Constante d'Euler, équivalence de restes
et dévéloppement asymptotique de la série harmonique...

... encore des thèmes ultraclassiques de concours

Exercice 1 *La constante γ d'Euler et développement de la série harmonique*

1. *Constante d'Euler*
En considérant la suite définie pour tout $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

montrer qu'il existe une constante γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

2. *Équivalence des t.g. et équivalence des restes*

a) Soit $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites réelles ne s'annulant pas.
Montrer l'équivalence

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \quad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon \, |b_n| \, .$$

b) Soit $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_0} b_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.
On note $\mathrm{R}_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $\mathrm{R}'_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ leur reste respectif.
On suppose que

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n.$$

Montrer que

$$\mathrm{R}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{R}'_n.$$

3. *Application à la série de Riemann de paramètre 2.*
On note, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}.$$

b) En déduire un équivalent de R_n.

4. *Exploitation pour un développement asymptotique de la série harmonique*
Soit $w_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$,

$$w_n = \frac{1}{n} - \big(\ln(n) - \ln(n-1) \big).$$

a) Déterminer un équivalent simple de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En s'intéressant à $\mathrm{T}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution (**Ex.1** – *La constante γ d'Euler et développement de la série harmonique*)

1. Le développement de $u_{n+1}-u_n$ donne :
$u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument ($2>1$), par domination la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge, donc la suite u converge et il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. a) Puisque les suites ne s'annulent pas,

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \overset{\text{caractérisation}}{\iff} \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
$$\overset{\text{définition}}{\iff} \forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \quad \left|\frac{a_n}{b_n}-1\right| \leqslant \varepsilon \quad .$$
$$\overset{|b_n|>0}{\iff} \forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \quad |a_n-b_n| \leqslant \varepsilon\,|b_n|$$

b) Soit $\varepsilon>0$.
Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, il existe $\mathrm{N}_0 \geqslant n_0$ tel que $|a_n-b_n| \leqslant \varepsilon\,|b_n|$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_0$. Alors $\forall n \geqslant \mathrm{N}_0$,
$$|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}'_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k-b_k)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k-b_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon\,|b_k| \leqslant \varepsilon \mathrm{R}'_n$$
Donc par la caractérisation précédente, $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{R}'_n$.

3. a) Rappelons la très classique identité : $\forall k \geqslant 2, \quad \dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{N} > n$.
$$\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{1}{n}$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}$.

b) $\dfrac{1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(k-1)k}$ et par le résultat de la question 2, $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ donc par a) $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4. a) $w_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$

b) Cet équivalent entre termes de signe constant montre que la série $\sum w_k$ converge, en s'appuyant sur la série de Riemann de paramètre 2 convergente.
Soit pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$. Par télescopage, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
Par 1, $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$, et on peut écrire
$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = \gamma \qquad (\heartsuit).$$
D'un autre côté, $w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{1}{k^2}$ entraîne par 2 et 3
$$\mathrm{T}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2}\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$$
et par conséquent $\mathrm{T}_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{-1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
($\heartsuit$) peut alors s'écrire
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma$$
ou encore
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$