Exercice 1

L'objectif de cet exercice est la calcul de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$

On admettra le résultat classique dû à Léonard Euler $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale I.

2. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose sous réserve d'existence

$$\mathrm{J}_k = \int_0^1 x^k \ln(x)\mathrm{d}x.$$

Justifier l'existence des intégrales J_k et les calculer .

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose sous réserve d'existence

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$

Justifier l'existence des intégrales I_n.

3. Justifier l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ et calculer sa valeur.

4. a) Proposer une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $]\,0\,;\ 1\,[$ qui tend vers 1 et vérifie $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant u_n^n \int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x + \int_{u_n}^1 \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$

c) En déduire la limite de la suite (I_n).

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[\,0\,;\ 1\,[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{J}_k}{k} \leqslant \mathrm{I}_n.$$

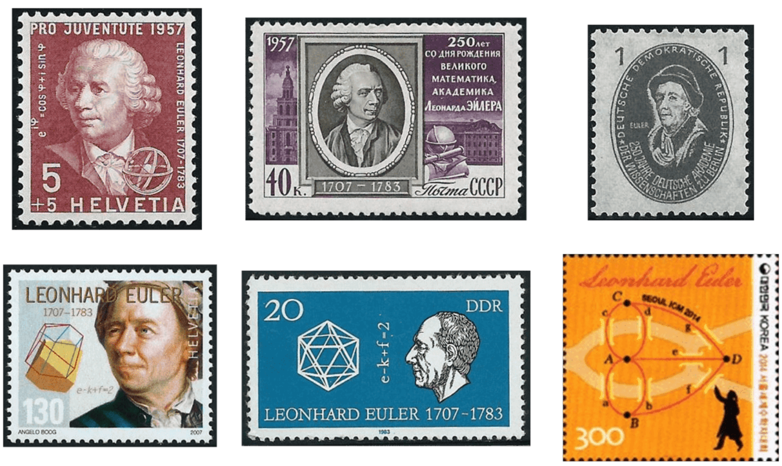
6. Calculer I.

7. Uniquement pour les 5/2 ! ! !

a) Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ en précisant son rayon de convergence.

b) Calculer I à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆



Léonard Euler
Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783

Solution (**Ex.1** –)

1. Tout le monde a commencé par

$\boxed{\bullet\ f : x \mapsto \ln(1-x)\ln(x) \text{ est continue sur }]\,0\,;\ 1[}$

voire même a souligné que f est positive.

• $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x)$ or $-x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

• $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ or $(1-x)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ donc f est aussi prolongeable par continuité en 1.

Ainsi, I est doublement faussement impropre donc existe.

Si vous avez utilisé le critère de négligeabilité (ou d'équivalence) avec $f = o(g)$, il faut préciser soit que $\int g$ converge $\boxed{\textbf{absolument}}$, soit que g est $\boxed{\textbf{intégrable}}$.

2. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, je pose $g_k :]\,0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k\ln(x)$, qui est continue.

• Chaque g_k est continue sur $]\,0\,;\ 1]$ et prolongeable par continuité en 0 puisque $g_k(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc J_k existe en tant qu'intégrale faussement impropre.

• En intégrant par parties puisque ln et $x \mapsto \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ 1]$ avec $x^{k+1}\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,

$\mathrm{J}_k = \left[\dfrac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^k}{k+1}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

L'intégration par parties (en toutes lettres) sur une intégrale généralisée se redige :

① on écrit qu'on intègre par parties,

② on présente les deux fonctions en jeu, en précisant qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$,

③ on détermine les limites aux bornes généralisées (une ou deux), car si elles ne sont pas finies, l'intégration par parties n'est pas légitime,

④ **seulement après, on écrit l'égalité si on sait que l'une des intégrales existe,** ou on dit que les deux intégrales sont de même nature si cette nature n'est pas encore connue.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in]\,0\,;\ 1[, \quad |x^n\ln(1-x)\ln(x)| \leqslant f(x)$$

avec f la fonction intégrable définie à la première question, donc par comparaison I_n existe.

3. $\dfrac{1}{n(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$ assure la convergence de la série puisque $3 > 1$ et ces termes généraux sont positifs.

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{n+1-n}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{\mathrm{N}+1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

4. a) • Par exemple cherchons une suite du type : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 - v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff n\ln(1-v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \iff -nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \iff nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convient, donc $u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convient.

• Si on cherche u_n du type $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il nous faut $nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, $v_n = -1/\sqrt{n}$ convient, et $u_n = \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}}\right)$ convient.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• $\forall x \in]\,0\,;\ u_n]$, $\quad x^n\ln(1-x)\ln(x) \leqslant u_n^n\ln(1-x)\ln(x)$ donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{u_n} x^n\ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant u_n^n\int_0^{u_n}\ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \quad (1)$$

• $\forall x \in [\,u_n\,;\ 1[$, $\quad x^n\ln(1-x)\ln(x) \leqslant \ln(1-x)\ln(x)$ donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{u_n}^1 x^n\ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{u_n}^1\ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \quad (2)$$

• Par la relation de Chasles,

$$\mathrm{I}_n \leqslant u_n^n\int_0^{u_n}\ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x + \int_{u_n}^1\ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x.$$

• Et par positivité de l'intégrale, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$ puisque l'intégrande est positive.

Ainsi $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant u_n^n \int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x + \int_{u_n}^1 \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x$.

c) • $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I}$,

• puis $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n^n \int_0^{u_n} \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

• et enfin $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\int_{u_n}^1 \ln(1-x)\ln(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Par encadrement, $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

5. a) Soit $x \in [0\,;\,1[$. On a par somme de termes géométriques :

$$\forall t \in [0\,;\,x],\quad \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

En intégrant sur $[0\,;\,x]$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout x de $]0\,;\,1[$,

$\ln(x)\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln(x)}{k} = -\ln(x)\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$

Le membre de droite étant positif, le membre de gauche l'est aussi.
Remarquons alors que :

$$-\ln(x)\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant -\ln(x)x^n \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t \text{ car } t^n \leqslant x^n$$
$$\leqslant \ln(x)x^n\ln(1-x) \text{ en calculant l'intégrale.}$$

Donc : $\forall x \in]0\,;\,1[$,

$0 \leqslant \ln(x)\ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln(x)}{k} \leqslant \ln(x)x^n\ln(1-x)$

Et par croissance de l'intégrale

$0 \leqslant \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{J}_k}{k} \leqslant \mathrm{I}_n$

6. Puisque $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement on a : $\mathrm{I} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{J}_k}{k}$, i.e.

$\mathrm{I} \overset{2.a)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} \overset{3.}{=} 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

7. Uniquement pour les 5/2 ! ! !

a) Le rayon de convergence vaut 1 et : $\forall x \in]-1\,;\,1[, \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

b) $\mathrm{I} = \int_0^1 -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}\ln(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(x)\mathrm{d}x$

où, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $h_k :]0\,;\,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{x^k}{k}\ln(x)$ est continue et intégrable d'après 2.a) et la série de terme général h_k converge simplement vers $f : x \mapsto \ln(1-x)\ln(x)$ continue.
De plus $\int_0^1 |h_k(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{x^k\ln(x)}{k}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{J}_k}{k} = \frac{1}{k(k+1)^2}$, donc la série de terme général $\int_0^1 |h_k(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.
Toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées donc

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1 h_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Si on veut appliquer le théorème de permutation en cas de convergence uniforme, il faut se placer sur un segment. C'est possible en prolongeant les fonctions h_k en 0 et 1 par continuité, en posant $h_k(0) = h_k(1) = 0$. Une étude de fonction montre que $||h_k||_{\infty,[0\,;\,1]} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k^2}$ donc la convergence de $\sum_k h_k$ est normale donc uniforme : la permutation est licite !