Exercice 1 *Endomorphismes échangeurs*

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. On dit que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme échangeur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G non triviaux (c'est-à-dire distincts de $\{0\}$ et de E) tels que :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}, \quad \varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G} \quad \text{et} \quad \varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}.$$

On dit qu'en endomorphisme φ de E est semblable à un endomorphisme ψ s'il existe un automorphisme g de E tel que $\psi = g^{-1} \circ \varphi \circ g$.
On notera que dans ce cas, $\varphi = \left(g^{-1}\right)^{-1} \circ \psi \circ g$ si bien que ψ est aussi semblable à φ.

Partie A - Étude d'un exemple de $\mathbb{C}^3$

Dans cette partie, $\mathrm{E} = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de E et φ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. On pose $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (0, 1, -1)$, $u_3 = e_3$ et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$.
  a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E.
  b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)$.
  c) Montrer que φ est un endomorphisme échangeur de E, en précisant les sous-espaces concernés.

2. En exploitant la famille $\mathcal{C}' = (u_1, u_2, -u_3)$, montrer que φ est semblable à $-\varphi$.

Partie B - Quelques caractérisations en dimension 2

On suppose que $\mathrm{E} = \mathbb{C}^2$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de E et φ désigne un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$.

3. Dans cette question *uniquement*, on suppose φ échangeur et on appelle F et G deux sous-espaces supplémentaires et non triviaux de E tels que

$$\varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G} \quad \text{et} \quad \varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}.$$

  a) Justifier qu'il existe une base $\mathcal{C} = (u, v)$ de E et deux complexes λ et μ tels que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

  b) Que peut-on dire de la trace de φ ?
  c) Montrer que φ et $-\varphi$ sont semblables.

Dans les trois questions suivantes, on suppose que φ est un endomorphisme non nul, de trace nulle, mais on ne suppose plus φ échangeur.

On note $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ la matrice représentant φ dans $\mathcal{B}$.

On note δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = -\det(\varphi)$.

4. Montrer que $\varphi^2 = \delta^2 id_{\mathrm{E}}$.

5. Dans cette question, on supppose $\det(\varphi) = 0$.
  a) Justifier que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi)$.
  b) Montrer que φ est un endomorphisme échangeur.

6. Dans cette question, on suppose $\det(\varphi) \neq 0$.

a) Résoudre l'équation $\det(\lambda \mathrm{I}_2 - \mathrm{M}) = 0$ d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$.
b) En déduire qu'il existe deux vecteurs non nuls u^+ et u^- tels que
$$\varphi(u^+) = \delta u^+ \text{ et } \varphi(u^-) = -\delta u^-.$$
c) Montrer que (u^+, u^-) est une base de E et donner la matrice N représentant φ dans cette base.
d) En déduire que φ est semblable à $-\varphi$.
e) On note F la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u^+ + u^-)$.
Justifier que $\varphi(\mathrm{F}) \neq \mathrm{F}$ et montrer finalement que φ est un endomorphisme échangeur.

7. Montrer finalement que, pour un endomorphisme φ non nul de E, il y a équivalence entre :
(i) φ est échangeur,
(ii) $\mathrm{Tr}(\varphi) = 0$,
(iii) φ et $-\varphi$ sont semblables.

Partie C - Propriétés générales

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$.
On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ définie par blocs par
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}.$$

8. Calculer le carré de $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ et montrer que M est la somme de deux matrices de carré nul.

9. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice de diagonale par blocs
$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{pmatrix}.$$
Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} et en déduire que M est semblable à $-\mathrm{M}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que φ est un endomorphisme échangeur d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ avec F et G deux sous-espaces vectoriels non triviaux de E vérifiant $\varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $\varphi(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.

10. a) Décrire la matrice représentant φ dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
b) En déduire qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que $\varphi = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.
c) φ et $-\varphi$ sont-ils semblables ?
d) Que vaut $\mathrm{Tr}(\varphi)$?

Partie D - Une caractérisation dans le cas d'un automorphisme

Dans cette partie, φ désigne un **automorphisme** d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E de dimension finie au moins égale à 2.
On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b tels que $\varphi = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

11. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire que
$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq \frac{\dim(\mathrm{E})}{2}.$$

12. a) Démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)$.
b) Démontrer que $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Ker}(b)$.

13. En déduire que φ est échangeur.

14. Existe-t-il un automorphisme échangeur de $\mathrm{E} = \mathbb{C}^3$?