Durée : 3 heures

Exercice 1

Soit $\mathcal{D} = \left]0\,;\ +\infty\right[^2$. On considère la fonction

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer ses extrema.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{D}$?

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

3. Montrer que f admet un minimum global et préciser en quels points celui-ci est atteint.

4. f possède-t-elle un maximum global ?

Exercice 2

Soit $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les extrémums sur $\mathcal{D}$ de

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}.$$

5. Justifier que f atteint un minimum et un maximum globaux sur $\mathcal{D}$.

6. Montrer que f admet un unique point critique dans $\mathcal{U} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\right\}$.

7. Déterminer les extremums sur $\left]-\pi\,;\ \pi\right]$ de $g : t \mapsto f(2\cos(t), 2\sin(t))$.

8. Déterminer les extrémums globaux de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 3 – Algorithme de Babylone

L'objectif de cet exercice est de présenter deux suites de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$.

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

I-Première suite

On considère les suites réelles (p_n) et (q_n) définies par

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

9. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont des entiers strictement positifs.

b. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq q_n$.

10. On définit une suite réelle (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

b. Justifier que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

c. Justifier que $\sqrt{2} \in \left]1\,;\ 3/2\right[$ et en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

e. Vérifier que $2^{10} > 10^3$.
À partir quelle valeur de n est-on sûr que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à moins de 10^{-9} près ?

11. **a.** Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+2} = ap_{n+1} + bp_n.$$

b. En déduire l'expression du terme général de la suite (p_n).

c. De même exprimer le terme général de la suite (q_n).

d. Retrouver le résultat de la question 10.d).

II-Seconde suite

On considère la suite réelle (v_n) définie par

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right).$$

12. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et est un nombre rationnel de l'intervalle $[1\,;\ 2]$.

b. Justifier que l'unique limite *possible* de la suite v est $\sqrt{2}$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}$.

14. Justifier successivement, pour tout n de $\mathbb{N}$:

a. $\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{\left|v_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$;

b. $\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

15. **a.** En déduire que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$.

b. À partir quelle valeur de n est-on sûr que v_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à moins de 10^{-9} près ?

Exercice 4

Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$u_1 = a \text{ et : } \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}.$$

16. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite u est constante.
Déterminer cette valeur.

17. On suppose que la suite u converge vers une limite finie ℓ. Montrer que $\ell = 0$.

18. On suppose que la suite u vérifie la propriété :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant \sqrt{n}.$$

Montrer que u est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.

19. On suppose que la suite u vérifie la propriété :

$$(\sharp) : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_k < \sqrt{k}.$$

a. Montrer que pour tout $n \geqslant k$, on a $u_n < \sqrt{n}$.

b. Montrer que la suite u est convergente en précisant sa limite.

20. **a.** Pour $k \geq 1$, calculer $\dfrac{1}{2^{k+1}} \ln u_{k+1} - \dfrac{1}{2^k} \ln u_k$ et en déduire $\dfrac{1}{2^n} \ln u_n$ sous forme d'une somme.

b. En déduire u_n en fonction de a et de n, pour tout entier naturel n.