Exercice 1 *Natures des séries de terme général u_n ...*

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geq 0)$

2. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \quad (n \geq 1)$

3. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (n \geq 0)$

4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^{-1} \quad (n \geq 1)$

5. $u_n = \sin \dfrac{\pi \times n^2}{n+1} \quad (n \geq 0)$

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad (n \geq 2)$

7. $u_n = \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R})$

8. $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (n \geq 0,\ a \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.1** – *Natures des séries de terme général u_n ...*)

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Par le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(1/n^2\right)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(1/n^2\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$: la série diverge.

3. $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \implies 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$. $\sum u_n$ converge par équivalence.

4. $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

5. $u_n = \sin\left(\pi \dfrac{(n+1)^2 - 2(n+1) + 1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n-1) + \dfrac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1} \sin \dfrac{\pi}{n+1}$: on conclut à la convergence grâce au critère spécial des séries alternées.

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème spécial de séries alternées,

$\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente,

$\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série absolument convergente donc convergente, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$,
donc $\sum u_n$ diverge.

7. $\ln(u_n) = n^\alpha \ln\left(1 - \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n^\alpha\left(1 - \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$

$\ln(u_n) = -\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2} + o\left(n^{\alpha-3}\right)$

- Si $\alpha < 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1/6$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-1/6)$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 2$: $n^2 u_n = \exp\left(2\ln(n) - \dfrac{1}{6}n^{\alpha-2} + o\left(n^{\alpha-3}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\ln(n) = o\left(n^{\alpha-2}\right)$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

8.
- Si $|a| < 1$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n$, or $\sum |a|^n$ est une série géométrique convergente.
Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Si $a = 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ et si $a = -1$, $u_{2n} = 1/2$ et $u_{2n+1} = -1/2$: dans le deux cas, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $|a| > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$, or $\sum \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$ est une série géométrique convergente.
Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 2 *Un peu tous les critères*

On pose, pour tout $n \geqslant 2$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)},\ v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n} \text{ et } w_n = \frac{1}{\ln^2(n)}.$$

1. a) Montrer que $\dfrac{1}{n} = o\left(w_n\right)$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?

2. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. a) Montrer que la suite $\left(|v_n|\right)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.

b) Déterminer un équivalent simple de $v_n - u_n$.

c) En déduire la nature de la série de terme général v_n.

Solution (**Ex.2** – *Un peu tous les critères*)

1. a) Par croissances comparées, $\dfrac{\ln^2(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln^2(n)}\right)$.

b) Comme la série harmonique de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, par négligeabilité la série de terme général w_n diverge.

2. Comme $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle, le théorème de Leibniz assure que la série de terme général u_n converge.

3. a) Pour $n \geqslant 3$, $\ln(n) + (-1)^n > 0$ et $|v_n| = \dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n}$.

$\ln(n+1) + (-1)^{n+1} - \ln(n) - (-1)^n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^{n+1}$ est du signe de $2(-1)^{n+1}$ car $1 < 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2 < \mathrm{e}$ donc $0 < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1 < 2$.

Donc la suite $\big(\ln(n) + (-1)^n\big)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang, donc la suite $(|v_n|$ n'est pas monotone non plus, même à partir d'un certain rang.

b) $v_n - u_n = \dfrac{-1}{\ln^2(n) + (-1)^n \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -w_n$.

c) Le théorème de Leibniz ne s'applique pas au terme général v_n (($|v_n|$) non décroissante).

On déduit par équivalence de termes négatifs que $\sum_n (v_n - u_n)$ diverge. Comme $\sum_n u_n$ converge, $\sum_n v_n$ diverge, sinon $\sum_n (v_n - u_n)$ convergerait par linéarité.

Exercice 3 *Natures en série*

Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(u_n)$.

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\cos(u_n)$.

Solution (**Ex.3** – *Natures en série*)

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge par le critère des séries alternées.

2. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1 + u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n - \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. De plus la série harmonique $\sum_n \dfrac{1}{2n}$ diverge.

Donc $\sum_n \ln(1 + u_n)$ diverge.

3. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin(u_n) = u_n + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. Donc par linéarité $\sum_n \ln(1 + u_n)$ converge.

4. Comme $\cos(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$, $\sum_n \cos(u_n)$ diverge grossièrement.

Exercice 4 *Convergences et sommes*

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. On s'intéresse maintenant à la série de terme général

$$v_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

a) Justifier que la série $\sum_n v_n$ converge.

b) Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{(n+1)^2} + \frac{c}{n(n+1)}.$$

c) On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Solution (**Ex.4** – *Convergences et sommes*)

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Tout marche pour prouver la convergence : majoration, équivalence, domination du terme général par $1/n^2$, mais **soyons directs :** la série de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge car la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge...

Par télescopage, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$

2. a) Par domination par le terme général de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 4$, $\displaystyle\sum_n v_n$ converge.

b) **Soyons directs,** en élevant la décomposition en éléments simples de 1., on trouve directement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{-2}{n(n+1)}.$$

c) Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) - 2 \times 1 = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

Exercice 5 *Fonction ζ de Riemann en 1*

Pour tout $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to1^+} \zeta(\alpha)$.

2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Solution (**Ex.5** – *Fonction ζ de Riemann en 1*)

1. Par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.

Donc : $\dfrac{1}{\alpha - 1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Par comparaison, $\displaystyle\lim_{\alpha\to1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.

La majoration n'était pas nécessaire mais sera utile pour la suite.

2. Et : $\forall \alpha > 1, 1 \leq \dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \leq (\alpha - 1) + 1$, donc par encadrement : $\dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \xrightarrow[\alpha\to1]{} 1$, et

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to1}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Exercice 6 *Avec ou sans la formule de Stirling*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.

a) Déterminer un équivalent de $\ln u_{n+1} - \ln u_n$.

b) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) En s'intéressant à la série de terme général $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big)$, montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq0} u_n$.

d) Soit $v_n = \sqrt{n}u_n$.

En s'intéressant à la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$, montrer que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge vers une limite strictement positive.

2. Retrouver les résultats précédents à l'aide de la formule de Stirling.

Solution (**Ex.6** – *Avec ou sans la formule de Stirling*)

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.

a) $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} = \ln \dfrac{2n+1}{2n+2} = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n+2}\right)$

$\ln u_{n+1} - \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

b) La série $\displaystyle\sum_{n\geq0} (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ tend vers $-\infty$, donc $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, donc $u_n = e^{\ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big) = \ln \dfrac{2n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq0} \ln\big((n+1)u_{n+1}\big) - \ln\big((n)u_n\big)$ diverge vers $+\infty$, donc $\ln(nu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $nu_n = e^{\ln(nu_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Comme $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, nu_n \geq 1$ *i.e.* $u_n \geq \dfrac{1}{n}$: $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge par comparaison de termes généraux positifs.

d) $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln u_{n+1} - \ln u_n$,

or $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

donc $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge.

On en déduit que $(\ln v_n)$ converge, vers une limite $c \in \mathbb{R}$. Donc $v_n = \mathrm{e}^{\ln v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \mathrm{e}^c > 0$. Cela signifie au passage que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{\sqrt{n}}$.

2. $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}2^{2n}(2\pi n)n^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ce qui permet de retrouver tous les résultats précédents... et même plus : $\ell = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 7 *Exemples de Séries de Bertrand*

Soit $\alpha \in]\,0\,;\,+\infty[$.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$.

Solution (**Ex.7** – *Exemples de Séries de Bertrand*)

1. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^\alpha t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,;\,+\infty[$ donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

- Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.
- Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(t)}\right]_2^x$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(x)} - \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}(2)} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

- Bilan : $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,;\,+\infty[$ donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

- si $\alpha > 1$, $f_\alpha(t) = o(1/t^\alpha)$ et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable ... $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.
- si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.
- si $\alpha < 1$, $f_\alpha(t) \geq f_1(t) \geq 0$ car $t^\alpha \leq t$, or $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$ diverge d'après le point précédent donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge ... $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

Exercice 8 *Une série semi-convergente très classique*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, et déterminer le signe de sa somme.

b) Cette série est-elle absolument convergente ?

2. En écrivant u_n à l'aide d'une intégrale, montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Solution (**Ex.8** – *Une série semi-convergente très classique*)

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Le théorème spécial pour les séries alternées permet de justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$. De plus, le signe de sa somme est celui de son premier terme, donc positif.

b) La série harmonique étant divergente, cette série n'est pas absolument convergente.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{0}{n} = \left[\dfrac{(-t)^n}{n}\right]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 -(-t)^{n-1}\mathrm{d}t$.

Alors :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = -\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 (-t)^{n-1}\mathrm{d}t \overset{\text{lin.}}{=} -\int_0^1 \sum_{n=1}^{N}(-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - I_N \text{ où } I_N = \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale :

$|I_N| \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^N}{1+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^N\mathrm{d}t \leq \frac{1}{N+1}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \ln(2) - I_N$ avec $I_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Exercice 9 *Comparaison de sommes et d'intégrales*

Pour $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, on pose : $\forall n \geq 1, \quad u_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.

Dans la suite, on pose, pour $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Soit $x \in \,]0\,;\,+\infty[$ et $f : [1\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t(t+x)}$.

a) Montrer que f est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$.

b) Justifier que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq S(x) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

c) En déduire un encadrement explicite (i.e. sans intégrale) de $S(x)$.

3. En déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.9** – *Comparaison de sommes et d'intégrales*)

1. $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ (ou "$\leq$", ou "O"...) permet de prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.

2. a) $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ assure que f est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$.

b) Il s'agit d'une comparaison série/intégrale, possible par la décroissance de f.

On prouve d'abord $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq u_n(x) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

On somme la partie gauche pour n de 1 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq S(x)$.

On somme la partie droite pour n de 2 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $S(x) - u_1(x) \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Et comme $u_1(x) = f(1)$, on obtient le résultat voulu.

c) On peut décomposer : $\dfrac{1}{t(t+x)} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\right)$.

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\ln t - \ln(t+x)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}\left[\ln\frac{t}{t+x}\right]_1^{+\infty} = \frac{ln(1+x)}{x}.$$

Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq S(x) \leq \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

3. On vérifie sans peine que $\dfrac{1}{1+x} = o\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

On pense alors que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ce que l'on prouve en divisant l'encadrement précédent :

$1 \leq \dfrac{xS(x)}{\ln(1+x)} \leq \dfrac{x}{(1+x)\ln(1+x)} + 1$. Le majorant tend vers 1 : les gendarmes assurent $\dfrac{xS(x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$...

Exercice 10 *Convergence*

Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Solution (**Ex.10** – *Convergence*)

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ par le théorème des séries alternées, et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge par domination, puisque la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge.
Donc la série initiale converge par linéarité.

Exercice 11 *Convergence*

Soit $\forall n \geq 0, \quad u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}} - 1$.

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Solution (**Ex.11** – *Convergence*)
$\dfrac{1}{n} \ln \dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(u_n + 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{n+1} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

Par équivalence de suites positives et Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercice 12 *Série à paramètre*

Soit $a \neq 0$ et $\forall n \geq 1, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^{n+1}}$.

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Solution (**Ex.12** – *Série à paramètre*)
• Si $a < 0$, $n^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $n^a + (-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$: divergence grossière.
• Supposons $a > 0$.

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a}\left(\dfrac{1}{1-(-1)^n/n^a}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^a}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a} + o\left(\dfrac{1}{n^a}\right)\right)$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} + \dfrac{1}{n^{2a}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2a}}\right) = v_n + w_n + o(w_n)$

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge par le théorème de Leibniz, $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$ étant décroissante de limite nulle.

$u_n - v_n = w_n + o(w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ qui est positive.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n - v_n$ converge si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}$ par équivalence et par les séries de Riemann.

Comme $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ssi $a > \dfrac{1}{2}$.

Par équivalence de suites positives et Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.