Exercice 1

Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
Préciser le domaine de convergence simple que l'on notera $\mathrm{I_S}$.

2. a) Justifier que les fonctions f_n sont toutes bornées et déterminer $||f_n||_\infty$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
b) Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathrm{I_S}$?

3. a) Étudier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'existence de

$$\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1} \mathrm{d}x.$$

b) Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ et préciser cette limite.

Solution (**Ex.1** –)

1. • $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(1) = \dfrac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$

• $\forall x \in \,]-1\,;\,1[\,, x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

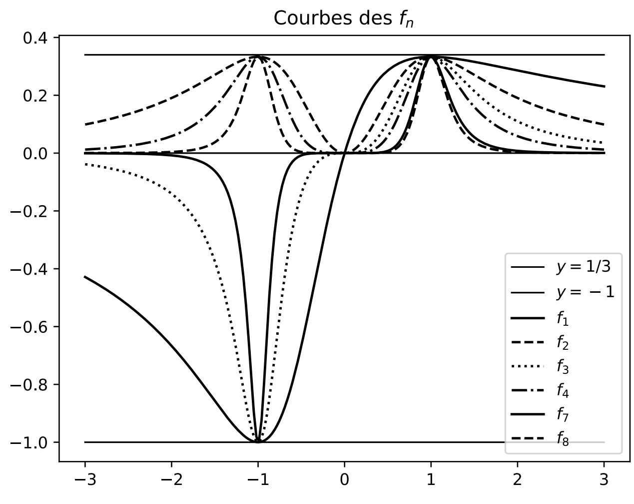
• $\forall p \in \mathbb{N}^*, f_{2p}(-1) = \dfrac{1}{3}$ et $f_{2p-1}(-1) = 1$ donc la suite $\big(f_n(-1)\big)_{n\geqslant 1}$ diverge.

• Pour $|x| > 1$, $\dfrac{x^n}{x^{2n}} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$, donc $x^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(x^{2n}\right)$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{x^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Conclusion

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathrm{I_S} = \,]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[\, = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, et

$$f_n \xrightarrow[\text{sur } \mathrm{I_S}]{cvs} f : \mathrm{I_S} = \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}, \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1/3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Le dénominateur de f_n ne s'annule pas car $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1$ n'a pas de racine réelle : $\Delta = -3 < 0$.

• f_n est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(x^{2n} + x^n + 1) - x^n(2nx^{2n-1} + nx^{n-1})}{(x^{2n} + x^n + 1)^2}$$

$f_n'(x)$ est du signe de son numérateur $\mathrm{N}(x)$:
$\mathrm{N}(x) = nx^{n-1}\big(1 - x^{2n}\big) = nx^{n-1}(1 - x^n)(1 + x^n)$
Pour $n = 1$, f_1' s'annule en -1 et 1 en changeant de signe à chaque fois.
Pour $n \geqslant 2$, f_n s'annule en -1, 0 et 1.
Le tableau de variation dépend de la parité de n.

• Pour $n = 1$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_1	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

• Pour $n \geqslant 2$ pair :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0

• Pour $n \geqslant 3$ impair :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0

• Ces études montrent que les f_n sont bornées avec

$$||f_n||_\infty = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1/3 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

b) • *Argument radical :*
La convergence n'est pas uniforme puisque les f_n sont continues sur $\mathrm{I_S}$ et leur limite f est discontinue en 1, qui est bien un point de $\mathrm{I_S}$.
• *En revenant à la définition :*
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{x\to 1} \big(f_n(x) - f(x)\big) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \text{ donc } ||f_n - f||_\infty \geqslant \frac{1}{3}$$

donc $||f_n - f||_\infty$ ne tend pas vers 0 et la convergence n'est pas uniforme.

3. a) Soit $n \geqslant 1$.
• f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
• $|f_n(x)| \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \left|\dfrac{x^n}{x^{2n}}\right| \underset{n\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{|x|^n}$ donc par équivalence de fonctions constantes et par la convergence des intégrales de Riemann, f_n est intégrable si, et seulement si, $n \geqslant 2$ (n étant entier).
Comme pour f_1 est positive sur $\mathbb{R}^+$, sa non-intégrabilité prouve que I_1 n'existe pas.
Ainsi, I_n existe si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

b) On va utiliser le théorème de convergence dominée mais comme (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$, on va l'appliquer sur $\mathrm{J} =]-1\,;\ +\infty[$ et sur $\mathrm{K} =]-\infty\,;\ -1[$.

- Sur J :

① les f_n sont continues sur J,

② $f_n \xrightarrow[\text{sur J}]{\mathcal{CVS}} f$,

③ f est c.p.m sur J,

④ Pour tout $n \geqslant 2$,

$\forall x \in]-1\,;\ 1[\,, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ d'après l'étude de fonction,

$\forall x \in [1\,;\ +\infty[\,, |f_n(x)| \leqslant \left|\dfrac{x^n}{x^{2n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^n} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

Donc $\forall n \geqslant 2, \forall x \in \mathrm{J}, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si } x \in]-1\,;\ 1[\,, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

φ est c.p.m. sur J et intégrable puisque $n \geqslant 2$.

Le théorème de convergence dominée s'applique donc

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

- Sur K :

① les f_n sont continues sur K,

② $f_n \xrightarrow[\text{sur K}]{\mathcal{CVS}} f$,

③ f est c.p.m sur K,

④ Pour tout $n \geqslant 2$,

$\forall x \in]-2\,;\ -1[\,, |f_n(x)| \leqslant 1$ d'après l'étude de fonction,

$\forall x \in]-\infty\,;\ 2]\,, |f_n(x)| = \dfrac{1}{|x|^n \cdot \left|1 + \dfrac{1}{x^n} + \dfrac{1}{x^{2n}}\right|}$

Pour majorer, on minore comme d'habitude le dénominateur :

pour $x \leqslant -2$, $|x|^n \geqslant 2^n$ donc $\dfrac{1}{|x|^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ i.e. $-\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{x^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ donc $-\dfrac{1}{2^2} \leqslant \dfrac{1}{x^n} \leqslant \dfrac{1}{2^2}$

d'où $\dfrac{3}{4} \leqslant 1 + \dfrac{1}{x^n}$ puis $\dfrac{3}{4} \leqslant 1 + \dfrac{1}{x^n} + \dfrac{1}{x^{2n}}$.

Ainsi :

$\forall x \in]-\infty\,;\ 2]\,, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{4}{3\,|x|^n} \leqslant \dfrac{4}{3\,|x|^2}$.

Donc $\forall n \geqslant 2, \forall x \in \mathrm{K}, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-2\,;\ -1[\,, \\ \dfrac{4}{3\,|x|^2} & \text{si } x \leqslant -1. \end{cases}$

φ est c.p.m. sur K et intégrable puisque $n \geqslant 2$.

Le théorème de convergence dominée s'applique donc

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

- Comme pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{I}_n = \int_{\mathrm{J}} f_n + \int_{\mathrm{K}} f_n$$

les limites précédentes montrent que la suite (I_n) converge comme somme de deux suites convergentes et que sa limite est nulle.