1 Un peu de pratique

Exercice 1 *Étude d'un endomorphisme via sa matrice*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En observant les colonnes de A, déterminer le rang, le noyau et l'image de f.
2. Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?
3. Quelle est la matrice de f relativement à une base $\mathcal{C}$ adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?

Solution (**Ex.1** – *Étude d'un endomorphisme via sa matrice*)

1. $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0$ dont les colonnes sont liées : le rang est au plus 2. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, le rang est au moins 2. Donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$.
   $\dim \mathrm{Im}f = 2$ et par le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}f = 1$.
   $\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3 = 0$ signifie $f(i)+f(j)+f(k) \overset{\text{lin.}}{=} f(i+j+k) = 0$ donc $i+j+k \in \mathrm{Ker}f$, et en raison de la dimension, $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}(i + j + k)$.
   $\big(f(i), f(j)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}f$ donc une base en raison de la dimension. Donc $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\big(f(i), f(j)\big) = \mathrm{Vect}(2i + j + k, -i - k) = \mathrm{Vect}(i + j, i + k)$ si on veut simplifier un peu.
2. $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et f est un projecteur, donc son noyau et son image sont supplémentaires.
3. Comme $x \in \mathrm{Im}f \Longrightarrow f(x) = x$ et $x \in \mathrm{Ker}f \Longrightarrow f(x) = 0$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 *Endomorphisme vérifiant une équation*

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
   Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) En observant les colonnes de A, déterminer le rang, le noyau et l'image de f en donnant une base de chacun d'eux.
   b) Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour f ?
   c) Montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires.
   d) Quelle est la matrice de f relativement à une base $\mathcal{C}$ adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?
2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
   Soit f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 = 3f$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires.
   b) Montrer que dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 3\mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{où } r = \mathrm{rg}(f).$$

Solution (**Ex.2** – *Endomorphisme vérifiant une équation*)

1. **a)** $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0$ dont les colonnes sont liées : le rang est au plus 2. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, le rang est au moins 2. Donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$.
   $\dim \mathrm{Im}f = 2$ et par le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}f = 1$.
   $\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3 = 0$ signifie $f(i)+f(j)+f(k) \overset{\text{lin.}}{=} f(i+j+k) = 0$ donc $i+j+k \in \mathrm{Ker}f$, et en raison de la dimension, $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}(i + j + k)$.
   $\big(f(i), f(j)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}f$ donc une base en raison de la dimension. Donc $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\big(f(i), f(j)\big) = \mathrm{Vect}(2i - j - k, -i + 2j - k)$ si on veut simplifier un peu.
   b) $\mathrm{A}^2 = 3\mathrm{A}$ donc $f^2 = 3f$.
   c) On vérifie que $\mathcal{M}(f(i), f(j), i + j + k) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3, donc la famille $(f(i), f(j), i + j + k)$ est une base de E. Donc $\mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f = \mathrm{E}$.

d) Avec $\mathcal{C} = (f(i), f(j), i+j+k)$, on a $f(f(i)) = f^2(i) = 3f(i)$, $f(f(j)) = f^2(j) = 3f(j)$ et $f(i+j+k) = 0$ (noyau !) donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Par la formule du rang : $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{E}$.

Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$. $\exists y \in \mathrm{E}, x = f(y)$. Alors $f(x) = f^2(y) = 3f(y) = 3x$, or $f(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker} f$. Donc $3x = 0$, donc $x = 0$. Ainsi : $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$.

Bilan : $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = \mathrm{E}$.

b) Soit $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_k$ des bases de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ respectivement.

On a : $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_i) = r$ et $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_k) = n - r$ et $\mathcal{C} = (\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_k)$ est une base de E par supplémentarité.

De plus : $\forall x \in \mathcal{B}_i, x \in \mathrm{Im} f$, donc $\exists y \in \mathrm{E}, x = f(y)$, et alors $f(x) = f^2(y) = 3f(y) = 3x$.

Et : $\forall x \in \mathcal{B}_k, x \in \mathrm{Ker} f$, donc $f(x) = 0$.

Donc : $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 3\mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{array}\right)$.

Exercice 3 *Matrice d'un endomorphisme nilpotent*

1. Soit

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.

a) Calculer N^2 et N^3. Que peut-on en déduire pour f ?

On dit que f est *nilpotente d'indice (ou d'ordre) 3.*

b) On pose $e_1 = (1, 0, 0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geq$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Solution (**Ex.3** – *Matrice d'un endomorphisme nilpotent*)

1. a) $\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ -2 & -6 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N}^3 = 0_3$. Donc $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

b) En notant $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ donc } \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

c) De $f^3(e_1) = 0$ car $f^3 = 0$, on tire immédiatement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geq$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $e \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

Soit $\mathcal{B} = (f^{n-1}(e), f^{n-2}(e), \dots, f(e), e)$. $\mathcal{B}$ est une famille de $n = \dim(\mathrm{E})$ vecteurs. Il suffit qu'elle soit libre pour être une base. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$a_{n-1} f^{n-1}(e) + \cdots + a_1 f(e) + a_0 e = 0 \quad (\heartsuit).$$

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-1}, il vient immédiatement $a_0 f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_0 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

$(\heartsuit)$ devient alors $a_{n-1} f^{n-1}(e) + \cdots + a_1 f(e) = 0$.

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-2}, il vient immédiatement $a_1 f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_1 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

En itérant, on a : $\forall k \in [\![0\,;\ n-1]\!]\,,\quad a_k = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est une libre et par conséquent $\mathcal{B}$ est une base.

De $f^n(e) = 0$ car $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ vient alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et φ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{A} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{M}.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer son noyau, son image et son rang.

Solution (**Ex.4** – *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. Sans souci.
2. Remarquons que si $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi(\mathrm{M}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{A} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{M}$.
   • Premier cas : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq 0$.
   Si $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$, alors $\mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$. Et réciproquement, si $\mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$, en posant $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{A}$, $\varphi(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{A} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\lambda\mathrm{A} = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.
   Alors $\mathrm{rg}(\varphi) = n^2 - 1$.
   De plus : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}\,(\varphi(\mathrm{M})) = 0$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
   • Second cas : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 0$.
   Alors $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$. Et réciproquement, si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$, alors $\varphi(\mathrm{M}) = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
   Alors $\mathrm{rg}(\varphi) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$.
   De plus : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{A} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$, et par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\qquad \varphi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n$.

1. a) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
b) Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$.
c) φ est-il un automorphisme ?

2. a) Déterminer l'ensemble E_1 des matrices M telles que
$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}.$$
Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E, préciser sa dimension.
b) Déterminer l'ensemble E_2 des matrices M telles que
$$\varphi(\mathrm{M}) = (1-n)\mathrm{M}.$$
Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace de E, préciser sa dimension.

3. a) Justifier que E_1 et E_2 sont stables par φ, et supplémentaires.
b) Donner la matrice représentant φ dans une base obtenue en concaténant une base de E_1 et une base E_2.

Solution (**Ex.5** – *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. a) Par la linéarité de $\mathrm{Tr}\,()$, on vérifie sans peine que φ est linéaire.
b) $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\varphi \Longrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(()\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n) \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{Tr}\,(()\,\mathrm{I}_n) \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = n\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$, et comme $n \neq 1, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$.
Or $\mathrm{M} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{M} = 0$. $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.
c) φ est un endomorphisme de E, de dimension finie n^2. Comme φ est injectif (puisque $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$), φ est un automorphisme.

2. a) $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Longleftrightarrow \mathrm{M} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n = \mathrm{M} \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,())$.
$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,())$, comme tout noyau, c'est un sous-e.v. de E. Comme $\mathrm{Tr}\,()$ est une forme linéaire non nulle ($\mathrm{Tr}\,(:)\,\mathrm{E} \to \mathbb{R}$), $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}\,()) = \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}\,()) = 1$, et par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,())) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(\mathrm{Tr}\,())$, donc $\dim(\mathrm{E}_1) = n^2 - 1$.
b) $\varphi(\mathrm{M}) = (1-n)\mathrm{M} \Longleftrightarrow \mathrm{M} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{I}_n = (1-n)\mathrm{M} \Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}{n}\mathrm{I}_n = \mathrm{M}$.
Donc : $\mathrm{M} \in \mathbb{E}2 \Longrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.
Réciproquement, si $\mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$, en écrivant $\mathrm{M} = \alpha\mathrm{I}_n$, $\dfrac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}{n}\mathrm{I}_n = \dfrac{\alpha n}{n}\mathrm{I}_n = \alpha\mathrm{I}_n = \mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_2$.
Donc $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$, sous-espace vectoriel de dimension 1 de E.

3. a) On a déjà $\dim(\mathrm{E}_1) + \dim(\mathrm{E}_2) = n^2 = \dim(\mathrm{E})$.
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Alors $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{M} = \alpha\mathrm{I}_n$.
Alors $0 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(()\,\alpha\mathrm{I}_n) = \alpha\mathrm{Tr}\,(()\,\mathrm{I}_n) = \alpha n$, donc $\alpha = 0$ puisque $n \neq 0$.
Donc $\mathrm{M} = 0$.
b) Soit $\mathcal{B} = (\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{n^2-1}, \mathrm{B})$ une base de E avec $\mathrm{A}_i \in \mathrm{E}_1$ pour $1 \leq i \leq n^2 - 1$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{E}_2$. Alors
$\forall i \in [\![1\,;\ n^2-1]\!]\,, \varphi(\mathrm{A}_i) = 1 \times \mathrm{A}_i$ et $\varphi(\mathrm{B}) = (1-n)\mathrm{B}$.
Du coup, la matrice de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ représentant φ est la matrice diagonale :
$$mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = diag(1, \dots, 1, 1-n)$$

2 Qu'on les appelle projections ou projecteurs, iels sont incontournables !

Exercice 6 *Rang et trace d'un projecteur*
Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que :

$$p \circ p = p.$$

1. a) Démontrer que $\mathrm{Im}(p) = \{u \in \mathrm{E}, p(u) = u\}$.
b) Démontrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires.

2. On suppose de plus que E est de dimension finie n. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}\,(p)$.

Solution (**Ex.6** – *Rang et trace d'un projecteur*)

1. a) • $\forall u \in \mathrm{E}, \quad \big(u = p(u)\big) \Longrightarrow \big(u \in \mathrm{Im}(p)\big)$.
• Soit $u \in \mathrm{Im}(p)$. Alors : $\exists v \in \mathrm{E}, p(v) = u$.
Donc $p(u) = p^2(v) = p(v) = u$.

b) • Soit $u \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Comme $u \in \mathrm{Im}(p), p(u) = u$. Comme $u \in \mathrm{Ker}(p), p(u) = 0$. Donc $u = 0$. Bilan : $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$, l'inclusion réciproque étant évidente (pour mémoire, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels E...). Ainsi, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe.
• En dimension finie, on pourrait argumenter par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{K}er(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{E})$.
Conclusion : $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}$
• En dimension quelconque, on peut décomposer tout vecteur x sous la forme $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$ et observer que $p(x) \in \mathrm{Im}(f)$ tandis que $p\big(x - p(x)\big) = p^2(x) - p(x) = 0$ donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Ce qui prouve que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$.

2. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{E}$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\dim(\mathrm{Im}(p))} & 0 \\ \hline 0 & 0_{\dim(\mathrm{Ker}(p))} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\mathrm{rg}(p)} & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-\mathrm{rg}(p)} \end{array}\right)$$

Par conséquent, $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}\,(()\,p)$.

Exercice 7 *Noyau et image supplémentaires*
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. On suppose de plus que E est de dimension finie et que

$$\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f).$$

a) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f).$$

b) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathrm{E}.$$

Solution (**Ex.7** – *Noyau et image supplémentaires*)
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. • $f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
• $x = f^2(y) \Rightarrow x = f\big(f(y)\big)$ donc $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. a) • On a $\dim \mathrm{Im}(f^2) = \dim \mathrm{Im}(f)$ donc avec l'inclusion précédente $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.
• Le théorème du rang entraîne alors $\dim \mathrm{Ker}(f^2) = \dim \mathrm{Ker}(f)$ donc par l'inclusion précédente $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

b) • Le théorème du rang assure que
$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{E}.$$
• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
Posons $x = f(y)$. Alors $f^2(y) = 0$. Donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(y) = 0$, *i.e.* $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
• Ainsi, on a bien $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathrm{E}$.

Exercice 8 *Projections et décomposition*
Soit $f_1, \dots, f_n$ n endomorphismes d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E tels que

$$f_1 + \cdots + f_n = id_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad \forall i \neq j,\ f_i \circ f_j = 0.$$

1. Montrer que chaque f_i est un projecteur.

2. Montrer que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{E}$.

3. Que peut-on dire de f_1 et f_2 lorsque $n = 2$?

Solution (**Ex.8** – *Projections et décomposition*)

1. En composant l'égalité par f_k, on obtient $f_k \circ f_k = f_k$.

2. • Soit $x \in \mathrm{E}$. On a : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ donc $x \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i)$. Ainsi $\mathrm{E} \subset \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i)$.
• L'inclusion réciproque étant évidente, $\mathrm{E} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i)$.

• Supposons que $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$ avec $\forall i, y_i \in \mathrm{Im}(f_i)$. En écrivant chaque y_i sous la forme $y_i = f_i(x_i)$, on a $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = 0$, et en composant par f_k, $f_k(x_k) = 0$. Donc $y_k = 0$. Et ceci pour tout k de $[\![1\,;\; n]\!]$. Donc la somme est directe.

3. f_1 et f_2 sont deux projecteurs associés : f_1 est la projection de E sur $\mathrm{Im}(f_1)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f_2)$ et f_1 est la projection de E sur $\mathrm{Im}(f_2)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f_1)$.

3 Algèbre linéaire et polynômes

Exercice 9 *Lemme des noyaux et diagonalisation*
Soit a et b deux scalaires distincts de $\mathbb{K}$ et

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - (a+b)\mathrm{X} + ab.$$

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E. On suppose que $\mathrm{P}(u) = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u - a.id_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}})$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - a.id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$. *On pourra exploiter la relation* $\frac{1}{b-a}\big((\mathrm{X}-a) - (\mathrm{X}-b)\big) = 1$.

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentant u est diagonale. On dit que u est *diagonalisable.*

4. Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u - a.id_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{Im}(u - b.id_{\mathrm{E}})$ sont-ils supplémentaires ?

5. *Application*
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est diagonalisable.

Solution (**Ex.9** – *Lemme des noyaux et diagonalisation*)

1. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - a.id_{\mathrm{E}})$ et $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = u(y) - ay$.
$(u - b.id_{\mathrm{E}})(x) = \mathrm{P}(u)(y) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}})$.

2. • Si u est dans l'intersection des noyaux, $u(x) = ax$ et $u(x) = bx$ donc $(b-a)x = 0$ avec $a \neq b$ donc $x = 0$.
• Soit $x \in \mathrm{E}$. La relation proposée permet d'écrire
$x = \frac{1}{b-a}\big((u(x) - ax) - (u(x) - bx)\big)$ avec par la question précédente $u(x) - ax \in \mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}})$ et symétriquement $u(x) - bx \in \mathrm{Ker}(u - a.id_{\mathrm{E}})$.
Donc x est la somme de deux vecteurs pris dans chacun des noyaux.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue par concaténation d'une base $\mathcal{B}_a$ de $\mathrm{E}_a = \mathrm{Ker}(u - a.id_{\mathrm{E}})$ et d'une base $\mathcal{B}_b$ de $\mathrm{E}_b = \mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}})$.
Pour tout vecteur x de $\mathcal{B}_a$, $u(x) = ax$ et pour tout vecteur x de $\mathcal{B}_b$, $u(x) = bx$. Donc la matrice représentant u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

4. La formule du rang pour $u - a.id_{\mathrm{E}}$ et la supplémentarité des noyaux montre que $\dim(\mathrm{Im}(u - a.id_{\mathrm{E}})) = \dim(\mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}}))$. Et l'inclusion de la question 1 montre l'égalité des sous-espaces. De même $Im(u - b.id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(u - a.id_{\mathrm{E}})$, et les sous-espaces $\mathrm{Im}(u - a.id_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{Im}(u - b.id_{\mathrm{E}})$ sont supplémentaires.

5. *Application*
$\mathrm{M}^2 = 4\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_4$ donc $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 2$ est un polynôme annulateur de u qui possède deux racines distinctes car son discriminant vaut $8 > 0$, donc u est diagonalisable.

Exercice 10 *Polynôme annulateur et bijectivité*
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et φ défini sur E par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}'.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2. Déterminer un polynôme annulateur non nul de φ.

3. Justifier que φ est bijectif et déterminer φ^{-1} à l'aide des puissances de φ, puis en explicitant $\varphi^{-1}(\mathrm{P})$ en fonction de P.

4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Solution (**Ex.10** – *Polynôme annulateur et bijectivité*)
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et φ défini sur E par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}'.$$

1. Sans souci φ est un endomorphisme de E.

2. En écrivant la matrice M de φ dans la base canonique de E, on remarque que $\mathrm{M} - \mathrm{I}_4$ est nilpotente, avec $(\mathrm{M} - \mathrm{I}_4)^4 = 0$.
Donc $(\mathrm{X} - 1)^4 = \mathrm{X}^4 - 4\mathrm{X}^3 + 6\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 1$ est un polynôme annulateur de φ.

3. On a alors $\varphi\circ(-\varphi^3+4\varphi^2-6\varphi+4id_{\mathrm{E}})=id_{\mathrm{E}}$ donc φ est bijective avec $\varphi^{-1}=-\varphi^3+4\varphi^2-6\varphi+4id_{\mathrm{E}}$.
$\varphi^0=id_{\mathrm{E}}$, $\varphi^1=\varphi$, $\varphi^2:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}-2\mathrm{P}'+\mathrm{P}''$, $\varphi^3:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}-3\mathrm{P}'+3\mathrm{P}''-\mathrm{P}^{(3)}$ conduit à $\varphi^{-1}(\mathrm{P})=\mathrm{P}+\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}^{(3)}$.

4. Les mêmes raisonnements donne comme polynôme annulateur
$$(\mathrm{X}-1)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\mathrm{X}^{n+1-k}$$
et
$$\varphi^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{k+1}\varphi^{n-k}:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}+\mathrm{P}'+\cdots+\mathrm{P}^{(n)}$$
Pour la dernière expression, on voit sans peine qu'avec cette expression de φ, on a bien $\varphi\circ\varphi^{-1}(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ puisque $\mathrm{P}^{(n+1)}=0$.

Exercice 11 *Sur une présentation algébrique de l'interpolation de Lagrange*
Dans cet exercice, on « oublie » le cours consacré à l'interpolation de Lagrange et on le redécouvre par une autre approche.
Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Soit
$$f:\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]\to\mathbb{K}^{n+1},\mathrm{P}\mapsto\big(\mathrm{P}(a_0),\mathrm{P}(a_1),\dots,\mathrm{P}(a_n)\big).$$

1. Montrer que f est un isomorphisme.

2. Soit $b=(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^{n+1}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme P_b de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que
$$\forall i\in[\![0\,;\,n]\!],\quad \mathrm{P}_b(a_i)=b_i.$$

3. On note $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Expliciter les polynômes $\mathrm{L}_i=f^{-1}(e_i)$.

4. Déterminer les coordonnées de P_b dans la base $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$.

5. a) Que dire d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ prenant $n+1$ fois la même valeur ?

b) Calculer $f\left(\sum_{i=0}^{n}\mathrm{L}_i\right)$ et en déduire $\sum_{i=0}^{n}\mathrm{L}_i$.

Solution (**Ex.11** – *Sur une présentation algébrique de l'interpolation de Lagrange*)
Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Soit
$$f:\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]\to\mathbb{K}^{n+1},\mathrm{P}\mapsto\big(\mathrm{P}(a_0),\mathrm{P}(a_1),\dots,\mathrm{P}(a_n)\big).$$

1. • Linéarité sans souci.
• $\dim(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}])=\dim(\mathbb{K}^{n+1})=n+1$.
• $f(\mathrm{P})=0$ entraîne que P a $n+1$ racines distinctes donc $\mathrm{P}=0$ car P est de degré au plus n. Donc $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$.
Ces trois points assurent que f est un isomorphisme.

2. Les $n+1$ égalités souhaitées équivalent à $f(\mathrm{P}_b)=b$. La surjectivité de f assure l'existence de P_b et son injectivité assure l'unicité.

3. L_i est le polynôme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ valant 1 en a_i et 0 aux autres j ($j\neq i$).
Donc $\mathrm{L}_i(\mathrm{X})=\prod_{j\neq i}\dfrac{\mathrm{X}-a_j}{a_i-a_j}$. On reconnaît le $i-$ème polynôme de la base de Lagrange associée aux $(aj)_{0\leqslant j\leqslant n}$.

4. $f(\mathrm{P}_b)=b=\sum_{i=0}^{n}b_ie_i$ donc, par linéarité de f^{-1}, $\mathrm{P}_b=\sum_{i=0}^{n}b_if^{-1}(e_i)=\sum_{i=0}^{n}b_i\mathrm{L}_i$

5. a) Un polynôme P de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ prenant $n+1$ fois la même valeur α est constant car $\mathrm{P}-\alpha$ admet au moins $n+1$ racines donc est nul.

b) $f\left(\sum_{i=0}^{n}\mathrm{L}_i\right)=(1,1,\dots,1)$ donc $\sum_{i=0}^{n}\mathrm{L}_i$ prend $n+1$ fois la valeur donc est le polynôme constant égal à 1.