Commutant d'un endomorphisme nilpotent

1. **a)** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $M^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$, $M^3 = 0$, donc $\varphi^3 = 0$.

c) Avec $x = (0,0,1)$, $\varphi(x) = (1,1,0)$, $\varphi^2(x) = (1,0,3)$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc $\mathcal{C} = \big(x, \varphi(x), \varphi^2(x)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **Ce n'est pas la seule solution,** $(1,0,0)$ ou $(0,1,0)$ conviennent aussi par exemple.

d) $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\mathcal{C}$ est « faite pour »).

2. **a)** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\psi = a id + b\varphi + c\varphi^2$
$\varphi \circ \psi = a\varphi + b\varphi^2 + c\varphi^3 = \psi \circ \varphi$, donc $\mathrm{Vect}(id, \varphi, \varphi^2) \subset \mathrm{COM}(\varphi)$.

b) $\psi(x) = a_0 x + a_1\varphi(x) + a_2\varphi(x)$, $\psi(\varphi(x)) = a_0\varphi(x) + a_1\varphi^2(x)$ $\psi(\varphi^2(x)) = a_0\varphi^2(x)$, donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\psi) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

c) Comme $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\psi) = a_0 I_3 + a_1 N + a_2 N^2$, donc $\psi = a_0 id + a_1\varphi + a_2\varphi^2$, donc $\psi \in \mathrm{Vect}(id, \varphi, \varphi^2)$.
Donc $\mathrm{COM}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(id, \varphi, \varphi^2)$.

d) a) et c) montrent que $\mathrm{COM}(\varphi) = \mathrm{Vect}(id, \varphi, \varphi^2)$.
De plus (id, φ, φ^2) est libre. En effet, si $a.id + b\varphi + c\varphi^2 = 0$, alors $ax + b\varphi(x) + c\varphi^2(x) = 0$.
Et comme $(x, \varphi(x), \varphi^2(x))$ est libre, $a = b = c = 0$.
Donc $\mathrm{COM}(\varphi)$ est un espace vectoriel, de dimension 3, dont (id, φ, φ^2) est une base.

e) Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A. Comme $AM = MA$, $\psi \in \mathrm{COM}(\varphi)$ donc $\psi \in \mathrm{Vect}(id, \varphi, \varphi^2)$, donc il existe a_0, a_1 et a_2 tels que $\psi = a_0 id + a_1\varphi + a_2\varphi^2$, relation qui entraîne que $A = a_0 I_3 + a_1 M + a_2 M^2$, *i.e.* il existe $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $A = P(M)$.

3. **a)** • Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Posons $\mathcal{C} = \big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$.
• $\mathcal{C}ard(\mathcal{C}) = n = \dim(E)$ donc il suffit que $\mathcal{C}$ soit libre pour être une base.
• Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ n scalaires tels que (R) : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x) = 0$.
En composant (R) par f^{n-1}, on a : $a_0 f^{n-1}(x) = 0$ donc $a_0 = 0$.
En composant ensuite (R) par f^{n-2}, on a : $a_1 f^{n-1}(x) = 0$ donc $a_1 = 0$.
En itérant, on prouve finalement que : $\forall i, a_i = 0$.

b) Analogue à 5.a).

c) Comme en 5.b), $\mathcal{C}$ étant une base, il existe n réels tels que $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x)$.

Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

d) On notant $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{1,n-1} & 0_{1,1} \\ \hline \mathrm{I}_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{array}\right)$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathrm{N}^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f^i) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i\right)$, donc $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$, ce qui montre que $g \in \mathrm{Vect}(id_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{n-1})$, donc $\mathrm{COM}(f) \subset \mathrm{Vect}(id_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{n-1})$.
Finalement $\mathrm{COM}(f) = \mathrm{Vect}(id_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{n-1})$.