Exercice 1 *Équivalent d'une suite d'intégrales et fonction définie par une somme de série*

Partie A - Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^n)\mathrm{d}x.$$

1. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : [\,0\,;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n \ln(1+x^n)$$

a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
b) La convergence de la suite (f_n) est-elle uniforme ?
c) Montrer à l'aide d'un changement de variable que

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \quad \text{où } g_n : t \longmapsto \frac{t^{1/n}\ln(1+t)}{n}.$$

d) Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
e) En déduire la convergence et la limite de la suite (I_n).

Dans les deux questions suivantes, on se propose de déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ de deux façons différentes.

2. *Première méthode*
a) Rappeler l'énoncé précis du théorème de convergence dominée.
b) En observant que

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{1/n}\ln(1+t)\mathrm{d}t$$

établir que

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$$

en précisant la valeur de la constante α.

3. *Seconde méthode*
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x^n)\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| \leqslant \frac{\ln(2)}{n(n+1)}.$$

b) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{J}_n = \frac{2\ln(2)-1}{n}.$$

c) En déduire que

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$$

en précisant la valeur de la constante α.

4. a) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\mathrm{I}_n$ converge.
b) Cette série est-elle absolument convergente ?

Partie B - Étude d'une fonction définie par une somme de série

5. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in [\,0\,;\ 1[\,, \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \ln(1+x^k)$$

et sous réserve de convergence,

$$\forall x \in [\,0\,;\ 1[\,, \mathrm{S}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k \ln(1+x^k)$$

a) Rappeler, pour tout x de $[0\,;\,1[$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$.

b) En déduire que S est effectivement définie sur $[0\,;\,1[$.

6. a) Soit $a \in [0\,;\,1[$. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}$ est bornée sur $[0\,;\,a]$ et vérifie

$$||\mathrm{S}_n - \mathrm{S}||_{\infty,[0\,;\,a]} \leqslant \frac{a^{n+1}\ln(2)}{1-a}.$$

Indication : *On pourra remarquer que* $(\mathrm{S}-\mathrm{S}_n)(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \ln(1+x^k)$ *est le reste d'ordre* n *de la série.*

b) En déduire que S est une fonction continue sur $[0\,;\,1[$.

7. Sans chercher à dériver, montrer que S est strictement croissante.

8. a) Montrer que

$$\forall x \in [0\,;\,1[, \quad \ln(2)x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

b) En déduire

$$\forall x \in [0\,;\,1[, \quad \ln(2)\frac{x^2}{1-x^2} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{x^2}{1-x^2}.$$

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \mathrm{S}(x)$, et montrer que S est dérivable en 0 en précisant la valeur de $\mathrm{S}'(0)$.

9. Tracer l'allure de la courbe représentant S.

Solution (**Ex.1** – *Équivalent d'une suite d'intégrales et fonction définie par une somme de série*)

Partie A - Étude d'une suite d'intégrales

1. a) $f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;\,1[\\ \ln(2) & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) La convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme puisque la limite n'est pas continue en 1 alors que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0\,;\,1]$.

c) En posant $t = x^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ on obtient $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$.

d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\forall t \in [0\,;\,1], |g_n(t)| \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}$ donc g_n est bornée et $||g_n||_\infty \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}$, donc $||g_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

e) • Les fonctions g_n sont continues sur le segment $[0\,;\,1]$,

• $g_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} 0$

donc par le théorème d'interversion s'applique : (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 0 = 0$.

2. a) Voir cours

b) Les fonctions $h_n : t \mapsto t^{1/n}\ln(1+t)$ sont continues sur $]0\,;\,1[$, converge simplement vers $h : t \mapsto \ln(1+t)$ qui est continue, et vérifie la majoration $|h_n| \leqslant \ln(2)$ indépendante de n. Comme $t \mapsto \ln(2)$ est continue et intégrable sur $[0\,;\,1]$, le théorème de convergence dominée s'applique et
$\displaystyle\int_0^1 h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln(u)\mathrm{d}u = [u\ln(u)-u]_1^2 = 2\ln(2)-1$. Donc :

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(2)-1}{n}.$$

3. *Seconde méthode*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x^n)\mathrm{d}x.$$

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| = \left|\displaystyle\int_0^1 (x^n - x^{n-1})\ln(1+x^n)\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|x^n - x^{n-1}\right|\ln(2)\mathrm{d}x$

$|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| \leqslant \ln(2)\displaystyle\int_0^1 x^{n-1} - x^n\mathrm{d}x$ car $x^{n-1} \geqslant x^n$

$|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| \leqslant \ln(2)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n(n+1)}$

b) Le même changement qu'en $t = x^n$ qu'en 1.c) donne $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x^n)\mathrm{d}x \overset{t=x^n}{=} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u = \frac{2\ln(2)-1}{n}$

c) $\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\mathrm{I}_n = \dfrac{2\ln(2)-1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(2)-1}{n}$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0\,;\,1], 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ et $0 \leqslant \ln(1+x^{n+1}) \leqslant \ln(1+x^n)$ donc $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, et par croissance de l'intégrale $\mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$.
La suite (I_n) est décroissante et convergente de limite nulle donc par le critère des séries alternées, $\sum_n (-1)^n \mathrm{I}_n$ converge.

b) $|\mathrm{I}_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(2)-1}{n}$ donc par équivalence de termes généraux positifs et divergence de la série harmonique, $\sum_n |\mathrm{I}_n|$ diverge. La série alternée n'est pas absolument convergente.

Partie B - Étude d'une fonction définie par une somme de série

5. a) Pour tout x de $[0\,;\,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\,1[, 0 \leqslant x^k \ln(1+x^k) \leqslant \ln(2)x^k$ donc par comparaison de termes généraux positifs, la série $\mathrm{S}(x)$ converge. Ainsi S est effectivement définie sur $[0\,;\,1[$.

6. a) $\forall x \in [0\,;\,a[$,

$$|\mathrm{S}_n(x) - \mathrm{S}(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \ln(1+x^k)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \ln(1+x^k) \leqslant \ln(2)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$$

$$|\mathrm{S}_n(x) - \mathrm{S}(x)| \leqslant \ln(2)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leqslant \ln(2)x^n \sum_{k=1}^{+\infty} x^k \leqslant \ln(2)\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$|\mathrm{S}_n(x) - \mathrm{S}(x)| \leqslant \ln(2)\frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Ceci prouve que $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}$ est bornée et que $||\mathrm{S}_n - \mathrm{S}||_{\infty,[0\,;\,a]} \leqslant \dfrac{a^{n+1}\ln(2)}{1-a}$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n est continue car somme de fonctions continues, donc par convergence uniforme sur $[0\,;\,a]$, S est continue sur $[0\,;\,a]$. Donc S est continue sur $[0\,;\,a]$.
Et ceci pour tout a de $[0\,;\,1[$. Donc S est continue sur $[0\,;\,1[= \displaystyle\bigcup_{a\in[0\,;\,1[} [0\,;\,a[$.

7. Soit $0 \leqslant x < y < 1$.

$$\mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(y^n \ln(1+y^n) - x^n \ln(1+x^n)\right)$$

Or $\forall n \geqslant 1, y^n > x^n$ donc $y^n \ln(1+y^n) > x^n \ln(1+x^n)$ et $\mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x)$ est la somme de termes tous strictement positifs, donc $\mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x) > 0$.
Donc S est strictement croissante.

8. a) $j : x \to \ln(x+1)$ est concave sur $[0\,;\,1]$ car $j^{(2)} : x \mapsto \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ est négative. $y = \ln(2)x$ et $y = x$ sont les équations de la corde sur $[0\,;\,1]$ et de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_j$. Donc : $\forall x \in [0\,;\,1[,\quad \ln(2)x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

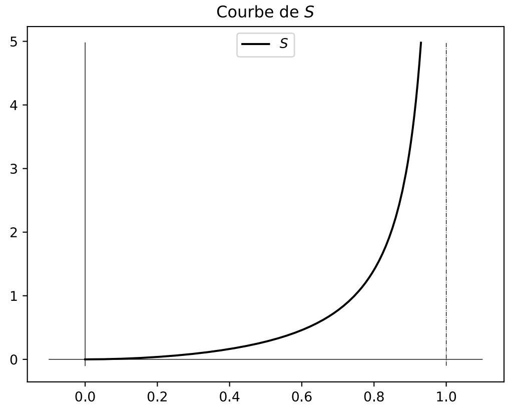
b) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\,1[,\quad \ln(2)x^k \leqslant \ln(1+x^k) \leqslant x^k$ donc $\ln(2)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x^{2k} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} x^{2k}$, c'est-à-dire $\ln(2)\dfrac{x^2}{1-x^2} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{x^2}{1-x^2}$ puisque $x^2 \in [0\,;\,1[$.

c) • $\ln(2)\dfrac{x^2}{1-x^2} \xrightarrow[x\to1]{} +\infty$ donc par minoration $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to1]{} +\infty$.

• $\mathrm{S}(0) = 0$ donc : $\forall x \in]0\,;\,1[, \ln(2)\dfrac{x}{1-x^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x-0} \leqslant \dfrac{x}{1-x^2}$.

Par encadrement : $\dfrac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to0]{} 0$.
S est dérivable en 0 avec $\mathrm{S}'(0) = 0$.

9. La courbe avec sa tangente horizontale à l'origine et l'asymptote verticale d'équation $x = 1$:



$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *Endomorphismes cycliques*

Dans tout le problème,
- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle ;
- id désigne l'endomorphisme *identité* et $0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ l'endomorphisme nul de E :

$$id : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, x \longmapsto x \quad \text{et} \quad 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, x \longmapsto 0.$$

- pour tout entier naturel m et tout endomorphisme u de E, u^m désigne l'endomorphisme $\underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{m \text{ fois } u}$,
- un polynôme est dit *unitaire* si son coefficient dominant vaut 1. En particulier, le polynôme nul n'est pas unitaire.

Définitions
- On dit qu'un endomorphisme u de E est **cyclique** s'il existe un vecteur x de E tel que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\{u^m(x), m \in \mathbb{N}\}) = \mathrm{Vect}(\{x, u(x), u^2(x), \ldots\}).$$

- On dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier naturel p tel que

$$u^p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} \text{ et } u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

Cet entier p est appelé **indice de nilotence** de u.

Partie A - Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (i, j, k)$ est la base canonique de E.
Soit u défini sur E par

$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}, \quad u(x, y, z) = (z, x + z, y - z).$$

1. Prouver que u est un endomorphisme de E.

2. Calculer $u(i)$ et $u^2(i)$ et en déduire que u est un endomorphisme cyclique de E.

3. On pose

$$\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u - id) \text{ et } \mathrm{G} = \mathrm{Ker}\big((u + id)^2\big)$$

a) Déterminer la matrice M représentant u dans la base $\mathcal{C}$.
b) Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E et stables par u.

4. Soit $\mathcal{B} = (a, b, c)$ une base adaptée à la décomposition $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.
a) Sans chercher à expliciter tous ses coefficients, que peut-on dire de la matrice représentant u dans la base $\mathcal{B}$?
b) On rappelle que pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$,

$$(\mathrm{P} \times \mathrm{Q})(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = \mathrm{Q}(u) \circ \mathrm{P}(u)$$

et qu'en particulier $(u - id) \circ \big((u + id)^2\big) = \big((u + id)^2\big) \circ (u - id)$.
En exploitant $\mathcal{B}$, montrer polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 1)^2$ est annulateur du u.
c) Montrer que si un endomorphisme v de E admet un polynôme annulateur de degré 1, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda id$.

d) On suppose dans cette sous-question qu'il existe un polynôme unitaire Q annulateur de u de degré 2.

i – En s'appuyant sur la division euclidienne de P par Q, montrer que P est un multiple de Q.

ii – En déduire que $Q = (X+1)^2$ ou $Q = X^2 - 1$.

iii – Aboutir à une contradiction.

e) En déduire que l'ensemble des polynômes annulateurs de u est l'ensemble

$$\mathcal{A}_u = \{AP, A \in \mathbb{R}[X]\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des multiples de P.
On dit que P est le *polynôme minimal de u.*

Partie B - Cas des endomorphismes nilpotents

Dans cette partie, on suppose que $\dim(E) = n \geqslant 2$ et que u est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $p \geqslant 2$.

5. Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1})$ est libre.

6. Que peut-on en déduire sur p ?

7. En déduire que u est cyclique si, et seulement si, $p = n$.

8. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $u : E \longrightarrow E, P \longmapsto P'$.

a) Montrer que u est un endomorphisme cyclique et nilpotent.

b) Quel est son indice de nilpotence ?

Partie C - Cas général

Dans cette partie, on suppose que $\dim(E) = n \geqslant 2$ et que u est un endomorphisme cyclique.
On note x un vecteur de E tel que

$$E = \mathrm{Vect}(\{u^m(x), m \in \mathbb{N}\}) = \mathrm{Vect}(\{x, u(x), u^2(x), \ldots\}).$$

9. a) Justifier que $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^n(x)\big)$ est liée.
Soit $p = \max\big\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } (x, u(x), u^2(x), \ldots, u^k(x)) \text{ soit libre}\big\}$.

b) Justifier que $u^{p+1}(x) \in \mathrm{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^p(x)\big)$.

c) En déduire que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $u^k(x) \in \mathrm{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^p(x)\big)$.

d) En déduire que $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^p(x)\big)$ est une base de E et préciser la valeur de p.

10. a) Justifier l'existence de $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x).$$

Dans la suite, on note P le polynôme

$$P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0 \in \mathbb{K}[X].$$

b) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(u)$ des vecteurs de la base $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$.

c) En déduire l'endomorphisme $P(u)$.

11. a) Montrer que la famille $\big(id, u, u, \ldots, u^{n-1}\big)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

b) En déduire que

i – il n'existe aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à n annulateur de u ;

ii – P est l'unique polynôme unitaire de degré n annulateur de u.
On dit que P est le *polynôme minimal de u.*

c) Quel est le polynôme minimal de l'endomorphisme étudié dans la dernière question de la partie A ? Justifier.

Solution (**Ex.2** – *Endomorphismes cycliques*)

Partie A - Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$

1. À savoir faire.

2. $u(i) = (0,1,0) = j$ et $u^2(i) = (0,0,1) = k$ donc $\big(i, u(i), u^2(i)\big) = \mathcal{C}$ est une base de E et u est un endomorphisme cyclique de E.

3. a) $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) • $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\big((1,2,1)\big) = \mathrm{Vect}(a)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0),(1,0,-1)\big) = \mathrm{Vect}(b,c)$.
• (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\det(a,b,c) = 4 \neq 0$ donc F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.
• $u(a) = a \in \mathrm{F}$ donc F est stable par u.
• $u(b) = c - b \in \mathrm{G}$ et $u(c) = -c \in \mathrm{G}$ donc G est stable par u.

4. a) D'après le cours, la matrice représentant u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs.

b) $\mathrm{P}(u) = ((u+id)^2) \circ (u - id)(a) = 0$ car $a \in \mathrm{Ker}(u - id)$,
$\mathrm{P}(u) = (u - id) \circ ((u+id)^2)(b) = 0$ car $b \in \mathrm{Ker}((u+id)^2)$,
$\mathrm{P}(u) = (u - id) \circ ((u+id)^2)(c) = 0$ car $c \in \mathrm{Ker}((u+id)^2)$,
Par linéarité, comme tout vecteur de E est combinaison linéaire de a, b et c, $\mathrm{P}(u)$ est l'endomorphisme nul.

c) Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X} + b$ avec $a \neq 0$ un polynôme annulateur de v. Alors : $a.v + b.id = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ donc $v = \dfrac{-b}{a} id = \lambda id$ où $\lambda = \dfrac{-b}{a} \in \mathbb{R}$.

d) On suppose dans cette sous-question qu'il existe un polynôme unitaire Q annulateur de u de degré 2.

i – • Par division euclidienne, il existe deux polynômes A et R tels que $\mathrm{P} = \mathrm{AQ} + \mathrm{R}$ avec $\deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{Q})$ donc $\deg(\mathrm{R}) < 2$.
On a alors $\mathrm{P}(u) = \mathrm{A}(u) \circ \mathrm{Q}(u) + \mathrm{R}(u)$ et comme $\mathrm{P}(u) = \mathrm{Q}(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, on a $\mathrm{R}(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$: R est annulateur de u.
• R ne peut pas être de degré 1 car $u \neq \lambda id$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$, R ne peut pas être de degré 0 car $\mathrm{R} = k \in \mathbb{R}^*$ entraîne $\mathrm{R}(u) = k.id \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. Donc R est le polynôme nul.
• Donc $\mathrm{P} = \mathrm{AQ}$ avec $\deg(\mathrm{A}) = \deg(\mathrm{P}) - \deg(\mathrm{Q}) = 1$.

ii – $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)^2$ et Q est un polynôme unitaire de degré 2 divisant P donc les deux seules possibilités sont $\mathrm{Q} = (\mathrm{X}+1)^2$ ou $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 - 1$.

iii – $(u+id)^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ car $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}((u+id)^2) \neq \mathrm{E}$,
$u^2 - id \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ car $\mathrm{M}^2 \neq \mathrm{I}_3$,
donc ni $(\mathrm{X}+1)^2$ ni $\mathrm{X}^2 - 1$ ne sont annulateurs de u.
Ainsi il n'existe aucun polynôme annulateur de u de degré 2.

e) • Si $\mathrm{Q} = \mathrm{AP}$ avec $\mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ alors $\mathrm{Q}(u) = \mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, alors $\mathrm{Q} \in \mathcal{A}_u$.
• Réciproquement, supposons Q annulateur de u et effectuons la division eucldienne de Q par P : il existe A et R tels que $\mathrm{Q} = \mathrm{AP} + \mathrm{R}$ avec $\deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{P})$ donc $\deg(\mathrm{R}) \leqslant 2$.
Or $\mathrm{R}(u) = \mathrm{Q}(u) - \mathrm{A}(u) \circ \mathrm{P}(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ puisque Q et P sont annulateurs de u. Or l'étude précédente montre qu'il n'existe aucun polynôme annulateur de u de degré 0, 1 ou 2. Donc R est le polynôme nul et $\mathrm{Q} = \mathrm{AP}$.
• Par double inclusion, $\mathcal{A}_u = \big\{\mathrm{AP}, \mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\big\}$.

Partie B - Cas des endomorphismes nilpotents

5. Remarque : comme $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, il existe bien $x \in \mathrm{E}$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
Supposons que $a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$ $(\heartsuit)$.
En composant cette relation par u^{p-1}, on a $a_0 u^{p-1}(x) = 0$ avec $u^{p-1}(x) \neq 0$, donc $a_0 = 0$.
$(\heartsuit)$ devient $a_1 u(x) + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$, et en composant par u^{p-2}, $a_1 u^{p-1}(x) = 0$ avec $u^{p-1}(x) \neq 0$, donc $a_1 = 0$.
En itérant ce procédé, on a : $\forall i \in [\![0\,;\ p-1]\!], a_i = 0$, donc la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.

6. Les familles libres étant de cardinal au plus $\dim(\mathrm{E}) = n$, $p \leqslant n$.

7. • Si $p = n$, alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre de $n = \dim(\mathrm{E})$ vecteurs de E donc une base, donc u est cyclique.
• si u est cycliques, alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, donc $u^{n-1}(x) \neq 0$, donc $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $p \geqslant n$. Par la question précédente, $p \geqslant n$, donc $p = n$.
• Ainsi u est cyclique si, et seulement si, $p = n$.

8. a) • En prenant $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{n-1}$, $\big(\mathrm{P}, u(\mathrm{P}), \ldots, u^{n-1}(\mathrm{P})\big) = (\mathrm{X}^{n-1}, (n-1)\mathrm{X}^{n-2}, \ldots, (n-1)!\mathrm{X}, (n-1)!\big)$ est une famille de n polynômes de E échelonnée en degré donc est une base de E. Donc u est cyclique.
• $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, u^n(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{(n)} = 0$ puisque $\deg(\mathrm{P}) < n$, donc $u^n = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et u est nilpotent.

b) Comme u est cyclique et nilpotent, l'etude précédente montre que l'indice de nilpotence de u est $\dim(\mathrm{E}) = n$.
On peut aussi observer que $u^n = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ car $u^{n-1}(\mathrm{X}^n) = (n-1)! \neq 0$...

Partie C - Cas général

9. a) Dans un espace de dimension n, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
Soit $p = \max\big\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } (x, u(x), u^2(x), \dots, u^k(x)) \text{ soit libre}\big\}$.

b) Si $u^{p+1}(x) \notin \text{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x)\big)$, alors que $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p+1}(x)\big)$ est libre, ce qui contredit la définition de p.

c) Soit pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathcal{H}_k$: « $u^k(x) \in \text{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x)\big)$ ».
• $\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $u^0(x) = x$.
• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_i$ vraie pour tout $i \in [\![0\,;\, k]\!]$.
Comme $u^k(x) \in \text{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x)\big)$, il existe $p+1$ scalaires tels que $u^k(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \dots, a_p u^p(x)$
Alors $u^{k+1}(x) = a_0 u(x) + a_1 u^2(x) + \dots, a_p u^{p+1}(x)$, donc est combinaison linéaire de vecteurs de $\text{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p$
d'après la question précédente.
Donc $u^{k+1} \in \text{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x)\big)$ et $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
Par récurrence forte, H_k est vraie pour tout k de $\mathbb{N}$.

d) On vient de prouver que $\text{Vect}\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x)\big) = \text{Vect}\big(u^k(x), k \in \mathbb{N}\big)$, or $\text{Vect}\big(u^k(x), k \in \mathbb{N}\big)$ est une base de E, donc $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x)\big)$ est une famile génératrice de E, or cette famille est aussi libre par définition de p, donc c'est une base de E et $p = n-1$.

10. a) Ainsi $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E donc il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$.

b) On a, par définition des (a_i), $\text{P}(u)(x) = 0_\text{E}$.
Alors, pour tout k de $[\![1\,;\, n-1]\!]$, en posant $\text{Q(X)} = \text{X}^k$,
$\text{P}(u^k(x)) = \text{P}(\text{Q}(u)(x)) = \text{P}(u) \circ \text{Q}(u)(x) = \text{Q}(u) \circ \text{P}(u)(x) = \text{Q}(u)(0_\text{E}) = \text{O}_\text{E}$.

c) L'endomorphisme $\text{P}(u)$ prend la valeur 0_E pour tout vecteur de cette base, donc par linéarité l'endomorphisme $\text{P}(u)$ est nul.

11. a) Soit $(a_i)_{i \in [\![0\,;\, n-1]\!]}$ n scalaires tels que $a_0 id + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(\text{E})}$. Cette relation évaluée en x donne $a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_\text{E}$. Comme $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre, tous les coefficients a_i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ sont nuls. Par conséquent la famille $\big(id, u, u, \dots, u^{n-1}\big)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\text{E})$.

b) **i** − Soit Q un polynôme annuulateur de u de degré strictement inférieur à n : $\text{Q} = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i \text{X}^i$ avec $d < n$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i u^i = 0_{\mathcal{L}(\text{E})}$, et comme la famille $\big(id, u, u, \dots, u^d\big)$ est libre puisque $d \leqslant n-1$, $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![0\,;\, d]\!]$. Donc Q est le polynôme nul.
Ainsi il n'existe aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à n annulateur de u ;

ii − Si Q est un polynôme unitaire de degré n annulateur de u, alors $\text{Q} - \text{P}$ est annulateur de u et de degré strictement inférieur à n, donc $\text{Q} - \text{P} = 0_{\mathbb{K}[\text{X}]}$ donc $\text{Q} = \text{P}$.
P est bien l'unique polynôme unitaire de degré n annulateur de u.

c) $\forall \text{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\text{X}], u^n(\text{Q}) = \text{Q}^{(n)} = 0$ donc $u^n = 0_{\mathcal{L}(\text{E})}$, donc $\text{P} = \text{X}^n$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme cyclique u, de degré $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[\text{X}])$, donc $\text{P} = \text{X}^n$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme étudié dans la dernière question de la partie A.