Exercice 1 *Puissances n-èmes et projections.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe des réels a et b tels que $f^2 + af + b.id_{\mathrm{E}} = 0$, avec $\Delta = a^2 - 4b > 0$.

1. **a)** Montrer que f satisfait une relation de la forme $(f-\alpha.id_{\mathrm{E}})\circ(f-\beta.id_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ où $\alpha < \beta$ sont des réels distincts.
   b) Justifier que f est diagonalisable. Que représentent les réels α et β pour f ?
2. Déterminer, en fonction de a et b, deux réels u et v tels que $s = u(f + v.id_{\mathrm{E}})$ soit une symétrie.
3. On pose $p = \dfrac{1}{2}(s + id_{\mathrm{E}})$ et $q = id_{\mathrm{E}} - p$.
   a) Vérifier que p et q sont des projections.
   b) Quels sont les images et les noyaux de ces projections ?
   c) Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$?
4. **a)** Montrer la relation $f = \alpha p + \beta q$.
   b) En déduire une expression de f^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. On suppose $b \neq 0$.
   a) Démontrer que f est bijective.
   b) Exprimer f^{-1} en fonction de p et q.
   c) En déduire une expression de f^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution (**Ex.1** – *Puissances n-èmes et projections.*)

1. **a)** Comme $\Delta > 0$, $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ possède deux racines réelles distinctes $\alpha > \beta$. Donc $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)$ et
$$(f - \alpha.id_{\mathrm{E}}) \circ (f - \beta.id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$
   b) f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples donc est diagonalisable. Les réels α et β sont les racines de P, donc les seules valeurs propres *possibles* de f :
$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{\alpha, \beta\}.$$
2. $s^2 = id_{\mathrm{E}} \iff u^2f^2 + 2u^2vf + u^2v^2id_{\mathrm{E}} = id_{\mathrm{E}}$
   $s^2 = id_{\mathrm{E}} \iff u^2(-af - bid_{\mathrm{E}}) + 2u^2vf + u^2v^2id_{\mathrm{E}} = id_{\mathrm{E}}$
   Il suffit que $2v - a = 0$ et $u^2(v^2 - b) = 1$ pour que $s^2 = s$.
   Il suffit que $v = \dfrac{a}{2}$ et $u^2 = \dfrac{4}{a^2-4b}$, donc $u = \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}$ convient.
3. **a)** $p^2 = \dfrac{1}{4}(s^2 + 2s + id_{\mathrm{E}}) = \dfrac{1}{4}(2s + id_{\mathrm{E}}) = p$ et $q^2 = id_{\mathrm{E}} - 2p + p^2 = id_{\mathrm{E}} - p = q$ donc p et q sont des projections.
   b) $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(s + id_{\mathrm{E}}) = \{x \in \mathrm{E}, s(x) = -x\}$ est la direction de projection de s.
   $\mathrm{Im}(p) = \{x \in \mathrm{E}, p(x) = x\} = \{x \in \mathrm{E}, s(x) + id_{\mathrm{E}}(x) = 2x\} = \{x \in \mathrm{E}, s(x) = x\}$ est l'axe de la symétrie de s.
   $\mathrm{Ker}(q) = \{x \in \mathrm{E}, x - p(x) = 0\} = \mathrm{Im}(p)$.
   $\mathrm{Im}(q) = \{x \in \mathrm{E}, q(x) = x\} = \mathrm{Ker}(p)$.
   Remarque : p et q sont les deux projections complémentaires l'une de l'autre :
$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad p(x) + q(x) = x, \text{ i.e. } p + q = id_{\mathrm{E}}.$$
   c) Comme $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$, $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et comme $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q)$, $q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
4. **a)** $\alpha p + \beta q = \alpha\dfrac{1}{2}(s + id_{\mathrm{E}}) + \beta\dfrac{1}{2}(id_{\mathrm{E}} - s) = \dfrac{\alpha-\beta}{2}s + \dfrac{\alpha+\beta}{2}id_{\mathrm{E}}$.
   Rappelons que $\alpha - \beta = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\alpha + \beta = -a$ vu que $\alpha > \beta$ sont les racines de $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ de discriminant Δ.
   $\alpha p + \beta q = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}(f + \dfrac{a}{2}id_{\mathrm{E}}) + \dfrac{-a}{2}id_{\mathrm{E}} = f$.
   b) Par récurrence on montre que $f^n = \alpha^n p + \beta^n q$.
   L'initialisation provient de $p + q = id_{\mathrm{E}}$.
   Et si $f^n = \alpha^n p + \beta^n q$, alors $f^{n+1} = (\alpha^n p + \beta^n q) \circ (\alpha p + \beta q) = \alpha^{n+1}p + \beta^{n+1}q$ vu les relations établies sur les projections p et q.
   On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton puisque p et q commutent et $p^k \circ q^{n-k} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ pour tout $k \in [\![1\,;\ n-1]\!]$.
5. **a)** $f \circ (f + aid_{\mathrm{E}}) = -bid_{\mathrm{E}}$ donc, puisque $b \neq 0$, f est bijective de réciproque $f^{-1} = \dfrac{-1}{b}\big(f + aid_{\mathrm{E}}\big)$.
   b) Avec les relations racines-coefficients, $b = \alpha\beta$ et $a = -\alpha - \beta$, donc
   $f^{-1} = \dfrac{-1}{\alpha\beta}\big(\alpha p + \beta q - (\alpha+\beta)id_{\mathrm{E}}\big) = \dfrac{1}{\beta}(id_{\mathrm{E}} - p)) + \dfrac{1}{\alpha}(id_{\mathrm{E}} - q)$.
   $f^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}p + \dfrac{1}{\beta}q = \alpha^{-1}p + \beta^{-1}q$.
   c) Une récurrence analogue à la question précédente ou la formule du binôme montre alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (f^{-1})^n = (\alpha^{-1})^n p + (\beta^{-1})^n q$,
   et on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{Z}, f^n = \alpha^n p + \beta^n q$.

Exercice 2 *Diagonalisabilité d'une matrice triangulaire par blocs*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB = BA$. On pose

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

1. Calculer M^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Expliciter $P(M)$ à l'aide de P, P', A et B.

3. En déduire que M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et B est nulle.

Solution (**Ex.2 –** *Diagonalisabilité d'une matrice triangulaire par blocs*)

1. Après avoir calculer M^2 et M^3, on conjecture que

$$\forall k \in N, \qquad M^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & kA^{k-1}B \\ \hline 0 & A^k \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

$$P(M) = \left(\begin{array}{c|c} \sum_{k=0}^{d} c_k A^k & \sum_{k=1}^{d} c_k k A^{k-1} B \\ \hline 0 & \sum_{k=0}^{d} c_k A^k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & P'(A)B \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right).$$

3. • Supposons M diagonalisable. Alors il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(M) = 0_{2n}$. Donc $P(A) = 0_n$ et A est diagonalisable.
De plus $P'(A)B = 0$.*Attention :* pour affirmer que B est nulle, il faut être sûr que $P'(A)$ est inversible.
En notant λ_i pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ les valeurs propres de A, répétées autant de fois que leur multiplpicité, A est semblable à $diag(\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ donc $P'(A)$ est semblable à $diag(P'(\lambda_i), 1 \leqslant i \leqslant n)$. Or les λ_i sont toutes des racines de P, donc simples, donc aucune des valeurs propres $P'(\lambda_i)$ de $P'(A)$ n'est nulle. Donc $P'(A)$ est inversible. Donc B est nulle.
• Réciproquement, si A est diagonalisable et B nulle, il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(A) = 0$.

Alors $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & P'(A)B \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = 0_{2n}$.
Donc M est diagonalisable.

Exercice 3 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1. Dans cette question uniquement, on suppose A inversible. Justifier que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2. On revient au cas général et on pose

$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $PN = MP$ et conclure.

Solution (**Ex.3 –** $\chi_{AB} = \chi_{BA}$)

1. On a : $BA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables et on par conséquent le même polynôme caractéristique.

2. $PN = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = MP$, et $\det(P) = 1$ donc P est inversible, donc $N = P^{-1}MP$.
Donc M et N sont semblables et ont le même polynôme caractéristique.
Par le calcul du déterminant par blocs des matrices triangulaires :

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - BA & -B \\ 0 & \lambda I_n \end{vmatrix} = \chi_{BA}(\lambda)\lambda^n \text{ et de même } \chi_N(\lambda) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda).$$

Ainsi $\chi_M(X) = \chi_N(X) = X^n \chi_{BA}(X) = X^n \chi_{BA}(X)$.
Donc en effectuant la division euclidienne par X^n,

$$\chi_M(X) = X^n \chi_{BA}(X) + 0 = X^n \chi_{BA}(X) + 0$$

et par unicité du quotient (et du reste ici nul) on a $\chi_{BA} = \chi_{BA}$.