Exercice 1 *Optimisation*

Un industriel souhaite construire un réservoir parallélépipèdique rectangle (ou pavé droit) sans couvercle de volume $4m^3$. L'industriel veut minimiser les matériaux nécessaires à la réalisation.

1. En notant x et y les dimensions en mètres du rectangle formant le fond du réservoir, montrer que ce problème revient à chercher le minimum global, s'il existe, de la fonction

$$f :]\,0\,;\ +\infty[^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}.$$

2. Soit $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in]\,0\,;\ +\infty[\,/x \geqslant \frac{2}{3}, y \geqslant \frac{2}{3} \text{ et } xy \leqslant 12\right\}$.

a) Représenter $\mathcal{D}$.

b) Justifier que f atteint un minimum global sur $\mathcal{D}$ et le déterminer.

3. Montrer que ce minimum est le minimum global de f sur $]\,0\,;\ +\infty[^2$.

4. Quelles sont les dimensions optimales du réservoir ?

Solution (**Ex.1** – *Optimisation*)

1. En notant z la hauteur du réservoir, la contrainte de volume s'écrit $xyz = 4$ $(\mathcal{V})$.

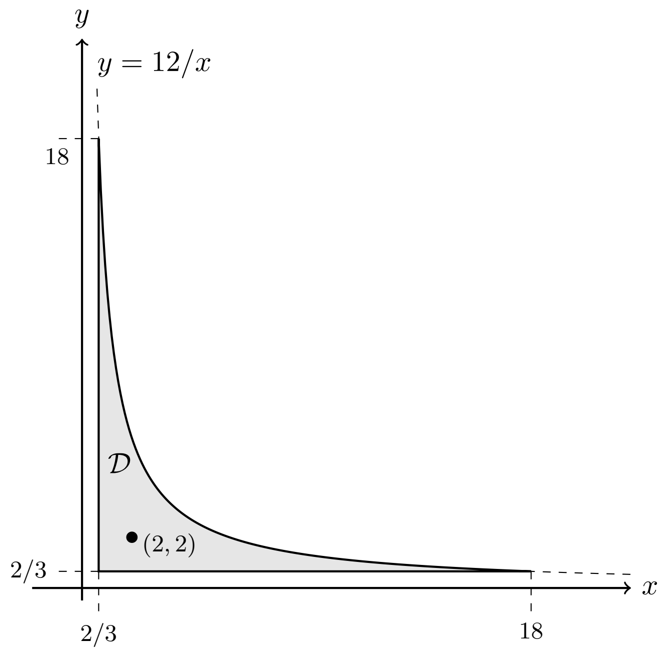
La surface de matériaux à utiliser est $\mathrm{S}(x, y, z) = xy + 2 \times xz + 2 \times yz$.

La contrainte $(\mathcal{V})$ entraîne que x et y sont non nulles et permet d'écrire $\mathrm{S}(x, y, z) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$.

Ce problème revient bien à chercher le minimum global, s'il existe, de la fonction

$$f :]\,0\,;\ +\infty[^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}.$$

2. a) $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in]\,0\,;\ +\infty[\,/x \geqslant \frac{2}{3}, y \geqslant \frac{2}{3} \text{ et } xy \leqslant 12\right\}$.



b) • f est somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ (les dénominateurs ne s'annulent jamais sur $\mathcal{D}$ donc est continue sur $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ est fermé car défini par des inégalités larges sur des fonctions polynomiales donc continues et borné car si $(x, y) \in \mathcal{D}$ alors $|x| \leqslant 18$ et $|y| \leqslant 18$.

Par le théorème des bornes atteintes, ***f* atteint un minimum global sur $\mathcal{D}$.**

• Cherchons les points critiques à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y - \dfrac{8}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{8}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x^3 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

***f* possède un unique point critique à l'intérieur de $\mathcal{D}$, à savoir $(2, 2)$ et *f* y prend la valeur $f(2, 2) = 12$.**

• Parcourons sa frontière.

Pour $x = 2/3$, $f(x, y) > \frac{8}{x}$ i.e. $f(x, y) > 12$.

Pour $y = 2/3$, $f(x, y) > \frac{8}{y}$ i.e. $f(x, y) > 12$.

Pour $xy = 12$, $f(x, y) > xy$ i.e. $f(x, y) > 12$.

• Donc **le minimum de f sur $\mathcal{D}$ n'est pas atteint sur sa frontière, il ne peut l'être qu'en l'unique point critique.**

• Bilan – **Le minimum global de f sur $\mathcal{D}$ est 12, uniquement atteint en $(2,2)$.**

3. **Soit $(x,y) \notin \mathcal{D}$.** Alors on est au moins dans l'un des trois cas suivants :
- $x < 2/3$, et alors $f(x,y) > 8/x > 12$,
- $y < 2/3$, alors $f(x,y) > 8/y > 12$,
- $xy > 12$, alors $f(x,y) > xy > 12$.

Dans tous les cas, $f(x,y) > 12$.
Donc 12 est le minimum global de f sur $]0\,;\,+\infty[^2$.

4. Les dimensions optimales du réservoir sont 2m×2m pour la base et 1m pour la hauteur.

Exercice 2 *Produits infinis*

Étudier la convergence des suites définies par

1. $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$;

2. $\forall n \geqslant 1, \quad v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$;

3. $\forall n \geqslant 1, \quad w_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

Solution (**Ex.2** – *Produits infinis*)

Je donne une correction illustrant la possibilité d'utiliser le logarithme dans l'étude d'un produit infini mais pour les deux premiers, un télescopage montre que

① $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (u_n) converge ;

② $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc (v_n) diverge.

1. $\forall n \geqslant 2, \quad \ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ avec $\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{k}$. Par équivalence de termes généraux négatifs et divergence de la série harmonique, $\sum \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ diverge, vers $-\infty$. Par composition avec l'exponentielle, u converge.

2. $\forall n \geqslant 1, \quad \ln(v_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ avec $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$. Par équivalence de termes généraux positifs et divergence de la série harmonique, $\sum \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ diverge, vers $+\infty$. Par composition avec l'exponentielle, v diverge.

3. Ici, pas de télescopage à l'horizon :
$w_n = \frac{2}{1}.\frac{5}{4}.\frac{10}{9}.\frac{17}{16}.\frac{37}{36}.\frac{50}{49}\dots\frac{n^2+1}{n^2} = ???$
$\forall n \geqslant 1, \quad \ln(w_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ avec $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$. Par équivalence de termes généraux positifs et convergence de la série de Riemann de paramètre 2, $\sum \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ converge. Par composition avec l'exponentielle, w converge.

Une erreur fréquente !

Certes $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ donc par équivalence de termes positifs et convergence de la série de Riemann de paramètre 2, la série $\displaystyle\sum_k \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ converge. Pour autant, rien ne prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$...

Par exemple, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{6}{\pi^2} \neq 1$...