**Exercice 1** *Endomorphismes échangeurs*

## Partie A - Étude d'un exemple de $\mathbb{C}^3$

**1. a)** $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\mathcal{C}$ est une base. **Pourquoi faire plus compliqué ?**

**b)** $\varphi(u_1) = -u_3$, $\varphi(u_2) = -2u_3$ et $\varphi(u_3) = u_1 - u_2$ donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Pourquoi s'embêter avec la formule de changement de base et inverser des matrices ?**

**On prend la même base au départ et à l'arrivée...**

**c)** Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(u_3)$, alors $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ car $\mathcal{C}$ est une base et la matrice précédente montre que $\varphi(u_1) \in \mathrm{G}$, $\varphi(u_2) \in \mathrm{G}$ donc $\varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ par linéarité, et $\varphi(u_3) \in \mathrm{F}$ donc $\varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.

Donc $\varphi$ est échangeur de F et G.

**Notez les blocs qui apparaissent : on est dans une situation opposée à celles des sous-espaces stables,**

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

**2.** $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$.

En notant P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, on a :

$\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$ s'écrit $\mathrm{P}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)\mathrm{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$.

En notant $g$ l'automorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{C}$ est P, cette relation s'écrit finalement :

$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g^{-1} \circ \varphi \circ g) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$, donc $g^{-1} \circ \varphi \circ g = -\varphi$.

**Une bonne idée : montrer une fois pour toutes que deux endomorphismes sont semblables si, et seulement si, les matrices les représentant dans une base donnée sont semblables.**

## Partie B - Quelques caractérisations en dimension 2

**3. a)** $\dim \mathrm{F} \geq 1$, $\dim \mathrm{G} \geq 1$ et $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = 2$ donc $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G} = 1$.

Soit $(u)$ une base de F, $(v)$ une base de G, alors $\mathcal{C} = (u, v)$ est une base de E.

$\varphi(u) \in \mathrm{G}$ donc : $\exists \mu \in \mathbb{C}, \varphi(u) = \mu v$.

$\varphi(v) \in \mathrm{F}$ donc : $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(v) = \lambda u$.

Alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** $\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)) = 0$.

**c)** Soit $\mathcal{D}$ la base $(u, -v)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$.

En notant P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$, on a :
$\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$ s'écrit $\mathrm{P}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)\mathrm{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$.
En notant $g$ l'automorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{C}$ est P, cette relation s'écrit finalement :
$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g^{-1} \circ \varphi \circ g) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(-\varphi)$, donc $g^{-1} \circ \varphi \circ g = -\varphi$.

**4.** Écrivons $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix} = (a^2+bc)\mathrm{I}_2 = \delta^2\mathrm{I}_2$

Donc : $\varphi^2 = \delta^2 id_{\mathrm{E}}$.

**5.** Dans cette question, on suppose $\det(\varphi) = 0$.

**a)** $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ entraîne $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathrm{Ker}\varphi$.
Comme $\varphi \neq 0$, $\dim \mathrm{Im}\varphi \geq 1$ et comme $\det\varphi = 0$, $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq 1$, donc $\dim \mathrm{Im}\varphi = 1$.
Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$.
Donc $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi$.

**b)** Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\varphi$ et G un supplémentaire (quelconque, par le théorème de la base incomplète...) de F dans E.
Alors : $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G} = 1$ donc F et G non triviaux, $\varphi(\mathrm{F}) = \{0\} \subset \mathrm{G}$, $\varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{F}$, c'est gagné !!!

**6.** Dans cette question, on suppose $\det(\varphi) \neq 0$.

**a)** $\det(\lambda\mathrm{I}_2 - \mathrm{M}) = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda + a \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - a^2 - bc = 0 \iff \lambda^2 = -\det(\mathrm{M}) \iff$
$\lambda^2 = \delta^2 \iff (\lambda = \delta \text{ ou } \lambda = -\delta)$.
**La racine carrée $\sqrt{.}$ n'est pas définie sur $\mathbb{C}$, uniquement sur $\mathbb{R}^+$.**

**b)** • Pour $\lambda = \delta$, $\det(\varphi - \delta id) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi - \delta id) \neq \{0\}$ et $\exists u^+ \neq 0$ tel que $\varphi(u^+) = \delta u^+$.
• Pour $\lambda = -\delta$, $\det(\varphi + \delta id) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi + \delta id) \neq \{0\}$ et $\exists u^- \neq 0$ tel que $\varphi(u^-) = -\delta u^-$.

**c)** • En composant par $\varphi$ :
$\alpha u^+ + \beta u^- \overset{(\mathrm{E}_1)}{=} 0 \Longrightarrow \alpha\delta u^+ - \beta\delta u^- = 0 \Longrightarrow \alpha u^+ - \beta u^- \overset{(\mathrm{E}_2)}{=} 0$,
$(\mathrm{E}_1) + (\mathrm{E}_2) \Longrightarrow 2\alpha u^+ = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$,
$(\mathrm{E}_1) - (\mathrm{E}_2) \Longrightarrow 2\beta u^- = 0 \Longrightarrow \beta = 0$.
$(u^+, u^-)$ est libre, de cardinal $\dim(\mathrm{E})$, donc est une base.

• $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{(u^+,u^-)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$.

**d)** $\mathcal{M}_{(u^-,u^+)}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{(u^+,u^-)}(-\varphi)$ donc comme précédemment $\varphi$ et $-\varphi$ sont semblables.

**e)** Il suffit de remarquer que $(u^+ + u^-, u^+ - u^-)$ est une base de E, car $\det(\mathcal{M}_{(u^+,u^-)}(u^+ + u^-, u^+ - u^-)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.
Alors $\varphi(\mathrm{F}) = \mathrm{Vect}(u^+ - u^-) \neq \mathrm{Vect}(u^+ + u^-) = \mathrm{F}$.
Et en posant $\mathrm{G} = \varphi(\mathrm{F}) = \mathrm{Vect}(u^+ - u^-)$, on a : $\varphi(\mathrm{G}) = \mathrm{Vect}(\varphi(u^+ - u^-)) = \mathrm{Vect}(u^+ + u^-) = \mathrm{F}$.
Donc $\varphi$ est échangeur.

**7.** $(i) \Longrightarrow (ii)$ est assuré par 3.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ est assuré par 5. et 6.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ est assuré par 5., 4a) si $\det(\varphi) = 0$ et 4.b) sinon, et 6.
$(iii) \Longrightarrow (ii)$ est vraie : deux endomorphismes semblables ont même trace.

## Partie C - Propriétés générales

**8.** $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0$ et de même $\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0$
M est la somme de deux matrices de carré nul.

**9.** $\mathrm{D}^2 = \mathrm{I}_{n+p}$ donc D est inversible, d'inversible D, et le calcul donne $\mathrm{DMD} = -\mathrm{M}$ donc M et $-\mathrm{M}$ sont semblables.
**Il faut savoir inverser une matrice diagonale. Au fait, que vaut le produit de deux matrices diagonales ?**

**10. a)** Dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, en notant $n = \dim(\mathrm{F})$ et $p = \dim(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}$.

**b)** Avec $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(a) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}$ et $b \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(b) = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$, alors $\varphi = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

**c)** $\varphi$ et $-\varphi$ sont semblables car M et $-\mathrm{M}$ semblables.

**d)** $\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}(-\varphi)$ par similitude, mais $\mathrm{Tr}(-\varphi) = -\mathrm{Tr}(\varphi)$ par linéarité. Donc $\mathrm{Tr}(\varphi) = -\mathrm{Tr}(\varphi)$, donc $\mathrm{Tr}(\varphi) = 0$.

## Partie D - Une caractérisation dans le cas d'un automorphisme

Dans cette partie, $\varphi$ désigne un **automorphisme** d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E de dimension finie au moins égale à 2.
On suppose qu'il existe deux endomorphismes $a$ et $b$ tels que $u = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

**11.** On a : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, et donc $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim \mathrm{Ker}(f)$.
Par le théorème du rang :
$\dim(\mathrm{E}) \leq \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) \leq 2 \dim \mathrm{Ker}(f)$.
Donc : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq \dfrac{\dim(\mathrm{E})}{2}$.

**12. a)** • $u \in \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b) \Longrightarrow a(u) = b(u) = 0 \Longrightarrow \varphi(u) = 0 \Longrightarrow u = 0$ car $\varphi$ est un automorphisme. Donc $\mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b) = \{0\}$.
• Par la question précédente, $\dim \mathrm{Ker}(a) + \dim \mathrm{Ker}(b) \geq \dim(\mathrm{E})$, mais comme $\mathrm{Ker}(a) \oplus$

$\text{Ker}(b) \subset \text{E}$ et $\dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) = \dim \text{Ker}(a) + \dim \text{Ker}(b)$, on a $\dim \text{Ker}(a) + \dim \text{Ker}(b) \leq \dim(\text{E})$.
Donc $\dim \text{Ker}(a) + \dim \text{Ker}(b) = \dim(\text{E})$.
• Donc $\text{E} = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$.

**b)** • On sait déjà que $\text{Im}(a) \subset \text{Ker}(a)$ car $a^2 = 0$.
• Et que $\dim \text{Ker}(a) \geq \dfrac{\dim(\text{E})}{2}$.
Supposons $\dim \text{Ker}(a) > \dfrac{\dim(\text{E})}{2}$. Alors on aurait $\dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) > \dim(\text{E})$, ce qui est impossible.
Donc $\dim \text{Ker}(a) = \dfrac{\dim(\text{E})}{2}$, ce qui prouve au passage que $\dim(\text{E})$ est paire.
De plus $\dim \text{Im}(a) = \dim(\text{E}) - \dim \text{Ker}(a) = \dfrac{\dim(\text{E})}{2} = \dim \text{Ker}(a)$.
• Donc $\text{Im}(a) = \text{Ker}(a)$.
• On raisonne de la même façon pour $b$.

**13.** Avec $\text{F} = \text{Ker}(a)$ et $\text{G} = \text{Ker}(b)$, on a : $\text{E} = \text{F} \oplus \text{G}$,
$\varphi(\text{F}) = (a+b)(\text{F}) = a(\text{F}) + b(\text{F}) = \{0\} + b(\text{F}) \subset \text{Im}(b) = \text{Ker}(b) = \text{G}$
$\varphi(\text{G}) = (a+b)(\text{G}) = a(\text{G}) + b(\text{G}) = a(\text{G}) + \{0\} \subset \text{Im}(a) = \text{Ker}(a) = \text{F}$
Donc $\varphi$ est échangeur.

**14.** Il n'existe pas d'automorphisme échangeur de $\text{E} = \mathbb{C}^3$ car E est de dimension 3, car pour qu'un automorphisme soit échangeur, il est nécessaire que la dimension soit paire d'après l'étude précédente, notamment 10.b) et 12.a) qui conduisent à $\dim(\text{Ker}(a)) = \dfrac{\dim(\text{E})}{2} \in \mathbb{N}$.