Les exercices sont indépendants.

Durée : 4 heures

Exercice 1 *Nature d'une série*

1. Déterminer, suivant la valeur du réel α, la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Exercice 2 *Signe d'une somme*

1. Rappeler l'énoncé du théorème spécial des séries alternées en précisant le signe et la majoration du reste d'ordre n.

2. Justifier l'existence du nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

et montrer que ce nombre est strictement négatif[1].

Exercice 3 *Terme général à paramètres.*

Soit a et b deux réels. On considère le terme général u_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la série de terme général u_n converge, et calculer sa somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 4 *Somme trigonométrique*

Soit θ un réel.

Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}.$$

1. Quelle est la nature de la série de terme général u_n si $e^{i\theta} = 1$?

2. Dans cette question, on suppose que $e^{i\theta} \neq 1$.

a) Soit, pour n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$. Montrer, en utilisant $\cos(k\theta) = \mathcal{R}e\left(e^{ik\theta}\right)$, que la suite (S_n) est bornée.

b) En remarquant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, montrer que la série de terme général u_n converge.

c) Justifier que, pour tout réel x, $|\cos(x)| \geqslant \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et s'en servir pour montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

1. Philippe, si d'aucuns croient qu'il y a une erreur d'énoncé, ne les crois pas... tu sais bien qu'il s'agit de $\cos(2\sqrt{2})$! ! !

Exercice 5 *Sommes entières*

Soit, pour tout p de $\mathbb{N}$ et sous réserve d'existence,

$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}.$$

1. a) Rappeler l'énoncé du critère de D'Alembert.

b) Justifier, pour tout p de $\mathbb{N}$, l'existence de a_p.

2. a) Rappeler la formule du binôme de Newton.

b) En déduire, pour $p \geqslant 1$, une expression de a_p l'aide de $a_0, a_1, \dots a_{p-1}$.
Indication : on pourra effectuer le décalage d'indice $k = n - 1$.

3. a) Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}$, a_p est un entier naturel.

b) Calculer a_0, a_1 et a_2.

Exercice 6 *À propos de la série harmonique alternée*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et sous réserve d'existence,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

1. Justifier l'existence des suites s et r.

2. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a) Établir l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites u et v convergent, vers une même limite.

c) En déduire l'existence d'une constante réelle γ telle que

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

d) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\mathrm{H}_n \geqslant \ln(n+1)$ et en déduire la signe de la constante γ.

3. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$s_{2n} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n.$$

b) En déduire

$$s_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2).$$

4. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$r_n + r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$$

et expliciter $r_n - r_{n+1}$.

b) En déduire

$$r_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

c) Quelle est la nature de la série de terme général r_n ?

5. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{s_n} - 2$?

Solution (**Ex.1 –** *Nature d'une série*)

1. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \times \left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}$ donc étudions le second facteur.

$\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp(-\alpha \ln(n)/n)$ et par croissances comparées $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$. Donc par équivalence de termes généraux positifs et d'après la nature des séries de Riemann, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Solution (**Ex.2 –** *Signe d'une somme*)

1. Voir cours.

2. En posant $u_n = \dfrac{8^n}{(2n)!}$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{8}{(2n+1)(2n+2)}$ ce qui permet d'affirmer :

① la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante **à partir du rang 1** car il s'agit d'une suite strictement positive et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$, et de limite nulle puisque la série converge (ou par croissances comparées) donc le théorème spécial des séries alternées s'applique à $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$.

En particulier $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n u_n \leqslant u_2 \leqslant \frac{64}{24} \leqslant \frac{8}{3} < 3$;

② $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = u_0 - u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n u_n = 1 - 4 + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n u_n = -3 + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n u_n < 0.$

Solution (**Ex.3 –** *Terme général à paramètres.*)

1. $u_n = \ln(n)(1+a+b) + a\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n) + \dfrac{a+2b}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2. • Supposons que la série converge.

Alors $1+a+b=0$ sinon la série divergerait grossièrement.

Et $a+2b=0$ sinon on aurait $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a+2b}{n}$ et la série divergerait par équivalence de termes généraux positifs et divergence de la série harmonique.

Donc $a=-2$ et $b=1$.

• Réciproquement, si $a=-2$ et $b=1$, alors $u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge.

• La condition nécessaire et suffisante de convergence est $a=-2$ et $b=1$.

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln(n) - 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln(n+2) = \ln(1) - \ln(\mathrm{N}+1) - \ln(2) + \ln(\mathrm{N}+2) =$
$\ln\left(\dfrac{\mathrm{N}+2}{\mathrm{N}+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} -\ln(2)$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

Solution (**Ex.4 –** *Somme trigonométrique*)

1. $\mathrm{e}^{i\theta} = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{e}^{in\theta} = 1$ donc $\cos(n\theta) = 1$ donc $u_n = \dfrac{1}{n}$. La série $\sum u_n$ est la série harmonique donc divergente.

2. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$, c'est-à-dire $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ ou encore $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta \neq 2k\pi$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|\mathrm{S}_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right| = \left|\mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right)\right| = \left|\mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k\right)\right| = \left|\mathcal{R}e\left(\frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}\right)\right|$$

$|\mathrm{S}_n| \leqslant \left|\dfrac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}\right| \leqslant \dfrac{1+\left|\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\right|}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|} \leqslant \dfrac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|}$, majorant indépendant de n.

Donc la suite (S_n) est bornée.

b) Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\cos(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{S}_n}{n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{S}_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{S}_n}{n} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{\mathrm{S}_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{\mathrm{S}_n}{n(n+1)} + \frac{\mathrm{S}_\mathrm{N}}{\mathrm{N}} - \mathrm{S}_0$

En notant M un majorant de la suite $(|\mathrm{S}_n|)_n$ – par exemple $\mathrm{M} = \dfrac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|}$, on a :

- $\forall n \geqslant 1, \quad \left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n^2}$ donc par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2, la série $\sum \dfrac{\mathrm{S}_n}{n(n+1)}$ converge ;
- $\left|\dfrac{\mathrm{S}_\mathrm{N}}{\mathrm{N}}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ donc $\dfrac{\mathrm{S}_\mathrm{N}}{\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ par encadrement.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n$ admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$. Autrement dit, la série de terme général u_n converge.

c) • Comme $|\cos(x)| \in [0\,;\ 1]$, $|\cos(x)|^2 \leqslant |\cos(x)|$, i.e. $|\cos(x)| \geqslant \cos^2(x)$.

• On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \geqslant \dfrac{\cos^2(n\theta)}{n} \geqslant \dfrac{1+\cos(2n\theta)}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2n} + \dfrac{\cos(2n\theta)}{2n}$.

Premier cas : $\mathrm{e}^{i2\theta} \neq 1$.

Alors la série de terme général $\dfrac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge par l'étude précédente (en remplaçant θ par 2θ) tandis que la série harmonique de terme général $\dfrac{1}{2n}$ diverge vers $+\infty$. Par comparaison, $\sum |u_n|$ diverge.

Second cas : $\mathrm{e}^{i2\theta} = 1$, i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = k\pi$.

Alors $\cos(2n\theta) = 1$ donc $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{n}$ et comme la série harmonique de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. par comparaison, $\sum |u_n|$ diverge.

Dans tous les cas, $\sum |u_n|$ diverge et $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

Solution (**Ex.5** – *Sommes entières*)

1. a) Voir cours

b) Soit p dans $\mathbb{N}$. Les termes $u_{p,n} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{n^p}{2^n}$ sont strictement positifs dès que $n \geqslant 1$, et pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{p,n+1}}{u_{p,n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \times \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

donc par le critère de D'Alembert la série $\sum_n u_{p,n}$ converge, donc a_p existe.

On peut aussi montrer que $u_{p,n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par exemple

2. a) $\forall (a,b,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

b) Comme le premier terme de la série est nul,

$$a_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^p}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} k^i}{2^k} \text{ et par linéarité}$$

$$a_p = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p}\left(\binom{p}{i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^i}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}a_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}a_i + \frac{1}{2}a_p$$

donc $a_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}a_i$

3. a) Soit pour tout p de $\mathbb{N}$ l'assertion $\mathcal{A}_p$: « a_p est un entier naturel ».

- $a_0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \overset{\text{géom.}}{=} \frac{1}{1-1/2} = 2 \in \mathbb{N}$ donc $\mathcal{A}_0$ est vraie.
- Une récurrence forte s'impose. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{p-1}$ vraies.

Comme $a_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}a_i$ et $\displaystyle\binom{p}{i}$ est entier naturel pour tout i de $[\![0\,;\ p-1]\!]$ (car nombre de parties à i éléments d'un ensemble de p éléments), les hypothèses de récurrence entraînent que $a_p \in \mathbb{N}$.

- Par le principe de récurrence, pour tout p de $\mathbb{N}$, a_p est un entier naturel.

b) $a_0 = 2$, $a_1 = \displaystyle\binom{1}{0}a_0 = 2$ et $a_2 = \displaystyle\binom{2}{0}a_0 + \binom{2}{1}a_1 = 6$.

Solution (**Ex.6 –** *À propos de la série harmonique alternée*)

1. Puisque $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle, la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}$ converge, $\sum_k \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge par linéarité.

Pour tout n, s_n et r_n qui sont ses somme partielle et reste d'ordre n existent.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [\,n\,;\ n+1\,]$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n}$, et par croissance de l'intégrale $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

On peut aussi appliquer l'inégalité des accroissements finis à ln *sur* $[\,n\,;\ n+1\,]$, *ou plus maladroitement étudier les fonctions obtenues en formant la différence des membres de chaque inégalité.*

b) • Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$ et

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0$,

donc u est décroissante et v est croissante.

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Ainsi les suites u et v sont adjacentes, donc convergentes, vers une même limite.

c) En notant γ leur limite commune, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = u_n + \ln(n) = \gamma + o\,(1) + \ln(n)$$

d) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[\,1\,;\ n+1\,]$ donc

$\forall k \in [\![1\,;\ n]\!], \forall x \in [\,k\,;\ k+1\,]$, $\quad \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{x}$, et par croissance de l'intégrale

$\forall k \in [\![1\,;\ n]\!], \forall x \in [\,k\,;\ k+1\,]$, $\quad \dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, et par la relation de Chasles

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ c'est-à-dire $\mathrm{H}_n \geqslant \ln(n+1)$.

- On a alors, pour tout n,

$$u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n) = \big(\mathrm{H}_n - \ln(n+1)\big) + \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \geqslant 0$$

u est une suite positive convergente, donc sa limite γ est positive.

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ l'assertion : « $s_{2n} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$ ».

$\boxed{\text{Initialisation}}$
$s_2 = 1 - 1/2 = 1/2$, $\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1 = 1 + 1/2 - 1 = 1/2$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
$\boxed{\text{Hérédité}}$
Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}_n$.
$\mathrm{H}_{2n+2} - \mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{H}_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \mathrm{H}_n - \dfrac{1}{n+1} = s_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = s_{2n+2}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$.
$\boxed{\text{Conclusion}}$
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $s_{2n} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$.

b) $s_{2n} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma - o(1) = \ln(2) + o(1)$ donc $s_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.
Puisque (s_n) converge, elle admet la même limite que sa suite extraite (s_{2n}) : $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

4. a) $r_n + r_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j}}{j+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

d'où $r_n + r_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$.

Enfin $r_n - r_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

b) • Par le théorème spécial des séries alternées,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Donc $r_n + r_{n+1} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

• $r_n = \dfrac{1}{2}\big(r_n + r_{n+1} + r_n - r_{n+1}\big) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Enfin, $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donne le développement voulu.

c) Comme $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{2n}$ converge par application du TSSA et $\displaystyle\sum_n \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre $2 > 1$, la série de terme général r_n converge.

5. Notons que comme $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la série ne diverge pas grossièrement.

$u_n = \mathrm{e}^{s_n} - 2 = \mathrm{e}^{\ln(2) - r_n} - 2 = 2(\mathrm{e}^{-r_n} - 1) \underset{n\to+\infty}{=} 2(-r_n + \mathcal{O}(r_n^2)) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.