Exercice 1 *Exemple de convergence uniforme*

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}.$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. À l'aide du théorème spécial des séries alternées, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, R_n est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.1** – *Exemple de convergence uniforme*)

1. Pour x fixé, le théorème spécial des séries alternées assure la converge puisque $\left(\dfrac{1}{n+x^2}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.
2. Soit $n \geqslant 1$. $\forall x \in \mathbb{R}, |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée.
3. $\forall n \geqslant 1$, $||\mathrm{R}_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc $||\mathrm{R}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la convergence est uniforme.

Exercice 2 *Exemple de convergence normale*

1. La série de fonction $\sum f_n$ de l'exercice converge-t-elle normalement ?
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}.$

   La série $\displaystyle\sum g_n$ converge-t-elle normalement ? Et uniformément ?

Solution (**Ex.2** – *Exemple de convergence normale*)

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f_n||_\infty = \dfrac{1}{n}$ (majorant évident, et atteint en 0). Donc $\sum ||f_n||_\infty$ diverge et la convergence n'est pas normale... ce qui prouve que la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence normale pour autant...
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||g_n||_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ (majorant évident, et atteint en 0). Donc $\sum ||g_n||_\infty$ converge et la convergence est normale, donc uniforme d'après l'exercice précédent.

Exercice 3 *Étude d'une fonction définie par une somme*

On pose, pour $x > 0$ et sous réserve d'existence, $\quad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$

1. **Convergence simple**

   Justifier que S est définie sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

   Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;\ +\infty[$ on pose $h_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$.
2. **Exemple de passage du local au global : continuité**
   a) La série de fonctions $\sum h_n$ converge-t-elle normalement sur $]\,0\,;\ +\infty[$?
   b) Soit $a \in]\,0\,;\ +\infty[$. Justifier que la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[\,a\,;\ +\infty[$.
   c) En déduire que S est continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$.
3. **Variations sans dérivation**

   Sans chercher à dériver S, montrer que S est strictement décroissante.
4. **Dérivabilité et classe : variations et convexité**
   a) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$ et retrouver sa variation.
   b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe.
5. **Utilisations du théorème de la double limite : comportement en +∞**
   a) À l'aide du théorème de la double limite, justifier : $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier que $\mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6x}$ et retrouver la limite précédente.
   c) À l'aide du théorème de la double limite, établir que $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.
   d) En se plaçant au voisinage de 0, montrer à l'aide du théorème de la double limite que la convergence de la série $\sum h_n$ n'est pas uniforme sur $]\,0\,;\ +\infty[$.
6. **Comparaison série-integrale : comportement en 0**
   a) Montrer que
   $$\forall x > 0, \quad \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x+1} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \mathrm{S}(x).$$
   b) En déduire : $\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.
7. **Représentation graphique**
   a) Calculer S(1).
   b) Représenter graphiquement S en tenant compte de tous les éléments obtenus au cours de cette étude.

Solution (**Ex.3** – *Étude d'une fonction définie par une somme*)

On pose, pour $x > 0$ et sous réserve d'existence, $\quad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$

1. Pour $x \in]\,0\,;\ +\infty[$, $0 \leqslant h_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum_n h_n(x)$ converge par comparaison.

Donc S est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. a) $||h_n||_\infty = \dfrac{1}{n}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ ne converge pas normalement sur $]0\,;\,+\infty[$.

b) Soit $a \in]0\,;\,+\infty[$. $||h_n||_{\infty,[a\,;\,+\infty[} = \dfrac{1}{n+n^2a} \leqslant \dfrac{1}{an^2}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[a\,;\,+\infty[$.

c) Pour $a>0$, les fonctions h_n sont toutes continues sur $[a\,;\,+\infty[$ et la convergence est normale donc uniforme, donc S est continue sur $[a\,;\,+\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a>0$, S est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Soit $0<x<y$. $\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big(h_n(x)-h_n(y)\big) > 0$ car $\forall n, h_n(x) > h_n(y)$. Donc S est strictement décroissante.

4. Pour tout $n \geqslant 1$, h_n est de classe $\mathcal{C}^2$.
$\forall n \geqslant 1, \forall x>0, h_n'(x) = \dfrac{-1}{(1+nx)^2}$ et $h_n''(x) = \dfrac{2n}{(1+nx)^3}$.

Soit $a>0$. Les majorations $||h_n'||_{\infty,[a\,;\,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{a^2n^2}$ et $||h_n''||_{\infty,[a\,;\,+\infty[} \leqslant \dfrac{2}{a^3n^3}$ justifient la convergence normale donc uniforme des séries $\sum_n h_n'$ et $\sum_n h_n''$ sur tout $[a\,;\,+\infty[\subset]0\,;\,+\infty[$.
Ainsi S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et S′ et S″ se calculent par dérivation terme à terme. D'où $\mathrm{S}'<0$ et $\mathrm{S}''>0$: S est strictement décroissante et convexe.

5. Utilisations du théorème de la double limite : comportement en $+\infty$

a) S converge normalement donc uniformément sur $[1\,;\,+\infty[$, et pour tout $n \geqslant 1$, $h_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Le théorème de la double limite justifie alors que : $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b) $\forall x>0, \forall n \geqslant 1, 0 \leqslant h_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2x}$, d'où $0 \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6x}$ et par encadrement $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

c) Posons $g_n : [1\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto xh_n(x) = \dfrac{x}{n+n^2x}$.

$g_n'(x) = \dfrac{n+n^2x-n^2x}{(n+n^2x)^2} > 0$ donc $||g_n||_\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \dfrac{1}{n^2}$.
La convergence de $\sum_n g_n$ est normale donc uniforme sur $[1\,;\,+\infty[$, donc par le théorème de la double limite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, i.e. $x\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$.

Ainsi $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

d) Si la convergence était uniforme sur $]0\,;\,+\infty[$, puisque $h_n(x) \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{1}{n}$, la série $\sum_n \dfrac{1}{n}$ convergerait... ce qui est absurde.

6. Comparaison série-integrale : comportement en 0

a) $\forall x>0, \forall n \geqslant 1, h_{n+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leqslant h_n(x)$.
En sommant pour n parcourant $\mathbb{N}^*$,
$$\forall x>0,\quad \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x+1} \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \mathrm{S}(x).$$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\mathrm{d}t = \left[\ln\frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = -\ln(x)+\ln(1+x)$
Ainsi : $\forall x>0, -\ln(x)+\ln(1+x) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant -\ln(x)+\ln(x+1)+\dfrac{1}{1+x}$.
En divisant par $-\ln(x)$, on obtient $\dfrac{\mathrm{S}(x)}{-\ln(x)} \xrightarrow[x\to0]{} a1$, i.e. $\mathrm{S}(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 4 *Intégrale et somme*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x \in]0\,;\,1],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. Soit $x \in [0\,;\,1]$. Justifier l'existence, puis calculer : $\quad f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Montrer que la convergence de la série des f_n est uniforme sur $[0\,;\,1]$.

3. Intégration terme à terme par CVU sur un segment

En déduire l'égalité : $\quad\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Solution (**Ex.4** – *Intégrale et somme*)
Remarque préalable :
$$f_n(x) = \begin{cases}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x \in]0\,;\,1],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
définit une fonction continue sur $[0\,;\,1]$.

1.
- Pour $x=1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n(x) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et vaut 0.
- Pour $x \in [0\,;\,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n(x) = (-x^2)^{n+1}$ donc, puisque $-x^2 \in]-1\,;\,1[$,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et vaut $-x^2 \times \dfrac{1}{1-(-x^2)} \ln n = \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x^2}$.

Finalement : pour tout $x \in [0\,;\ 1]$, $f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \dfrac{-x^2\ln x}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.
Notons que $\mathrm{R_N}(0) = 0$.
Par le critère spécial des séries alternées, pour $x \in]\,0\,;\ 1]$,
$|\mathrm{R_N}(x)| = \left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x\right| \leq x^{2\mathrm{N}+4} |\ln x|$
Étudions $\varphi :]\,0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{2\mathrm{N}+4} |\ln x| = -x^{2\mathrm{N}+4} \ln x$.
$\varphi(1) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$, et $\forall x \in]\,0\,;\ 1]$,
$\varphi'(x) = -(2\mathrm{N}+4)x^{2\mathrm{N}+3} \ln x - x^{2\mathrm{N}+3} = -x^{2\mathrm{N}+3}((2\mathrm{N}+4)\ln x + 1)$, donc φ atteint son maximum en $\exp\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right)$.
Il vaut $-\exp\left(-\dfrac{2\mathrm{N}+4}{2\mathrm{N}+4}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$
Donc $\|\mathrm{R_N}\|_\infty \leq \dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$, et par encadrement $\|\mathrm{R_N}\|_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$: la convergence est bien uniforme sur $[0\,;\ 1]$.

3. Rappelons que $\displaystyle\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$ converge car $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^1 \ln x \mathrm{d}x = -1 - \mathrm{A}\ln\mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow[\mathrm{A}\to 0^+]{} -1$, ainsi que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par équivalence à la première, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ qui est faussement impropre puisque $\dfrac{x^2\ln x}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par linéarité.
Chaque f_n étant continue sur $[0\,;\ 1]$ et la convergence étant uniforme, la permutation somme/intégrale est licite :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \mathrm{d}x$
Une intégration par parties permettra de conclure :
$\displaystyle\int_0^1 x^{2n+2} \ln x \mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n+3}$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$, et enfin

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 5 *Une intégrale somme de série*
Intégrations terme à terme sur un intervalle

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1\big)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$ en justifiant l'existence des deux membres.

2. Proposer un développement analogue en somme de série de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln(t)\mathrm{d}t$.

3. En déduire une égalité entre intégrales.

Solution (**Ex.5** – *Une intégrale somme de série*)

1. • $f : x \mapsto \exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$ avec $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ intégrable.
Donc f est intégrable par équivalence de fonctions positives.
• Avec $u_n = \dfrac{1}{n!n} > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc le critère de D'Alembert assure la convergence de la série de terme général u_n.
• Écrivons f comme somme d'une série : $\exp(\mathrm{e}^{-x}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-x})^n}{n!}$ donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-x})^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ en posant $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n!}$.
• Appliquons le théorème d'intégration terme à terme :
(i) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}/n!$ est continue sur $[0\,;\ +\infty[$.
(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n \overset{CVS}{\longrightarrow} f$ sur $[0\,;\ +\infty[$.
(iii) f est continue sur $[0\,;\ +\infty[$.
(iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\times n!}$ converge.
Par le théorème d'interversion,
$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x, \text{ i.e. } \int_0^{+\infty} \big(\exp(\mathrm{e}^{-x}) - 1\big)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\times n!}.$$

2. Même idée en écrivant $\mathrm{e}^t \ln(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n!}$... et on obtient :

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(\exp(\mathrm{e}^{-x})-1\big)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}=\int_0^1\mathrm{e}^t\ln(t)\mathrm{d}t$

Exercice 6 *Une intégrale somme de série*

Pour tout u de $]\,0\,;\ 1]$, on pose : $\quad f(u)=\dfrac{\exp(u)-1}{u}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore $f:[\,0\,;\ 1]\to\mathbb{R}$ le prolongement obtenu.

2. a) Exprimer, pour tout u de $[\,0\,;\ 1]$, $f(u)$ sous forme d'une somme d'une série de fonctions.

b) Montrer finalement que $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}$.

Solution (**Ex.6** – *Une intégrale somme de série*)

1. $\mathrm{e}^u-1\underset{u\to0}{\sim}u$ donc $f(u)\xrightarrow[u\to0]{}1\in\mathbb{R}$.

2. a) $\displaystyle\forall u\in[\,0\,;\ 1\,],f(u)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{n!}$.

b) • Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n:u\mapsto u^{n-1}/n!$ est continue sur $[\,0\,;\ 1]$.

• $\displaystyle\sum_{n\geq1}f_n\overset{CVS}{\longrightarrow}f$ sur $[\,0\,;\ 1]$.

• f est continue sur $[\,0\,;\ 1]$.

• $\displaystyle\sum_{n\geq1}\int_0^1|f_n(u)|\,\mathrm{d}u=\sum_{n\geq1}\frac{1}{n\times n!}$ converge car $\forall n\geq1,0\leq\dfrac{1}{n.n!}\leq\dfrac{1}{n!}$ et la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n!}$ converge.

Par le théorème d'interversion,

$$\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(u)\mathrm{d}u,\text{ i.e.}$$

$$\int_0^{+\infty}\big(\exp(\mathrm{e}^{-x})-1\big)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}$$

Exercice 7 *Harmoniquement*

On pose : $\quad\forall\in\,]-1\,;\ +\infty[\,,\quad \displaystyle\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie, continue et croissante sur $]-1\,;\ +\infty[$.

2. Calculer $\mathrm{S}(x+1)-\mathrm{S}(x)$ et en déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en -1.

3. a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \displaystyle\mathrm{S}(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

b) En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$.

Solution (**Ex.7** – *Harmoniquement*)

1. Montrer que S est définie et continue sur $]-1\,;\ +\infty[$.
Surtout ne pas séparer la série en deux séries divergentes ! ! !

• Je note : $f_n(x)\overset{\text{déf.}}{=}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}$ pour $n\geq1,\ x>-1$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\,]-1\,;\ +\infty[\,,\quad |f_n(x)|\overset{\text{déf.}}{=}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}\right|=\dfrac{|x|}{n(n+x)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{|x|}{n^2}$.

Par convergence de la série de Riemann de paramètre 2, $\displaystyle\sum_{n\geq1}f_n(x)$ converge simplement sur $]-1\,;\ +\infty[$.

S est définie sur $]-1\,;\ +\infty[$.

• Soit a et b tels que $-1<a<0$ et $1<b$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,b]}=\displaystyle\sup_{x\in[\,a\,;\,b]}\frac{|x|}{n(n+x)}\leq\frac{b}{n(n+a)}$, or $\dfrac{b}{n(n+a)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{b}{n^2}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq+}\frac{b}{n(n+a)}$ converge équivalence, et par comparaison $\displaystyle\sum_{n\geq1}||f_n||_{\infty,[\,a\,;\,b]}$ converge.

La convergence est normale, donc uniforme, sur $[\,a\,;\ b]$. Comme chaque f_n est continue sur $[\,a\,;\ b]$, S est continue sur $[\,a\,;\ b]$. Et comme ceci est valable pour tout a et b tels que $-1<a<0<1<b$, S est continue sur $]-1\,;\ +\infty[$.

• Chaque f_n est croissante ($f_n'(x)=\dfrac{1}{(n+x)^2}>0$...), donc par sommation S est croissante.

2. • Soit $x>-1$. Je note $\displaystyle\mathrm{S_N}(x)=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}f_n(x)$.

$$\mathrm{S_N}(x+1)-\mathrm{S_N}(x)=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n+1+x}-\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n+x}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\mathrm{N}+1+x}.$$

Passons à la limite lorsque $\mathrm{N}\longrightarrow+\infty$: $\mathrm{S}(x+1)-\mathrm{S}(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

• Dans $\mathrm{S}(x)=\mathrm{S}(x+1)-\dfrac{1}{1+x}$, faisons tendre x vers -1^+ : $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\mathrm{S}(x+1)=\mathrm{S}(0)$ par continuité, or $\mathrm{S}(0)=0$. Donc $\mathrm{S}(x+1)=o\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$, donc $\mathrm{S}(x+1)-\dfrac{1}{1+x}\underset{x\to-1}{\sim}$

$\dfrac{-1}{x+1}$.

Ainsi : $\quad \mathrm{S}(x) \underset{x\to -1}{\sim} \dfrac{-1}{x+1}$.

3. a) $\mathrm{S}(0)=0$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, \mathrm{S}(n+1)-\mathrm{S}(n)=\dfrac{1}{n+1}$ donc $\mathrm{S}(n+1)=\mathrm{S}(n)+\dfrac{1}{n+1}$... d'où

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{S}(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

b) *Culture nécessaire :* $\mathrm{S}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Par croissance de S : $\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)\le \mathrm{S}(x)\le \mathrm{S}(\lfloor x\rfloor+1)$

donc $\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)\le \mathrm{S}(x)\le \mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)+\dfrac{1}{\lfloor x\rfloor+1}$

donc $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)}{\ln x}\le \dfrac{\mathrm{S}(x)}{\ln x}\le \dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)}{\ln x}+\dfrac{1}{(\ln x)(\lfloor x\rfloor+1)}$.

- $\dfrac{1}{(\ln x)(\lfloor x\rfloor+1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ sans souci,
- $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)}{\ln x}=\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)}{\ln\lfloor x\rfloor}\times\dfrac{\ln\lfloor x\rfloor}{\ln x}$ or $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)}{\ln\lfloor x\rfloor} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ (culture !)
- $\ln\lfloor x\rfloor=\ln\big(x+(\lfloor x\rfloor-x)\big)=\ln\big(x(1+\dfrac{\lfloor x\rfloor-x}{x})\big)$

$\ln\lfloor x\rfloor = \ln x+\ln\big(1+\dfrac{\lfloor x\rfloor-x}{x}\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ car $\ln\big(1+\dfrac{\lfloor x\rfloor-x}{x}\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $\dfrac{\lfloor x\rfloor-x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ouf ! On a bien : $\dfrac{\mathrm{S}(\lfloor x\rfloor)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc par encadrement $\dfrac{\mathrm{S}(x)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$,

$$\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

Exercice 8 *Étude d'une fonction définie par une somme*

Soit, sous réserve d'existence, $\quad f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.
2. Montrer que f est décroissante.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. a) Montrer que : $\forall x\in\mathcal{D}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t\le f(x)\le 1+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

b) En posant $u=\sqrt{t}$ dans l'intégrale précédente, déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Solution (**Ex.8** – *Étude d'une fonction définie par une somme*)

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ? Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

- Si $x<0$, $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série diverge grossièrement. De même si $x=0$ car alors $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\ne 0$.

Si $x>0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}=\lim_{m\to+\infty}\frac{m^4}{(\mathrm{e}^x)^m}=0$ par croissance comparée (car $\mathrm{e}^x>1$). Donc $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}=o\left(1/n^2\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann.

$$\mathcal{D}=\left]0\,;\,+\infty\right[.$$

- Soit $a\in\left]0\,;\,+\infty\right[$.

$\forall x\in\left[a\,;\,+\infty\right[, \left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right|\le \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ or par ce qui précède $f(a)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ converge.

Donc la série converge normalement donc uniformément sur $\left[a\,;\,+\infty\right[$. Comme chaque f_n est continue sur $\left[a\,;\,+\infty\right[$, f est continue sur $\left[a\,;\,+\infty\right[$.
Ceci étant valable pour tout $a\in\left]0\,;\,+\infty\right[$, f est continue sur $\mathcal{D}$.

2. Chaque f_n est décroissante sur $\mathcal{D}$, donc par sommation f est décroissante sur $\mathcal{D}$: si $x<y$, $f(x)-f(y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(f_n(x)-f_n(y))}_{>0}>0$.

3. La convergence de $\displaystyle\sum_n f_n$ est normale donc uniforme sur $\left[1\,;\,+\infty\right[$, et

$\forall n\geqslant 1, f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ tandis que $f_0(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Par le théorème de la double limite,

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}0=1$.

4. a) Soit $x\in\mathcal{D}$.

Par décroissance de $t\mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ sur $\left[0\,;\,+\infty\right[$,

$$\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t\le \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\le\int_{k-1}^{k}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

En sommant de $k=0$ à N la minoration et en passant à $\mathrm{N}\longrightarrow+\infty$:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t\le f(x).$$

En sommant de $k=1$ à N la majoration et en passant à $\mathrm{N}\longrightarrow+\infty$:

$$f(x)-\mathrm{e}^0 \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Ainsi : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1+\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$

b) Or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u \overset{\text{IPP}}{=} \left[2u\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u = \frac{2}{x^2}.$

On déduit alors de a)

$$1 \leq \frac{x^2}{2}f(x) \leq \frac{x^2}{2}+1,$$

donc par encadrement $\frac{x^2}{2}f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

Exercice 9 *Domaine de définition troué*

Pour $x \geq 0$, on pose : $\quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1. Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}^+$, $\mathrm{S}(x)$ est-elle définie ?
2. Former une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(1/x)$ pour $x \neq 0$.
3. Étudier la continuité de S sur $[0\,;\,1[$ puis sur $]1\,;\,+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variation de S en précisant ses limites.

Solution (**Ex.9** – *Domaine de définition troué*)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, soit $f_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Pour $x \geq 0$, on pose : $\quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1. Si $x \in [0\,;\,1[$, $0 \leq f_n(x) \leq x^n$ donc $\mathrm{S}(x)$ existe par comparaison à la série géométrique.
   Si $x=1$, $f_n(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ donc la série diverge grossièrement et $\mathrm{S}(x)$ n'existe pas.
   Si $x>1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ donc $\mathrm{S}(x)$ existe par comparaison à la série géométrique de raison $\frac{1}{x} \in]0\,;\,1[$.
   Donc S est définie sur $\mathcal{D} = [0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
2. $\forall x \in \mathcal{D}\setminus\{0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(1/x) = \frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \frac{x^{2n}}{x^n(x^{2n}+1)} = f_n(x)$, donc
   $$\forall x \neq 0, \quad \mathrm{S}(1/x) = \mathrm{S}(x).$$
3. Étudier la continuité de S sur $[0\,;\,1[$ puis sur $]1\,;\,+\infty[$.
   Soit $a \in]0\,;\,1[$. La majoration précédente donne $||f_n||_{\infty,[0\,;\,a]} \leq a^n$. Or la série géométrique $\sum_n a^n$ converge. Donc S converge normalement donc uniformément sur $[0\,;\,a]$. Comme chaque f_n est continue, S est continue sur $[0\,;\,a]$. Comme a est arbitraire dans $[0\,;\,1[$, S est continue sur $[0\,;\,1[$.
   Comme sur $]1\,;\,+\infty[$, $\mathrm{S} : x \mapsto \mathrm{S}(1/x)$, S est continue sur $]1\,;\,+\infty[$ par composition.
4. • Pour tout n, $f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n}}{(1+x^{2n})^2}$ donc f_n est croissante sur $[0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
   Par sommation, S est croissante sur $[0\,;\,1[$ et décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$.
   • Par continuité, $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{S}(0) = 0$.
   • $\forall x \in [0\,;\,1[, \quad \mathrm{S}(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{x}{2(1-x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty,$
   donc par comparaison $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.
   • De $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(1/x)$ on tire par composition avec les limites précédentes
   $$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty \text{ et } \mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0.$$

Exercice 10 *Non dérivable en 0*

On pose, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$

1. Montrer que $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. La convergence de la série des f_n est-elle uniforme ? normale ?
3. Justifier que S est continue $[0\,;\,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a)** Montrer que, pour tout $x>0$, $\quad \frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} \geq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u^2)}.$
   b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Solution (**Ex.10** – *Non dérivable en 0*)

On pose, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$

1. Montrer que $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $[\,0\,;\ +\infty[$.

$\forall n \geq 1, f_n(0) = 0$ donc $\mathrm{S}(0)$ existe.

$\forall x \neq 0, |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3\,|x|}$ assure la convergence simple de $\mathrm{S}(x)$ par équivalence à la série de Riemann de paramètre 3.

2. De $\forall x \in \mathbb{R},\quad 0 \leq (1 - n\,|x|)^2 = 1 + n^2x^2 - 2n\,|x|$ on tire $2n\,|x| \leq 1 + n^2x^2$ puis $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

D'où $||f_n||_\infty \leq \dfrac{1}{2n^2}$, ce qui assure la convergence normale, donc uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

3. • La convergence uniforme et la continuité de chaque f_n assure la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

• Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f_n'(x) = \dfrac{1 - n^2x^2}{n(1 + n^2x^2)^2}$

Soit $a > 0$ et x tel que $|x| \geq a$. Alors

$|f_n'(x)| \leq \dfrac{1 + n^2x^2}{n(1 + n^2x^2)^2} \leq \dfrac{1}{n(1 + n^2x^2)} \leq \dfrac{1}{n(1 + n^2a^2)} \leq \dfrac{1}{n^3a^2}$

Donc $||f_n||_{\infty,]-\infty\,;\,a]\cup[\,a\,;\,+\infty[} \leq \dfrac{1}{n^3a^2}$. Ceci assure la convergence normale donc uniforme sur tout $]-\infty\,;\ a] \cup [\,a\,;\ +\infty[$ où $a > 0$. Donc que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. a) Soit $x > 0$.

$$\frac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + n^2x^2)}$$

Par comparaison à une intégrale :

$$\frac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1 + t^2x^2)}\mathrm{d}t$$

Par le changement $u = tx$!

$$\frac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x} \geq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1 + u^2)}.$$

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Comme $\dfrac{1}{u(1 + u^2)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u}$, par équivalence de fonctions positives avec $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ non intégrable sur $]\,0\,;\ 1]$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1 + u^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$: S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 11 *Une permutation série/intégrale*

1. Justifier l'existence et calculer la valeur de : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n :]\,0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto 2x\exp\big(-(2n+1)x\big)$.

2. a) Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on exprimera à l'aide de la fonction sh.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 12 *Étude de dérivabilité*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1 + n^2}\mathrm{e}^{-nx}$,

et, sous réserve d'existence, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathcal{D}_f$ de $f = [\,0\,;\ +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\ +\infty[$.

3. a) La convergence de $\sum f_n'$ est-elle normale sur $[\,0\,;\ +\infty[$? Et sur $[\,a\,;\ +\infty[$ où $a > 0$?

Solution (**Ex.12** – *Étude de dérivabilité*)

1. • Si $x < 0$, $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

Si $x \geq 0$, $\left(\dfrac{1}{1 + n^2}\mathrm{e}^{-nx}\right)_n$ est une suite décroissante de limite nulle donc par le théorème de Leibniz, la série converge.

Donc $\mathcal{D}_f = [\,0\,;\ +\infty[$.

• D'après le théorème de Leibniz,

$\forall x \in [\,0\,;\ +\infty[, |\mathrm{R_N}(x)| = \left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq |f_{\mathrm{N}+1}(x)| \leq \dfrac{1}{1 + (\mathrm{N}+1)^2}$, donc

$||\mathrm{R_N}||_\infty \leq \dfrac{1}{\mathrm{N}^2}$ donc $||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$.

La convergence est uniforme et pour tout n, f_n est continue sur $[\,0\,;\ +\infty[$ donc f est continue sur $[\,0\,;\ +\infty[$.

2. Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\ +\infty[$ et on peut raisonner de même pour la majoration du reste :

$\left|\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n'\right|\right|_\infty \leq \frac{1}{N}$, donc $\left|\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n'\right|\right|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

La convergence étant uniforme, la somme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\ +\infty[$.

3. • $||f_n'||_\infty \geq |f_n'(0)| \geq \frac{n}{1+n^2}$ or $\frac{n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, donc par équivalence de termes généraux positifs, puis par minoration, $\sum_{n\geq 1} ||f_n'||_\infty$ diverge. La convergence n'est pas normale sur $[\,0\,;\ +\infty[$.

• Soit $a > 0$. Alors (*attention à la place des valeurs absolues !*) :

$\forall x \geq a, |f_n'(x)|' = -\frac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx} < 0$ donc :

$||f_n'||_\infty = |f_n'(a)| = \frac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{-a}\right)^n$,

et comme $\mathrm{e}^{-a} \in\ ]\,0\,;\ 1[$, la série géométrique de raison e^{-a} converge, donc par équivalence de termes positifs, $\sum_{n\geq 1} ||f_n'||_{\infty,[\,a\,;\ +\infty[}$ converge.

Il y a convergence normale sur tout intervalle $[\,a\,;\ +\infty[$ avec $a > 0$... ce qui n'entraîne pas la convergence normale sur $]\,0\,;\ +\infty[$.