Exercice 1 *Natures*

Déterminer la nature de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+1}$, $\mathrm{I} = [\,0\,;\ +\infty[$
2. $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t^3+1}}$, $\mathrm{I} = [\,1\,;\ +\infty[$
3. $f : t \mapsto \sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^3+t^2}}$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\ 1]$
4. $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{t^3+1}}$, $\mathrm{I} = [\,0\,;\ +\infty[$
5. $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}$, $\mathrm{I} =]\,1\,;\ 2]$
6. $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}$, $\mathrm{I} = [\,2\,;\ +\infty[$
7. $f : t \mapsto \dfrac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\ +\infty[$
8. $f : t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\ +\infty[$

Solution (**Ex.1** – *Natures*)

1. Convergente : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, ou encore $\mathrm{F} : t \mapsto \dfrac{-1}{t+1}$;
2. Convergente : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o\left(\dfrac{1}{t^{5/4}}\right)$;
3. Divergente : $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$;
4. Convergente : $\forall t \geq 1, |f(t)| \leq \dfrac{2}{t^{3/2}}$;
5. Divergente :
   $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{t-1}$, et par translation de la variable $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}$, donc divergente.
6. Convergente : $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, ou encore : $\forall t \geq 3, f(t) \leq \mathrm{e}^{-t}$;
7. Divergente : $0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
   mais : $\forall t \in]\,0\,;\ 1[\,, f(t) = \dfrac{1}{t}$ entraîne la divergence de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$;
8. Convergente : $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
   et en 0 : $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = \ln(t^2+1) - 2\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$ or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge ...
   Remarque : une intégration par parties peut aussi justifier la convergence (et donner la valeur) :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \pi\ldots$

Exercice 2 *Calculs*

Montrer l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$
2. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\exp(x)+1)(\exp(-x)+1)}$
3. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$
4. $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
5. $\mathrm{M} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$
6. $\mathrm{N}_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$ où $a \in]\,1\,;\ +\infty[$
7. $\mathrm{P} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\exp(x)+1}}$
8. $\mathrm{Q} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}(x)}$
9. $\mathrm{R} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\ln(\sin x)\mathrm{d}x$

Solution (**Ex.2** – *Calculs*)

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ continue positive sur $[\,0\,;\ +\infty[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = \left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]_0^{+\infty} = \ln 2.$

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}$ continue positive sur $[\,0\,;\,+\infty[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$: convergence par équivalence.

$\mathrm{J} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$

3. $f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ continue positive sur $]\,0\,;\,+\infty[$,

$\sqrt{x}f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x^2) - 2\sqrt{x}\ln x \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par domination en 0 et équivalence en $+\infty$.

$\mathrm{K} \overset{\mathrm{IPP}}{=} \left[x\ln(1+1/x^2)\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$

4. $f : x \mapsto \exp(-\sqrt{x})$ continue positive sur $[\,0\,;\,+\infty[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en $+\infty$.

$\mathrm{L} \overset{u=\sqrt{x}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \overset{\mathrm{IPP}}{=} \left[-2u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 2.$

5. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$ continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$, $\sqrt{x}f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $x^{3/2}f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en 0 et en $+\infty$.

$\mathrm{M} \overset{u=1/x}{=} -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = -\mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} = 0$.

6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ continue positive sur $[\,a\,;\,+\infty[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.

$\mathrm{N}_a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_a^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}.$

7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ continue sur $[\,0\,;\,+\infty[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination.

$\mathrm{P} \overset{u=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}{=} \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{u^2-1}\mathrm{d}u = 2\mathrm{N}_{\sqrt{2}} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2}).$

8. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}x}$ continue sur $[\,1\,;\,+\infty[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination.

$\mathrm{Q} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{2}{u^2-1}\mathrm{d}u = 2\mathrm{N}_{\mathrm{e}} = \ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}.$

9. $f : x \mapsto \sin x\ln(\sin x)$ continue sur $]\,0\,;\,\pi/2]$, $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc intégrale faussement impropre.

$\mathrm{R} \overset{x=\cos t}{=} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t)\mathrm{d}t = \ln 2 - 1.$

Exercice 3 *Développement asymptotique pour une intégrale divergente*

1. Établir la divergence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{u^2+2u}}{u^3+2u^2}\mathrm{d}u$.

2. a) On pose, pour x dans $]\,0\,;\,1]$, $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\sqrt{u^2+2u}}{u^3+2u^2}\mathrm{d}u$. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)$?

b) À l'aide du changement de variable $z = 1/u$, montrer que

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} - \sqrt{3} + \underset{x\to0}{o}(1)$$

Solution (**Ex.3** – *Développement asymptotique pour une intégrale divergente*)

1. $\dfrac{\sqrt{u^2+2u}}{u^3+2u^2} \underset{u\to0}{\sim} \dfrac{\sqrt{2u}}{2u^2} \underset{u\to0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}u^{3/2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$ diverge ...

a) $+\infty$ (l'intégrale divergente d'une fonction positive tend vers $+\infty$!)

b) $f(x) \overset{z=1/u}{=} \displaystyle\int_1^{1/x} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+2z}} = \left[\sqrt{1+2z}\right]_1^{1/x} = \sqrt{1+\frac{2}{x}} - \sqrt{3}.$

Puis $f(x) - \sqrt{\dfrac{2}{x}} + \sqrt{3} = \sqrt{1+\dfrac{2}{x}} - \sqrt{\dfrac{2}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{2}{x}}} \xrightarrow[x\to0]{} 0.$

Exercice 4 *Intégrales jumelles*

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence, les intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)} \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que I_n et J_n existent. Que vaut $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$?

2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, en déduire I_n et J_n.

Solution (**Ex.4** – *Intégrales jumelles*)

1. • Convergence : $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^n)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{n+2}}$ avec $n+2>1$ et $\dfrac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ avec $2>1$.

• $\mathrm{I}_n+\mathrm{J}_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\pi/2$.

2. $\mathrm{I}_n \overset{u=1/t}{=} \mathrm{J}_n$, donc $\mathrm{I}_n=\mathrm{J}_n=\pi/4$.

Exercice 5 *Se méfier des bornes liées*

1. Justifier la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

2. Pour $x\in\,]\,0\,;\,+\infty[$, on pose $\mathrm{I}(x)=\displaystyle\int_{1/x}^{x}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

Calculer $\mathrm{I}(x)$, et en déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{I}(x)$.

3. Soit $x>0$. Comparer $\displaystyle\int_1^{x}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1/x}^{1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

4. Étudier rapidement la fonction $f : t\mapsto\dfrac{\ln t}{t}$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$ et interpréter graphiquement les résultats précédents.

Solution (**Ex.5** – *Se méfier des bornes liées*)

1. La minoration $\dfrac{\ln t}{t}\geq\dfrac{1}{t}$ pour $t\geq \mathrm{e}$ suffit à justifier la non-intégrabilité en $+\infty$.

2. $\mathrm{I}(x)=\left[\dfrac{\ln^2 t}{2}\right]_{1/x}^{x}=\ldots=0$, donc $\displaystyle\int_{1/x}^{x}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$,bien que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

3. $\displaystyle\int_1^{x}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=-\int_{1/x}^{1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ puisque leur somme $\mathrm{I}(x)$ vaut 0...

4. ...donc la “partie positive de la courbe” de 1 à x compense exactement la “partie négative” de $1/x$ à 1 (je suppose dans ce commentaire que $x>1$) ...

Exercice 6 *Deux méthodes pour une intégrale semi-convergente*

1. Montrer que $\mathrm{I}=\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

L'objectif des questions suivantes est de montrer, de deux façons différentes, que I ne converge pas absolument.

2. a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Que vaut $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\,\mathrm{d}t$?

b) En déduire que, pour $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_\pi^{(\mathrm{N}+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1}\frac{1}{n}$.

c) Conclure.

3. *On traitera cette question sans utiliser la précédente.*

a) Justifier que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|\sin(t)|+|\cos(t)|\geqslant 1$.

b) Quelle est la nature de $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{|\sin(t)|+|\cos(t)|}{t}\mathrm{d}t$?

c) Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{|\cos(t)|}{t}\mathrm{d}t$ sont de même nature.

d) Conclure.

Solution (**Ex.6** – *Deux méthodes pour une intégrale semi-convergente*)

1. Intégration par partie pour augmenter le degré du dénominateur.

2. a) Par $\pi-$périodicité, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi\sin(t)\mathrm{d}t=2$.

b) En minorant sur chaque intervalle $[\,n\pi\,;\,(n+1)\pi]$ puis en sommant de 1 à N, $\displaystyle\int_\pi^{(\mathrm{N}+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1}\frac{1}{n}$.

c) Par divergence vers $+\infty$ de la somme partielle de la série harmonique...

3. a) Car $|\sin|\geqslant|\sin|^2$ et $|\cos|\geqslant|\cos|^2$...

b) Divergente par comparaison à l'intégrale de Riemann.

c) En posant $u=t+\pi/2$ puis par équivalence.

d) Par l'absurde, l'absolue convergence contredirait la linéarité par exemple.

Exercice 7 *Équivalent d'une suite d'intégrales*

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\mathrm{d}x.$$

1. Établir que, pour tout entier naturel non nul n, I_n existe.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathrm{I}_n = \frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Solution (**Ex.7** – *Équivalent d'une suite d'intégrales*)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{nx}} \dfrac{\ln(n+x)}{x} = 0\times 0 = 0$, ainsi

$\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et on conclut par négligeabilité ...

2. $\mathrm{I}_n \overset{\text{IPP}}{=} \left[\dfrac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\ln(n+x)\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x = \dfrac{\ln n}{n} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x.$

Alors $\forall x>0,\ 0 \le \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)} \le \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \overset{\text{primit.}}{=} \dfrac{1}{n}$ donne

$\dfrac{\ln n}{n} \le \mathrm{I}_n \le \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n^3}$, donc $\mathrm{I}_n - \dfrac{\ln n}{n} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

3. $\mathrm{I}_n \overset{\text{IPP}}{=} \left[\dfrac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\ln(n+x)\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x = \dfrac{\ln n}{n} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x.$

Alors $\forall x>0,\ 0 \le \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)} \le \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \overset{\text{primit.}}{=} \dfrac{1}{n}$ donne

$\dfrac{\ln n}{n} \le \mathrm{I}_n \le \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n^3}$, donc $\mathrm{I}_n - \dfrac{\ln n}{n} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

Exercice 8 *Arc-tangente like*

1. Justifier la convergence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{4u^2+4u+5}\mathrm{d}u.$

2. Calculer I à l'aide du changement de variable $x = u + 1/2$.

Solution (**Ex.8** – *Arc-tangente like*)

1. Remarquer que $4u^2+4u+5 = 4\left[(u+\frac{1}{2})^2+1\right] > 0$.

$\dfrac{1}{4u^2+4u+5} \underset{u\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{4u^2}$ assure la convergence.

2. $\mathrm{I} \overset{x=u+1/2}{=} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \overset{\text{primit.}}{=} \dfrac{\pi}{4}.$

Exercice 9 *Surprenant (ou pas) ?*

1. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos\left(t^2\right)dt$, $\mathrm{J} = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\cos u}{\sqrt{u}}du$ et $\mathrm{K} = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u^{3/2}}du.$

a) Montrer que I et J sont de même nature.

b) Montrer que J et K sont de même nature.

c) En déduire la nature de I.

2. $t \mapsto \cos\left(t^2\right)$ admet-elle une limite lorsque t tend vers $+\infty$?

3. Quelle conclusion en tirez-vous ?

Solution (**Ex.9** – *Surprenant (ou pas) ?*)

1. a) Poser $u = t^2$ (l'intégrale de π à π^2 existe, elle n'est pas impropre !)

b) Et une intégration par parties !

c) K est absolument convergente, par la majoration $\left|\sin u/u^{3/2}\right| \le 1/u^{3/2}$.

2. Non !!!!!!!!!!!

3. Contrairement à ce qui se passe pour les séries, il n'est pas nécessaire que f tende vers 0 en $+\infty$ pour que $\displaystyle\int^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge ...

Exercice 10 *Convergence*

Étudier la nature de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-t}}.$

Solution (**Ex.10** – *Convergence*)

I converge : d'une part $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe $(=1)$;

d'autre part : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2\mathrm{e}^{-t}} \le \mathrm{e}^t$ pour $t \ge 1$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \overset{\text{primit.}}{=} 1$ existe.

Exercice 11 *Limite d'une moyenne*

Soit f fonction continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = 0.$

Solution (**Ex.11** – *Limite d'une moyenne*)

Pour $x \ge 1$, en majorant t par $\sqrt{x}$ pour $t \in [0\,;\,\sqrt{x}]$ et t par x pour $t \in [\sqrt{x}\,;\,x]$, on a : $\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \le \sqrt{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + x\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors $0 \le \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \le$

$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$

On conlut avec $\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{I}$ et $\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

Exercice 12 *IPP ou changement de variable ?*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose sous réserve d'existence

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{(1+t^{n+1})^2}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Calculer I_n en posant $u = t^{n+1}$.

3. Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans I_n et commenter.

Solution (**Ex.12** – *IPP ou changement de variable ?*)

L'intégrande est négligeable devant $t \mapsto 1/t^{3/2}$ en $+\infty$ et devant $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ en 0. On conclut grâce aux propriétés des intégrales de Riemann.

Le premier changement suivi d'une IPP montre que $\mathrm{I}_n = 0$.

Le second changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = 1/t$ conduit à $\mathrm{I}_n = -\mathrm{I}_n$, donc $\mathrm{I}_n = 0$.

Exercice 13 *Intégrale à paramètre*

Soit pour $a > 0$ $\mathrm{I}_a = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)}$.

1. Justifier l'existence de I_a.

2. Peut-on effectuer le changement de variable $u = \tan t$ dans I_a ?

3. Justifier que $\mathrm{I}_a = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)}$.

4. Calculer I_a à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.

Solution (**Ex.13** – *Intégrale à paramètre*)

Utiliser la $\pi-$periodicité puis la parité, on trouve $\mathrm{I}_a = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}$.