Exercice 1 *Spectre de l'automorphisme réciproque*

Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Justifier que $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$.

Solution (**Ex.1** – *Spectre de l'automorphisme réciproque*)

1. $0 \in \mathrm{Sp}(u) \iff \ker(u) \neq \{0\} \iff u$ non injectif : exclu.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   Alors en composant par u^{-1}, $x = \lambda u^{-1}(x)$ i.e. $u^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda}x$ ce qui prouve que $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u^{-1}.
   En permutant les rôles de u et u^{-1}, on justifie l'égalité demandée.

Exercice 2 *Valeur propre nulle et injectivité*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathrm{E} \neq \{0\}$.

1. Montrer que : $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \iff f$ injective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $0 \in \mathrm{Sp}(f^n) \Rightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
3. On suppose f nilpotent. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Solution (**Ex.2** – *Valeur propre nulle et injectivité*)

1. $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \iff \ker(f - 0id) = \{0\} \iff f$ injective.
2. Supposons $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$, donc $\exists x \neq 0_\mathrm{E}$ tel que $f^n(x) = 0_\mathrm{E}$.
   Si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, alors f est injective donc : $\forall y \neq 0_\mathrm{E}, f(y) \neq 0_\mathrm{E}$.
   Par récurrence immédiate, $f^n(x) \neq 0_\mathrm{E}$, ce qui est absurde.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
   Supposons que $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_\mathrm{E}$. Alors $f^p(x) = \lambda^p x$ d'une part, et $f^p(x) = 0_\mathrm{E}$ d'autre part. Donc $\lambda^p = 0$ puisque $x \neq 0_\mathrm{E}$. Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$.
   Mais $0 \in \mathrm{Sp}(f^p)$ puisque $\forall x \in \mathrm{E}, f^p(x) = 0_\mathrm{E} = 0.x$. Donc par 2. $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
   Finalement $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Exercice 3 *L'opérateur « dérivation »*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathrm{D} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, f \mapsto f'$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de D.

Solution (**Ex.3** – *L'opérateur « dérivation »*)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$.

$\mathrm{D}(f) = \lambda f \Rightarrow f' = \lambda f \Rightarrow \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}, f : x \mapsto \mathrm{A}\exp(\lambda x)$: il existe des solutions non nulles à $\mathrm{D}(f) = \lambda f$.

Bilan : $\mathrm{Sp}(\mathrm{D}) = \mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(x \mapsto \exp(\lambda x))$.

Exercice 4 *L'opérateur « primitivation »*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathrm{P} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, f \mapsto \mathrm{F}$ telle que $\begin{cases} \mathrm{F}' = f \\ \mathrm{F}(0) = 0 \end{cases}$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de P.

Solution (**Ex.4** – *L'opérateur « primitivation »*)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{P}(\mathrm{F})$.

$\mathrm{P}(f) = \lambda f \Rightarrow \mathrm{F} = \lambda \mathrm{F}'$

Premier cas : $\lambda \neq 0$

$\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \mathrm{F} : x \mapsto \mathrm{A}\exp(x/\lambda)$ et comme $\mathrm{F}(0) = 0$, $\mathrm{A} = 0$, donc $\mathrm{F} = 0_\mathrm{E}$, donc $f = \mathrm{F}' = 0_\mathrm{E}$: il n'existe aucune solution non nulle à $\mathrm{P}(f) = \lambda f$.

Second cas : $\lambda = 0$

$\mathrm{F} = 0_\mathrm{E}$ donc $f = 0_\mathrm{E}$. Même conclusion.

Bilan : $\mathrm{Sp}(\mathrm{P}) = \emptyset$.

Exercice 5 *L'opérateur « décalage »*

Soit $\mathrm{E} = \left\{u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0\right\}$ et $\Delta : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, u \mapsto v$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Δ.

Solution (**Ex.5** – *L'opérateur « décalage »*)

Analyse –

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathrm{E}$.

$\Delta(u) = \lambda u \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\lambda^n$

Comme $u \in \mathrm{E}$, $\lambda \in]-1\,;\,1[$.

Synthèse –

$\mathrm{Sp}(\Delta) =]-1\,;\,1[$ et pour $\lambda \in]-1\,;\,1[$, $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Vect}\big((\lambda^n)_n\big)$.

Exercice 6 *Du côté des projections et des symétries*

Soit F et G deux sous-espaces non triviaux supplémentaires dans un espace E de dimension finie. Soit p et s respectivement la projection sur F respectivement la symétrie d'axe F tous deux de direction G.

En exploitant les relations $p^2 = p$ et $s^2 = id_\mathrm{E}$, déterminer les éléments propres de p et s et justifier qu'ils sont diagonalisables.

1.

Exercice 7 *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$.
Déterminer les éléments propres de u.

Solution (**Ex.7** – *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*)
Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AM - MA = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ donc immédiatement :

$0 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$,

$1 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

$-1 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

Bilan : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0, 1\}$ avec $\dim E_{-1} + \dim E_0 + \dim E_1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc f est diagonalisable.
Variante : dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ diagonale !}$$

Exercice 8 *Matrice de rang 1*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $A = CL$.
2. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $A^2 = \lambda A$.
3. Montrer que λ est une valeur propre de A.

Solution (**Ex.8** – *Matrice de rang 1*)

1. $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc les n colonnes de A sont proportionnelles à une même colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Écrivons $A = (a_1C|a_2C|\dots|a_nC)$. Alors en posant $L = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $A = CL$.
2. $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$ or $LC = \left(\sum_i a_ic_i\right) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. En posant $\lambda = \sum_i a_ic_i$, $A^2 = C(\lambda)L = \lambda CL = \lambda A$.
3. $AC = CLC = C(\lambda) = \lambda C$ avec $C \neq 0$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 9 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto AM$.
Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi)$.

Solution (**Ex.9** – *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)
• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AC = \lambda C$. En prenant la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes valent C, $\varphi(M) = AM = \lambda M$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.
• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(M) = \lambda M$, i.e. $AM = \lambda M$. Soit C une colonne non nulle de M. Alors $AC = \lambda C$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 10 *Commutant d'une matrice diagonale*

1. Soit $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.
   Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, A est diagonale.
2. Soit λ et μ deux scalaires distincts et p et q deux entiers naturels non nuls.
   Déterminer les matrices commutant avec $D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p & 0 \\ \hline 0 & \mu I_q \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Solution (**Ex.10** – *Commutant d'une matrice diagonale*)

1. Dans ce qui suit, (i,j) décrit $[\![1\,;\ n]\!]^2$.
   Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Notons que $D = (d_{i,j}) = (\lambda_i \delta_{i,j})$ où δ est le symbole de Kronecker.
   Par la définition du produit matriciel :
   $AD = DA \iff \forall (i,j), \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\lambda_k \delta k, j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} a_{k,j} \iff \forall (i,j), a_{i,j}\lambda_j =$

$\lambda_i a_{i,j} \iff \forall(i,j), (\lambda_i - \lambda_j)a_{i,j} = 0 \iff \forall(i,j), (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0) \iff$ A *diagonale*

2. Raisonnons par blocs. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

$MD = DM \iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda A & \mu B \\ \hline \lambda C & \mu D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A & \lambda B \\ \hline \mu C & \mu D \end{array}\right) \iff \begin{cases} (\mu-\lambda)B = 0_{p,q} \\ (\lambda-\mu)C = 0_{q,p} \end{cases} \iff$

$\begin{cases} B = 0_{p,q} \\ C = 0_{q,p} \end{cases} \iff M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ (diagonale par blocs).

Exercice 11 *Exemple de réduction d'endomorphismes*

Soit $E = \mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; **2.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **4.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.11** – *Exemple de réduction d'endomorphismes*)

1. $\chi_A = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-2)(X-1)(X+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{-1,1,2\}$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}((-2,1,2))$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.

2. $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1,2\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.

3. $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1,2\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f non-diagonalisable.
Remarque : même polynôme caractéristique pour 2. & 3.

4. $\chi_A = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$, f non-diagonalisable.

Exercice 12 *Dans un espace de polynômes*

$E = \mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus 2.
Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme défini par :

$$Q(X) = P(X+1) + XP'(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

4. a) Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?
b) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E formée de vecteurs propres de f.
c) Quelles sont les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{C}$.

5. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$P(X+1) + XP'(X) = X^2 + X + 1.$$

Solution (**Ex.12** – *Dans un espace de polynômes*)

1. Pas de problème pour la linéarité.

2. $M = mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

3. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

4. a) $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(M) = \{1;2;3\}$ puisque M est triangulaire. $f \in \mathcal{L}(E)$ et $card(\mathrm{Sp}(f)) = 3 = \dim(E)$ donc f est diagonalisable.
b) La résolution de $f(P) = \lambda P$ donne : $E_1 = \mathrm{Vect}(1)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(X+1)$ et $E_3 = \mathrm{Vect}(2X^2+4X+3)$. $\mathcal{C} = (1, X+1, 2X^2+4X+3)$ convient.
c) En raisonnant sur les coefficients par degrés décroissants :
$X^2 + X + 1 = \dfrac{1}{2}(2X^2+4X+3) - (X+1) + \dfrac{1}{2} \times 1$, les coordonnées de X^2+X+1 dans $\mathcal{C}$ sont $(1/2, -1, 1/2)$.

Exercice 13 *Racines carrées d'endomorphismes diagonalisables*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.
On suppose que u possède n valeurs propres distinctes deux à deux.

1. u est-il diagonalisable ?
Dans la suite, on note $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u et D la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$. Un tel endomorphisme est parfois appelé « *racine carrée de u* ». Rien ne dit qu'il soit unique.

b) Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que $v = P(u)$.

c) Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = D$. Une telle matrice est appelée « *racine carrée de D* ».

Montrer que R et D commutent et en déduire le nombre de racines carrées de D.

d) Combien existe-t-il d'endomorphismes v tels que $v^2 = u$?

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) À quelle condition *sine qua non* u possède-t-il au moins une racine carrée ?

b) On suppose que u possède au moins une racine carrée. Combien en possède-t-il ?

4. On note λ_i pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ les n valeurs propres de u et E_i les sous-espaces propres associés respectivement.

Pour tout i de $[\![1\,;\, n]\!]$, on note p_i le projecteur de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{j \neq i} E_j$.

a) Justifier que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

b) Justifier que la famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ pour que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i \right)^2 = u.$$

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que u est diagonalisable.

b) On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les valeurs propres de u et E_i le sous-espace propre associé à i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Expliciter une matrice Q inversible telle que $Q^{-1}MQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et calculer Q^{-1}.

c) Déterminer les racines carrées du M en distinguant les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

d) Pour chaque racine carrée v du u, donner un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$. On exprimera ces polynômes dans une base de Lagrange bien choisie que l'on explicitera.

e) Pour tout i de $[\![1\,;\, n]\!]$, déterminer la matrice P_i représentant dans la base canonique $\mathcal{C}$ le projecteur p_i de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{j \neq i} E_j$.

f) Pour chaque racine carrée v de u, exprimer v à l'aide des projecteurs p_i.

Solution (**Ex.13** – *Racines carrées d'endomorphismes diagonalisables*)

1. u est diagonalisable car $\mathcal{C}ard(\mathrm{Sp}(u)) = \dim(E)$.

Dans la suite, on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u et $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice représentant u dans $\mathcal{B}$.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) Soit v l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], v(e_i) = \mu_i e_i$ où μ_i est un complexe vérifiant $\mu_i^2 = \lambda_i$.

Alors : $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], v^2(e_i) = \mu_i^2 e_i = \lambda_i e_i = u(e_i)$.

v^2 et u coïncident sur la base $\mathcal{B}$ donc sont égaux.

b) Par le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme de degré au plus $n-1$ tel que : $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], P(\lambda_i) = \mu_i$.

Comme pour tout i de $[\![1\,;\, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $P(u)(e_i) = P(\lambda_i)e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$.

Donc $P(u) = v$.

c) $RD = R^3 = DR$, donc les valeurs propres de D étant deux à deux distinctes, R est diagonale. En notant $R = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$,

$$R^2 = D \iff \forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \mu_i^2 = \lambda_i.$$

Tout complexe non nul ayant exactement 2 racines carrées distinctes, et 0 n'en ayant qu'une, le nombre de racines carrées de D est 2^n si $0 \notin \mathrm{Sp}(D)$ et 2^{n-1} si $0 \in \mathrm{Sp}(D)$.

d) Comme $v^2 = u \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)^2 = D$, le nombre de racines carrées de u est 2^n si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ et 2^{n-1} si $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) u possède une racine carrée si, et seulement si, chaque valeur propre de u possède une racine carrée au moins, donc si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.

b) u possède au moins une racine carrée, donc ses valeurs propres sont toutes positives. La réponse est alors identique à 2.d).

4. a) Je propose ci-après une solution sans utiliser les matrices **mais il serait plus efficace d'utiliser les matrices représentant les endomorphismes dans $\mathcal{B}$! ! !** En effet, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_i) = E_{i,i}$, matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du i-ème coefficient de la diagonale qui vaut 1. Les questions se résument alors à des calculs sur les matrices diagonales.

Comme : $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!], E_j = \mathrm{Vect}(e_j)$, par définition des p_i, $p_i(e_j) =$

$\begin{cases} e_i & \text{si } i = j \\ 0_{\mathrm{E}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Alors : $\forall j \in [\![1\,;\ n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i(e_j) = \lambda_j e_j = u(e_j)$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i = u$,

et : $\forall i \neq j, p_i \circ p_j(e_k) = \begin{cases} p_i(e_j) = 0_{\mathrm{E}} & \text{si } k = j \\ p_i(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}} & \text{si } k \neq j \end{cases}$, donc $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

b) Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. En évaluant ces endomorphismes en e_j, on obtient $\alpha_j e_j = 0_{\mathrm{E}}$, avec $e_j \neq 0_{\mathrm{E}}$, donc $\alpha_j = 0$. La famille (p_i) est libre.

c) En développant avec $p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i & \text{si } i \neq j \\ 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} & \text{si } i \neq j \end{cases}$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i\right)^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 p_i$,

et comme la famille (p_i) est libre,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i\right)^2 = u \iff \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \iff \forall i \in [\![1\,;\ n]\!], \mu_i^2 = \lambda_i$$

5. a) $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{-1, 0, 1\}$, u est diagonalisable car possédant $\dim(\mathrm{E})$ valeurs propres distinctes.

b) En déterminant les vecteurs propres de M, $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient (ce n'est pas la seule) et $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, M n'a aucune racine carrée.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, M possède exactement 4 racines carrées :

$$\mathrm{R} = \mathrm{Q} \begin{pmatrix} \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

d) La base de Lagrange pour les points $-1, 0, 1$ est $\mathrm{L}_{-1} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})$, $\mathrm{L}_0 = -\mathrm{X}^2 + 1$ et $\mathrm{L}_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})$.

Les racines carrées de M sont alors

$$a\mathrm{L}_{-1}(\mathrm{M}) + b\mathrm{L}_1(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\big((a+b)\mathrm{M}^2 - (a-b)\mathrm{M}\big) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

e) Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de p_1 est $\mathrm{E}_{1,1}$ car p_1 est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Donc

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{QE}_{1,1}\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{QE}_{2,2}\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{P}_3 = \mathrm{QE}_{3,3}\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) $v = ap_1 + bp_3$ avec $a \in \{-i, i\}$ et $b \in \{-1, 1\}$, et on retrouve les matrices racines carrées de M

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -b & -a-b & b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

Exercice 14 *Sous espace propre de dimension n-1*

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 soit diagonalisable.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une valeur propre λ telle que $\dim \mathrm{E}_\lambda = n - 1$ soit diagonalisable.

Solution (**Ex.14** – *Sous espace propre de dimension n-1*)

1. $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ avec $\omega(0) \geq \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = n - 1$, donc $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \lambda) = \mathrm{X}^n - \lambda \mathrm{X}^{n-1}$, donc $\lambda = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$.

Premier cas : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 0$, $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n$ et $\dim \mathrm{E}_0 < \omega(0)$, A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq 0$, $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$ et $\dim \mathrm{E}_0 = \omega(0)$, $1 \leq \dim \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})} \leq \omega(1)$, donc $\dim \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})} = 1$, et A est diagonalisable.

2. $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X} - \lambda)^{n-1}(\mathrm{X} - \mu)$ avec éventuellement $\mu = \lambda$.

$\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}^{n-1} - (n-1)\lambda \mathrm{X}^{n-1} + \dots)(\mathrm{X} - \mu) = \mathrm{X}^n - \big((n-1)\lambda + \mu\big)\mathrm{X}^{n-1} + \dots$

Premier cas : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = n\lambda$, donc $\mu = \lambda$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda\}$ avec $\dim \mathrm{E}_\lambda < \omega(\lambda)$, A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq n\lambda$, donc $\mu \leq \lambda$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\dim \mathrm{E}_\lambda = n-1$ et $\dim \mathrm{E}_\mu = 1$, A est diagonalisable.

Notons que **1.** n'est qu'un cas particulier de ce cas.

Variante efficace – Quitte à plonger dans $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A est semblable à

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \mu = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) - (n-1)\lambda \in \mathbb{K}.$$

Premier cas : $\mu = \lambda$ (i.e. $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = n\lambda$), $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda\}$ et $\dim \mathrm{E}_\lambda < n$ donc A n'est pas diagonalisable.

Second cas : $\mu \neq \lambda$ (i.e. $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq n\lambda$), $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) - (n-1)\lambda\}$ et $\dim \mathrm{E}_\lambda + \dim \mathrm{E}_{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})-(n-1)\lambda} = n$ donc A est diagonalisable.

Exercice 15 *Matrice à deux paramètres*

Soit $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$.

$$\text{Soit } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.15** – *Matrice à deux paramètres*)

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.
2. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\dim \mathrm{E}_0 = 2n-2 = \omega(0)$ (car diagonalisable). On note λ et μ les deux autres valeurs propres de A (et il n'est pas exclu que $\lambda = \mu$).

   Comme A est diagonalisable, semblable à $diag(\lambda, \mu, 0, \dots, 0)$, $\lambda + \mu = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 2na$, donc $\mu = 2na - \lambda$.

   Quelques idées pour trouver λ et μ :

   • la somme des coefficients de chaque est constante, égale à $n(a+b)$ donc $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = n(a+b)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$, donc $\lambda = n(a+b)$ est une valeur propre. Alors $\mu = n(a-b)$.

   • En sommant les $2n$ lignes sur la première ligne, on obtient une factorisation :
   $$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_{2n} - \mathrm{A}) = (\mathrm{X} - n(a+b)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \times & \times & & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & & \times \end{vmatrix} \text{ donc } \lambda = n(a+b)$$
   est une racine de χ_A donc une valeur propre. $\mu = n(a-b)$ est l'autre.

   • $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right) = 2n^2(a^2+b^2)$, et comme A^2 est semblable à $diag(\lambda^2, \mu^2, 0, \dots, 0)$, $\lambda^2 + \mu^2 = n^2(a^2+b^2)$.

   On en tire : $\lambda\mu = \dfrac{1}{2}\big((\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2\big) = n^2(a^2-b^2)$.

   Donc λ et μ sont les racines du trinôme $\mathrm{X}^2 - 2na\mathrm{X} + n^2(a^2-b^2)$.

   $\Delta = 4n^2b^2 = (2nb)^2 > 0$, $\lambda = n(a+b)$ et $\mu = n(a-b)$.

   Bref, A est semblable à $diag\big(n(a+b), n(a-b), 0, \dots, 0\big)$.

Exercice 16 *Sommes constantes en ligne ou en colonne*

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice. On suppose que : $\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s$.

   Montrer que $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.
2. En est-il de même si : $\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = s$?
3. Étudier si
   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
   est diagonalisable. Si oui, proposer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.16** – *Sommes constantes en ligne ou en colonne*)

1. Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AU = sU$ donc $s \in \mathrm{Sp}(A)$ et $U \in E_s$.

Variante : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$: on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ et on factorise la première colonne par $X - s$, alors $\chi_A(X) = (X - s)\det(?)$, et s est racine de χ_A.

2. Cette fois, ${}^tA$ vérifie la propriété de **1.**, donc $s \in \mathrm{Sp}({}^tA)$. Or $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$ donc $s \in \mathrm{Sp}(A)$. Donc $\dim(E_0) + \dim(E_{10}) = 4$ et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: A est diagonalisable.

3. $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ avec $\dim E_0 = 3$. Par **2.**, $10 \in \mathrm{Sp}(A)$. Comme $\dim E_{10} \geq 1$ et $\dim E_0 + \dim E_{10} \leq 4$, $\dim E_{10} = 1$.

Exercice 17 *Calculs explicites en dimension 3*

Pour les trois matrices suivantes, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres, en précisant si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, voire dans $\mathbb{C}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution (**Ex.17** – *Calculs explicites en dimension 3*)

• $\chi_M = (X-1)(X+1)^2$, $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 1\}$, $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, non diagonalisable, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

• $\chi_N = (X-2)^2 \cdot (X-1)$, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$, $E_1(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$, diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

• $\chi_L = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X-i)(X+i)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(L) = \{-1\}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(L) = \{-1, i, -i\}$, $E_{-1}(L) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_i(L) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 3-i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-i}(L) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 3+i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, non diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 18 *Matrice à un paramètre*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

i.e. $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in \{1; n\}, \\ 1 & \text{si } i \in [\![2\,;\ n-2]\!]. \end{cases}$

Étudier, suivant la valeur de α, si A est diagonalisable, et préciser dans tous les cas ses éléments propres.

Solution (**Ex.18** – *Matrice à un paramètre*)

$\mathrm{rg}(A) = n - 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim E_0 = n - 1$.
De plus, $E_0 = \mathrm{Vect}(E_1 - E_2, \dots, E_1 - E_n)$ où $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Du coup $\omega(0) \geq n - 1$ et $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$. Mais comme $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)\,X^{n-1} + \dots$, nécessairement $\lambda = \mathrm{Tr}(A) = 2\alpha + n - 2$.

• Premier cas : $\alpha = 1 - \dfrac{2}{n}$.
Alors $\lambda = 0$, $\chi_A = X^n$ et $\dim E_0 < \omega(0)$: A n'est pas diagonalisable

• Second cas : $\alpha \neq 1 - \dfrac{n}{2}$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\alpha + n - 2\}$ avec $\dim E_{2\alpha+n-2} = 1$. A est diagonalisable avec $\chi_A = X^{n-1}(X - (2\alpha + n - 2))$.

Enfin : $A\begin{pmatrix}\alpha\\1\\\vdots\\1\\\alpha\end{pmatrix}=(2\alpha+n-2)\begin{pmatrix}\alpha\\1\\\vdots\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ donc $E_{2\alpha+n-2}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\alpha\\1\\\vdots\\1\\\alpha\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 19 *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
Soit $n\geq 2$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j)\in [\![1\,;\,n]\!]^2,\quad m_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i<n\\ 1-n & \text{si } i=n\end{cases}$$

M est-elle diagonalisable ?

Solution (**Ex.19** – *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)
$\mathrm{rg}(M)=1$ donc $\dim\mathrm{Ker}(M-0\times I_n)=n-1\geq 1$: 0 est valeur propre, avec $\dim(E_0)=n-1$.
Supposons M est diagonalisable : elle possède alors une autre valeur propre $\lambda\neq 0$ et étant semblable à $diag(\lambda,0,\dots,0)$, on a : $\mathrm{Tr}(M)=\lambda+(n-1)\times 0$, donc $\lambda=\mathrm{Tr}(M)$.
Or $\mathrm{Tr}(M)=0$ donc $\lambda=0$, ce qui est absurde.
M n'est pas diagonalisable.

Exercice 20 *Un espace vectoriel de matrices diagonalisables*
Soit $E=\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$F=\left\{M_{a,b,c}=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&b\\c&b&a\end{pmatrix},(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
2. Justifier que toute matrice $M_{a,b,c}$ de F est diagonalisable.
   Que valent $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(M_{a,b,c})}\lambda\times\mu(\lambda)$ et $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(M_{a,b,c})}\lambda^{\mu(\lambda)}$?
3. Donner deux matrices J et K de E telles que (I_3,J,K) soit une base de F.
4. Déterminer les éléments propres de J et K.
5. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Déduire de la question précédente les valeurs propres de $M_{a,b,c}$.

Solution (**Ex.20** – *Un espace vectoriel de matrices diagonalisables*)

1. $F=\mathrm{Vect}(I_3,J,K)$ où $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ donc F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3.
2. Toute matrice de F est symétrique réelle donc diagonalisable.
   $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(M_{a,c,b})}\lambda\mu(\lambda)=\mathrm{Tr}(M_{a,c,b})=3a$
   $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(M_{a,b,c})}\lambda^{\mu(\lambda)}=\det(M_{a,b,c})=a^3+2b^2c-ac^2-2ab^2=(a-c)(a^2+ac-2b^2)$
3. Voir première question.
4. $\mathrm{Sp}(J)=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$, $E_{-\sqrt{2}}(J)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$, $E_0(J)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$,
   $E_{\sqrt{2}}(J)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$
   $\mathrm{Sp}(K)=\{-1,0,1\}$, $E_{-1}(K)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, $E_0(K)=\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $E_1(K)=$ $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
5. $U=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est vecteur propre commun de I_3, J et K donc $M_{a,b,c}U=aI_3U+bJU+cKU=aU-cU=(a-c)U$.
   Donc $a-c$ est une valeur propre.
   En notant λ et μ les deux autres valeurs propres, par 2., on a
   $$\begin{cases}\lambda+\mu=3a-(a-c)=2a+c\\ \lambda\mu=a^2+ac-2b^2\end{cases}$$

λ et μ sont les racines de $X^2-(2a+c)X+a^2-2b^2$.
$\Delta=(2a+c)^2-4(a^2+ac-2b^2)=8b^2+c^2\geqslant 0$
Les deux autres valeurs propres sont

$$\frac{2a+c\pm\sqrt{8b^2+c^2}}{2}$$

Exercice 21 *Un endomorphisme sur les endomorphismes*
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Pour tout $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$, on pose :

$$\varphi(u)=p\circ u.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, *i.e.* $\varphi\in\mathcal{L}\big(\mathcal{L}(\mathrm{E})\big)$.
2. Calculer $\varphi\circ\varphi$ et en déduire la diagonalisabilité et le spectre de φ.
3. Montrer que $\mathrm{E}_0(\varphi)=\{u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})/\mathrm{Im}(u)\subset\mathrm{Ker}(p)\}$ et déterminer une description analogue de $\mathrm{E}_1(\varphi)$.

Solution (**Ex.21** – *Un endomorphisme sur les endomorphismes*)
1. $p\circ u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\varphi(\lambda u+v)=p\circ(\lambda u+v)=\lambda p\circ u+p\circ v=\lambda\varphi(u)+\varphi(v)$.
2. $\varphi^2(u)=p\circ p\circ u=p^2\circ u=p\circ u=\varphi(u)$: φ est aussi un projecteur. Il est donc diagonalisable, de spectre $\{0;1\}$.
3. • $u\in\mathrm{E}_0(\varphi)\iff p\circ u=0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}\iff\mathrm{Im}(u)\subset\mathrm{Ker}(p)$.
• $u\in\mathrm{E}_1(\varphi)\iff p\circ u=u\iff\mathrm{Im}(u)\subset\mathrm{Im}(p)$.
En effet, l'implication est évidente et si $\mathrm{Im}(u)\subset\mathrm{Im}(p)$, alors pour tout $x\in\mathrm{E}$, $p(u(x))=u(x)$ car $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{E}_1(p)$ pour un projecteur.

Exercice 22 *Transposition et symétrie*
Soit $n\geqslant 2$, $\mathrm{E}=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini par $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}^\mathrm{T}-\mathrm{M}$.
1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de f.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Solution (**Ex.22** – *Transposition et symétrie*)
1. $f^2(\mathrm{M})=\left(\mathrm{M}^\mathrm{T}-\mathrm{M}\right)^\mathrm{T}-(\mathrm{M}^\mathrm{T}-\mathrm{M})=2\mathrm{M}-2\mathrm{M}^\mathrm{T}=-2f(\mathrm{M})$ donc $f^2=-2f$.
2. $X^2+2X=X(X+2)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de f donc f est diagonalisable.
3. $\mathrm{Sp}(f)\subset\{-2,0\}$,
$f(\mathrm{M})=0\iff\mathrm{M}^\mathrm{T}=\mathrm{M}\iff\mathrm{M}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $0\in\mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{E}_0=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$f(\mathrm{M})=-2\mathrm{M}\iff\mathrm{M}^\mathrm{T}=-\mathrm{M}\iff\mathrm{M}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc $-2\in\mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{E}_{-2}=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Comme f est diagonalisable,
$\omega(0)=\dim\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\dfrac{n(n+1)}{2}$,
$\omega(-2)=\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\dfrac{n(n-1)}{2}$,
$\chi_f=X^{n(n+1)/2}(X+2)^{n(n-1)/2}$.

Exercice 23 *Polynôme annulateur*
Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2-4\mathrm{A}+3\mathrm{I}_5=0_5$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})=9$.
Déterminer χ_A.

Solution (**Ex.23** – *Polynôme annulateur*)
$X^2-4X+3=(X-1)(X-3)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples A donc A est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\subset\{1,3\}$.
On a alors $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})=\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\lambda\times\omega(\lambda)=9$, la seule possibilité étant $\omega(3)=2$ et $\omega(1)=3$ puisque $\omega(1)+\omega(3)=5$.
Donc $\chi_\mathrm{A}=(X-1)^3(X-3)^2$.

Exercice 24 *Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$*
Soit $n\geqslant 1$ et $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $f(\mathrm{P})$ défini par

$$f(\mathrm{P})=(X^2-1)\mathrm{P}'-(nX+1)\mathrm{P}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. On considère la famille de polynômes $(\mathrm{P}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par

$$\mathrm{P}_k(X)=(X-1)^k(X+1)^{n-k}.$$

Calculer, pour tout k de $[\![0\,;\,n]\!]$, $f(\mathrm{P}_k)$.
3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution (**Ex.24** – *Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$*)
1. La linéarité ne pose aucun souci
On a $\deg(f(\mathrm{P}))\leqslant n+1$ et en notant a_n le coefficient de X^n dans P, le coefficient de X^{n+1} de $f(\mathrm{P})$ est $na_n-na_n=0$, donc $\deg(f(\mathrm{P}))\leqslant n$ et $f(\mathrm{P})\in\mathrm{E}$.
2. $\forall k\in[\![0\,;\,n]\!]$,
$f(\mathrm{P}_k)=(X^2-1)[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k}+(n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}]-(nX+1)(X-1)^k(X+1)^{n-k}$
$f(\mathrm{P}_k)=(X-1)^k(X+1)^{n-k}\big[k(X+1)+(n-k)(X-1)-nX-1\big]$

$f(\mathrm{P}_k) = (2k-n-1)\mathrm{P}_k$

3. Le calcul précédent fournit $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc f est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(f) = \{2k-n-1, k \in [\![0\,;\,n]\!]\}$ et $n+1$ sous-espaces propres de dimension 1, précisément, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\mathrm{E}_{2k-n-1} = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_k)$.

Exercice 25 *Valeur propre de plus grand module*

Soit $n \geqslant 2$. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et : $\forall k \in [\![1\,;\,n-1]\!], |\lambda_k| < \lambda_n$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^{p+1}\right)}{\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^{p}\right)} = \lambda_n$.

Solution (**Ex.25** – *Valeur propre de plus grand module*)

En écrivant $\mathrm{D} = diag(\lambda_i)$ et $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$, on a

$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^p\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{D}^p\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p = \lambda_n^p \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^p + 1\right)$

or $\forall i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}\right| < 1$, donc $\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

et $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^p\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \lambda_n^p$, d'où la limite annoncée.

Exercice 26 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\quad \varphi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right)\mathrm{I}_n$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + (n-2)\mathrm{X} + 1 - n$. Calculer $\mathrm{P}(\varphi)$.
3. Justifier que φ est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant φ dans une base idoine.
4. En déduire $\mathrm{Tr}\left(\varphi\right)$ et $\det\left(\varphi\right)$.

Solution (**Ex.26** – *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. Aucun souci grâce à la linéarité de la trace.
2. Pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $\varphi^2(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{M}) - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right)\varphi(\mathrm{I}_n) = \mathrm{M} - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right)\mathrm{I}_n - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right)(1-n)\mathrm{I}_n = \mathrm{M} + (n-2)\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right)\mathrm{I}_n$.
   $\mathrm{P}(\varphi)(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + (n-2)\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right)\mathrm{I}_n + (n-2)\mathrm{M} - (n-2)\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right)\mathrm{I}_n + (1-n)\mathrm{M}$, i.e. $\mathrm{P}(\varphi)(\mathrm{M}) = 0_n$.
   Donc $\mathrm{P}(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.
3. $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-(1-n))(\mathrm{X}-1)$ est un polynôme annulateur de φ scindé à racines simples donc φ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{1-n, 1\}$.
   $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\right) = 0 \iff \mathrm{M} \in \ker(\mathrm{Tr})$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ et $\dim(\mathrm{E}_1) = \dim(\ker(\mathrm{Tr})) = n^2-1$ par la fomule du rang appliquée à $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
   Comme φ est diagonalisable et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, cela suffit pour affirmer que $1-n \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et $\dim(\mathrm{E}_{1-n}) = 1$.
   Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la supplémentarité $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_{1-n} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = diag(\underbrace{1, \dots, 1}_{n^2-1\ fois}, 1-n).$$
4. $\mathrm{Tr}\left(\varphi\right) = n^2 - 1 + 1 - n = n^2 - n$ et $\det\left(\varphi\right) = 1 - n$.

Exercice 27 *Puissances n-èmes et trigonalisation*

Soit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \\ -12 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer χ_{M} et étudier si M est diagonalisable.
2. a) M est-elle trigonalisable ?
   b) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les de la première ligne valent 1 et telle que
   $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On appelle T cette matrice.
3. a) Justifier l'existence de trois matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^n = \mathrm{A} + (-1)^n\mathrm{B} + n\mathrm{C}.$$
   b) Déterminer A, B et C en fonction I_3, M et M^2.

Solution (**Ex.27** – *Puissances n-èmes et trigonalisation*)

1. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1)^2 \cdot (\mathrm{X}+1)$
   mais $\dim \mathrm{E}_1 = 3 - \mathrm{rg}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -8 & -2 & -4 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix} = 1$
2. a) M est trigonalisable car χ_{M} est scindé.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Récurrence ou Newton : ${}^q qn \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' + (-1)^n B' + C'n$ avec A', B', C' adéquates.
Alors $M^n = PD^nP^{-1} = A + (-1)^n B + Cn$ où $A = PA'P^{-1}$ etc.

b) On peut calculer A, B, C à l'aide de P^{-1}.
On peut aussi remarquer :
$n = 0 \Longrightarrow A + B = I_3$,
$n = 1 \Longrightarrow A - B + C = M$,
$n = 2 \Longrightarrow A + B + 2C = M^2$.
D'où : $C = \dfrac{1}{2}(M^2 - I_3)$, etc...

Exercice 28 *Trigonalisation et suites imbriquées*

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B sont semblables, et expliciter une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 0 » et des « 1 » telle que $B = P^{-1}AP$.
2. Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$
et les conditions initiales
$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 1. \end{cases}$$

Solution (**Ex.28** – *Trigonalisation et suites imbriquées*)

1. $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable.
En notant $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, il s'agit de trouver une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ telle que $f(u) = u$ i.e. $u \in E_1$, $f(v) = 2v$ i.e. $v \in E_2$, et $f(w) = v + 2w$.
On calcule ceci matriciellement.
$E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la résolution de $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$. Par exemple, avec $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.
Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient, puisque $\det(P) = -1 \neq 0$

2. Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$
Posons pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
Le système imposé équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.
Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = PB^nP^{-1}X_0$.
La formule du binôme en écrivant $B = D + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $DN = ND$ donne $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

L'inversion de P conduit à $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule $X_n = PB^nP^{-1}X_0$ DE DROITE À GAUCHE.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = X_0 \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & = P^{-1}X_0 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 2^n(n+1) \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} & = B^nP^{-1}X_0 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (n+1)2^n \\ (n+1)2^n - 1 \\ 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} & = PB^nP^{-1}X_0
\end{array}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n &= (n+1)2^n \\ y_n &= (n+1)2^n - 1 \\ z_n &= *2^{n+1} - 1 \end{cases}$