Formule de Stirling & intégrales de Wallis

Que des thèmes ultraclassiques de concours

Exercice 1 *Préambule : série des différences*

Démontrer la propriété de cours suivante :

Soit n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique (réelle ou complexe).
La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge.

Exercice 2 *La formule de Stirling par les intégrales de Wallis*

L'objectif de cet eercice est d'établir la **Formule de Stirling**

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

1. *Stirling à une constante près*

Soit v la suite définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = \ln n! - n \ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$$

a) Montrer que $v_{n+1} - v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire l'existence d'une constante $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ telle que

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{K}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

2. *Détermination de la constante*

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, la n-ième **intégrale de Wallis** par

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n.$$

b) Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \frac{\pi}{2}.$$

c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

d) Justifier que (W_n) décroissante.

e) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{n+1}\mathrm{W}_{n-1} \leqslant \mathrm{W}_n \leqslant \mathrm{W}_{n-1} \text{ puis } \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2} \leqslant n\mathrm{W}_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

f) En déduire un équivalent de W_n.

g) Déterminer alors K à l'aide de **c)** et **f)**.