercice 11 *Convergence de la série de Riemann d'ordre 2*

On pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Solution (**Ex.11 –** *Convergence de la série de Riemann d'ordre 2*)

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq 0$,

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)} \leq 0,$
$v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
u et v sont adjacentes.

Exercice 12 *Étude d'une suite récurrente*
Soit u la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1.$$

Montrer que u converge, si et seulement si, $u_0 \in [-2\,;\,2]$. Dans ce cas, préciser sa limite.

Solution (**Ex.12 –** *Étude d'une suite récurrente*)
Quelques observations qu'on pourra faire :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4}(u_n^2 + 4 - 4u_n) = \dfrac{1}{4}(u_n - 2)^2 \geq 0$ donc u est croissante.
Donc :
- soit u est majorée et converge ;
- soit u n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Étude des variations de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^2}{4} + 1$:
f est un trinôme du second degré de racine double 0.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Premier cas : $u_0 \in [-2\,;\,2]$.
Comme $f([-2\,;\,2] = [0\,;\,2]$, une récurrence immédiate montre que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0\,;\,2].$$
Ainsi u est majorée, donc convergente (car croissante).
Soit ℓ sa limite. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{4} + 1 = \dfrac{\ell^2}{4} + 1$. Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{\ell^2}{4} + 1$.
Or : $\ell = \dfrac{\ell^2}{4} + 1 \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2.$
Bilan : u converge, vers 2.
Second cas : $u_0 \notin [-2\,;\,2]$.
Comme $f\big(\,]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]\,2\,;\,+\infty[\,\big) = \,]\,2\,;\,+\infty[$, on a : $u_1 > 2$.
Supposons que u converge. Par le raisonnement précédent, sa limite ℓ est nécessairement 2. Or comme u est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant u_1$ donc $\ell \geq u_1$, donc $\ell > 2$, ce qui est impossible.
Bilan : u diverge, vers $+\infty$.

Exercice 13 *Suite récurrente et équation fonctionnelle*
Soit u une suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n).$$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer toutes les fonctions g continues en 0 telles :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g\big(\operatorname{Arctan}(x)\big) = g(x).$$

Solution (**Ex.13 –** *Suite récurrente et équation fonctionnelle*)

1. • Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) - x$. f est $\mathcal{C}^\infty$ avec :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$, f est strictement négative sur $]\,0\,;\,+\infty[$ et strictement positive sur $]-\infty\,;\,0[$.
• De plus, l'équation $\operatorname{Arctan}(x) = x$ n'a qu'une solution dans $\mathbb{R}$: 0, donc si u converge, ce sera nécessairement vers 0.
•*Premier cas :* $u_0 < 0$. Comme $\big(x < 0 \Longrightarrow \operatorname{Arctan}(x) < 0\big)$, une récurrence immédiate assure que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) > 0$, donc u est croissante, et majorée par 0. Donc u converge, nécessairement vers 0.

•*Deuxième cas :* $u_0 = 0$. Alors u est la suite nulle, convergente de limite nulle.

•*Troisième et dernier cas :* $u_0 > 0$. Comme $\big(x > 0 \Longrightarrow \text{Arctan}(x) < 0\big)$, une récurrence immédiate assure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) < 0$, donc u est décroissante, et minorée par 0. Donc u converge, nécessairement vers 0.

2. • Soit g une fonction continue en 0 vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g\big(\text{Arctan}(x)\big) = g(x) \quad (\natural).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \text{Arctan}(x_n).$$

($\natural$) entraîne, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x_n) = g(x)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$.

Par 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Par continuité de g en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(0)$.

Par unicité de la limite, $g(x) = g(0)$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g(0)$, donc g est constante.

• Réciproquement, il est clair que toute fonction g constante vérifie l'équation ($\natural$).

• Bilan : les solutions de l'équation fonctionnelle ($\natural$) sont exactement toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ *Suite implicite*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère l'équation

$$(\mathrm{E}_n) : \qquad x + \tan x = n$$

d'inconnue x dans $]-\pi/2\,;\ \pi/2[$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution, que l'on notera x_n.

2. Établir la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Solution (**Ex.14** – *Suite implicite*)

1. L'étude de $f :]-\pi/2\,;\ \pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto x + \tan x$ montre que f est une bijection de $]-\pi/2\,;\ \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$ car continue et strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to\pm\pi/2} f(x) = \pm\infty$.

Donc tout $n \in \mathbb{N}(\subset \mathbb{R})$ admet un unique antécédent par f, autrement dit, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution.

2. Quelques arguments :

• $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = f^{-1}(n)$ et f^{-1} a les mêmes variations que f, donc est strictement croissante. Donc (x_n) est une suite (strictement) croissante et majorée par $\pi/2$ donc convergente. Soit ℓ sa limite : $\ell \in [-\pi/2\,;\ \pi/2]$, et même $\ell \in [0\,;\ \pi/2]$ car $x_0 = 0$ (et (x_n) est croissante).

De $\tan x_n = n - x_n$ on tire en passant à la limite que $\tan x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc nécessairement $\ell = \pi/2$, car sinon, par continuité de tan en ℓ, on aurait $\tan \ell = +\infty$! ! !

• Plus expéditif : $n - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car (x_n) converge, et $x_n = \text{Arctan}(n - x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim\limits_{u\to+\infty} \text{Arctan}\, u$, i.e. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi/2$.