Ce problème permet de s'entraîner sur deux notions fréquemment rencontrées dans les sujets :
(i) les endomorphismes nilpotents ;
(ii) la recherche du commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Commutant d'un endomorphisme nilpotent

1. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi : (x, y, z) \longmapsto (-3x + 4y + z, -3x + 3y + z, 3y).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer la matrice M représentant φ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Que peut-on dire de φ^3 ?

c) Déterminer un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{C} = \big(x, \varphi(x), \varphi^2(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Déterminer la matrice N représentant φ dans la base $\mathcal{C}$.

2. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathrm{COM}(\varphi)$ des endomorphismes ψ de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec φ :

$$\mathrm{COM}(\varphi) = \big\{\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3);\ \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\big\}.$$

a) Justifier que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $P(\varphi) \in \mathrm{COM}(\varphi)$.

b) Soit $\psi \in \mathrm{COM}(\varphi)$. On note (a_0, a_1, a_2) les coordonnées de $\psi(x)$ dans la base $\mathcal{C}$, de sorte que $\psi(x) = a_0 x + a_1\varphi(x) + a_2\varphi^2(x)$.
Expliciter la matrice représentant ψ dans la base $\mathcal{C}$.

c) Justifier que $\mathrm{COM}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(id, \varphi, \varphi^2)$.

d) Justifier que $\mathrm{COM}(\varphi)$ est un espace vectoriel en en précisant une base et la dimension.

e) Montrer qu'une matrice A commute avec la matrice M si, et seulement si, il existe un polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $A = P(M)$.

3. Dans cette question, on considère un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n au moins égale à 2. On désigne par $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E, et par id_E l'endomorphisme identité de E.
Soit f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

a) Justifier l'existence d'un vecteur x de E tel que $\mathcal{C} = \big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ soit une base de E.
On souhaite déterminer l'ensemble $\mathrm{COM}(f)$ des endomorphismes g de E qui commutent avec f :

$$\mathrm{COM}(f) = \big\{g \in \mathcal{L}(E);\ g \circ f = f \circ g\big\}.$$

b) Montrer que $\mathrm{Vect}(id_E, f, \dots, f^{n-1}) \subset \mathrm{COM}(f)$.

c) Soit $g \in \mathrm{COM}(f)$. Justifier l'existence de n réels $\big(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\big)$ tels que la matrice de g dans la base $\mathcal{C}$ soit

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

d) En déduire que $\mathrm{COM}(f) = \mathrm{Vect}(id_E, f, \dots, f^{n-1})$.