Exercice 1 *Études de convergence*

Soit $\mathrm{I} = [0\,;\,1]$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n, g_n et h_n les fonctions définies sur I par

$$f_n(x) = x^n(1-x),\ g_n(x) = nx^n(1-x) \text{ et } h_n(x) = n^2x^n(1-x).$$

Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n). (g_n) et (h_n).

Solution (**Ex.1** – *Études de convergence*)

• $\forall n, f_n(1) = g_n(1) = h_n(1) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

• Pour $x \in [0\,;\,1[$ et $a \in \mathbb{R}$, en posant $u_n = n^a x^n$, on a : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in [0\,;\,1[$ donc la série de terme général u_n converge donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc les trois suites de fonctons convergent simplement vers la fonction nulle.

• Les trois fonctions sont continues sur le segment I donc bornées.

• Une étude de fonctions montre que $|f_n - 0|$ atteint son maximum valant $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \dfrac{1}{n+1}$ en $\dfrac{n}{n+1}$. Donc

$||f_n - 0||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n \overset{\mathcal{CVU}}{\longrightarrow} 0,$

$||g_n - 0||_\infty = n\,||f_n||_\infty = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ et (g_n) ne converge pas uniformément,

$||h_n - 0||_\infty = n\,||g_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et (h_n) ne converge pas uniformément.

Exercice 2 *Se méfier des opérations algébriques, même simples !*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\quad f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n). La convergence est-elle uniforme ?
2. Étudier la limite simple de la suite (f_n^2). La convergence est-elle uniforme ?
3. La suite (f_n^2) converge-elle uniformément sur tout segment de $[0\,;\,a]$ de $\mathbb{R}^+$?

Solution (**Ex.2** – *Se méfier des opérations algébriques, même simples !*)

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$, donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}+$ vers $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+,\quad |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad ||f_n - f||_\infty = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
   Ainsi la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^2(x) = x^2$, donc la suite (f_n^2) converge simplement sur $\mathbb{R}+$ vers $f^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \left|f_n^2(x) - f^2(x)\right| = \left|\dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right|.$
   Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad x_n \overset{\text{déf.}}{=} n$. Alors :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \left|f_n^2(x_n) - f^2(x_n)\right| = \left|2 + \dfrac{1}{n^2}\right| > 2$
   donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad ||f_n - f||_\infty > 2$ et $(||f_n - f||_\infty)_n$ ne tend pas vers 0.
   Ainsi la suite (f_n^2) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f^2.
3. Soit $a \geq 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\,a],\quad \left|f_n^2(x) - f^2(x)\right| = \left|\dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right|.$
   donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad ||f_n - f||_{\infty,[0\,;\,a]} = \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ et $(||f_n - f||_{\infty,[0\,;\,a]})_n$ tend vers 0.
   Ainsi la suite (f_n^2) converge uniformément sur tout segment $[0\,;\,a]$ vers f^2.
   Moralité : la convergence uniforme ne supporte pas nécessairement les opérations algébriques simples...
   Prévisibilité de la situation : de l'identité $f_n^2 - f^2 = (f_n - f)(f_n + f)$, on pressent que pour que $\left|\left|f_n^2 - f^2\right|\right|_\infty \xrightarrow[n\to 0]{}$, mieux vaut maîtriser $||f_n + f||_\infty$, ce qui ici n'est le cas que sur des intervalles bornés...

Exercice 3 *Convergence uniforme ?*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Et sur $[a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$?

Solution (**Ex.3** – *Convergence uniforme ?*)

1. Observons que chaque f_n est impaire. $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Chaque f_n est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n'(x) = \dfrac{2^n(1+n2^nx^2) - 2^nx(n2^{n+1}x}{(1+n2^nx^2)^2}$,

$f_n'(x)$ est du signe de $1 - n2^nx^2$. Soit $x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n2^n}}$. Donc f_n est strictement croissante sur $[0\,;\ x_n]$ et strictement décroissante sur $[x_n\,;\ +\infty[$. Comme $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = f_n(x_n) = \dfrac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}$. Par symétrie, puisque f_n est impaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad ||f_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

et il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0, \quad x_n \leq a$.
Par l'étude précédente, pour tout $n \geq n_0$, f_n est strictement décroissante sur $[a\,;\ +\infty[$ (et positive) donc $||f_n - 0||_{\infty,[a\,;\,+\infty[} = f_n(a)$. Or $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par convergence simple de 1.).
Donc $||f_n - 0||_{\infty,[a\,;\,+\infty[} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la convergence est uniforme sur $[a\,;\ +\infty[$.

Exercice 4 *Permutation limite/intégrale : les 3 méthodes usuelles*

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;\ \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n\sin x}{n+x}$.
On se propose de montrer par trois méthodes à maîtriser que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad (\sharp)$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers $f \overset{\text{déf.}}{=} \sin$ sur $[0\,;\ \pi]$ et calculer $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

2. *Comme en première année.*
En majorant $\left|\displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right|$, montrer $(\sharp)$.

3. *Par convergence uniforme.*
Montrer que la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme et justifier $(\sharp)$.

4. *Par convergence dominée.*
Justifier $(\sharp)$ par le théorème de convergence dominée.

Solution (**Ex.4** – *Permutation limite/intégrale : les 3 méthodes usuelles*)
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;\ \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n\sin x}{n+x}$.
On se propose de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 2 \qquad (\sharp)$$

par les trois méthodes à maîtriser.

1. Soit $x \in [0\,;\ \pi]$.
$f_n(x) = \dfrac{n\sin x}{n+x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\sin x}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin x$,
donc (f_n) converge simplement vers $f \overset{\text{déf.}}{=} \sin$ sur $[0\,;\ \pi]$.
$\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 2$... si !

2. *Comme en première année.*
En majorant

$$\left|\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\pi \frac{x\sin x}{n+x}\mathrm{d}x \leq \int_0^\pi \frac{\pi}{n}\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\pi^2}{n},$$

donc par encadrement : $\left|\displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui démontre $(\sharp)$.

3. *Par convergence uniforme.*
$\forall x \in [0\,;\ \pi]\, |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{x\sin x}{n+x} \leq \dfrac{\pi}{n}$, donc $||f_n - f||_\infty \leq \dfrac{\pi}{n}$ et par encadrement : $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme. Comme toutes ces fonctions f_n sont continues sur le segment $[0\,;\ \pi]$, la permutation intégrale/limite est licite, ce qui justifie $(\sharp)$.

4. *Par convergence dominée.*
$\forall x \in [0\,;\ \pi], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{n}{n+x} \leq 1$ donc $x \mapsto 1$ est une fonction intégrable dominant toutes les f_n.
Puisque les f_n et f sont continues, le théorème de convergence dominée s'applique et autorise la permutation intégrale/limite, ce qui justifie $(\sharp)$.

Exercice 5 *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*

Soit α un paramètre réel quelconque et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : [0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x\big(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}\big).$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite de fonctions (f_n) converge uniformément.

2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\big(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x.$$

3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\big(1+n^2\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.5** – *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*)

1. $f_n \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} f : [0\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto x$.
Par étude de f_n-f, $\|f_n-f\|_\infty=(f_n-f)(1/n)=n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}$.
Il y a donc convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha<1$.

2. $\alpha=1/2$ donc il y a convergence uniforme sur le segment $[0\,;\,1]$ et le théorème de permutation s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\big(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

3. $\alpha=2$ et il n'y a pas convergence uniforme.
Un calcul explicite par intégration par parties donne :

$$\int_0^1 x\big(1+n^2\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-n\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{-n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{3}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales impropres*

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, sous réserve d'existence,

$$\mathrm{J}_n=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

1. a) Vérifier l'existence de J_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
b) Montrer que la suite $(\mathrm{J}_n)_n$ converge, vers 0.

2. Déterminer un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.6** – *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales impropres*)

1. a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. De la majoration classique : $\forall x\in\mathbb{R},\quad |\sin x|\leq x$, on tire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|\frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\right|\leq\frac{1}{n}\times\frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ existe (et vaut $\dfrac{\pi}{2}$), J_n est absolument convergente, donc convergente.

b) De la majoration précédente découle par l'inégalité triangulaire : $|\mathrm{J}_n|\leq\dfrac{\pi}{2n}$.
Par encadrement, $(\mathrm{J}_n)_n$ est une suite convergente, de limite nulle.

2. Déterminer un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Heuristique : comme $\sin(x/n)\underset{n\to+\infty}{\sim}x/n$, $\dfrac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n(1+x^2)}$, et on peut penser que $\mathrm{J}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2n}$... Établissons $n\mathrm{J}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{\pi}{2}$.

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n :]\,0\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto\dfrac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}=\dfrac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}(1+x^2)}$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue.
- $\forall x\in\,]\,0\,;\,+\infty[,\quad f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{1+x^2}$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction continue $f : x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$.
- De la majoration $|\sin(x)|\leq|x|$ vient
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\,]\,0\,;\,+\infty[,\quad |f_n(x)|\leq f(x),$$
avec f continue et intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.
Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\mathrm{J}_n=\frac{\pi}{2}$, donc $\mathrm{J}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2n}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales*

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n\overset{\text{déf.}}{=}\int_0^n\sqrt{1+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}t$$

On pourra procéder à un changement de variable...

Solution (**Ex.7** – *Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales*)

Commençons par poser $x=1-\dfrac{t}{n}$, changement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\,n]$:

$$u_n=n\int_0^1\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.
Il s'ensuit que : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n$.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ *L'intégrale se concentre sur f(0)*

Soit $f : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, x\mapsto\dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$.

1. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$ où $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}$.

3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

4. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[\,0\,;\,+\infty[\,$?

Solution (**Ex.8** – *L'intégrale se concentre sur f(0)*)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$.

1. Soit $n \geq 1$. f_n est continue, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$, et il existe une constante M telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{n\mathrm{M}}{n^2x^2} \leq \dfrac{\mathrm{M}}{nx^2}$.
Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[\,1\,;\,+\infty[$ (Riemann $2 > 1$) donc I_n existe.

2. Posons $u : x \mapsto nx$, $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty[$ (car $n > 0$), donc :
$\mathrm{I}_n \overset{u=nx}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} g_n(u)\mathrm{d}u$ avec $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}$.

3. • Pour tout n, g_n est continue ;
• $g_n \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} g : [\,0\,;\,+\infty[\, \to \mathbb{R}, u \mapsto \dfrac{f(0)}{1+u^2}$;
• g est continue ;
• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [\,0\,;\,+\infty[\,, |g_n(u)| \leq \dfrac{\mathrm{M}}{1+u^2}$ avec $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ intégrable.

Par convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}f(0)$.

4. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[\,0\,;\,+\infty[\,$?
À x fixé dans $]\,0\,;\,+\infty[$,
• si $f(x) \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(x)}{nx^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
• si $f(x) = 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Pour $x = 0$, $f_n(x) = nf(0)$,
• si $f(0) = 0$, $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
• si $f(0) \neq 0$, $f_n(0)$ diverge vers $\pm\infty$ (précisément $sign(f(0)) \times \infty$).
Bilan : il y convergence simple sur $[\,0\,;\,+\infty[$ si, et seulement si, $f(0) = 0$. Dans ce cas, la limite simple est la fonction nulle.