Exercice 1 *Symétries anticommuntantes*

Dans tout ce problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. L'application identité de E est notée id. Si f est un endomorphisme de E, pour toute valeur propre λ de f on note $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{K}er(f - \lambda id)$ le sous-espace propre de f relatif à λ.

1. *Question de cours*
On suppose que s est une symétrie de E distincte de id et de $-id$.
Rappeler un polynôme annulateur de s de degré 2, justifier que s est diagonalisable et rappeler ses valeurs propres.

2. Dans cette question seulement, $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ et on le munit de la base canonique $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.
On considère les endomorphismes u et v représentés dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{V} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que u et v sont des symétries, et vérifier rapidement que $u \circ v = -v \circ u$.
b) Calculer $\mathrm{Tr}\,(u)$ et $\mathrm{Tr}\,(v)$. Montrer que cela permet de déterminer la dimension des sous-espaces propres de u et de v (sans avoir à déterminer ces derniers explicitement).
c) Déterminer une base (e_1, e_2) de $\mathrm{E}_1(u)$.
Montrer que la famille (e_3, e_4) définie par $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$ est une base de $\mathrm{E}_{-1}(u)$.
d) Si l'on pose $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, justifier que $\mathcal{E}$ est une base de E et déterminer la matrice représentative de u et de v dans la base $\mathcal{E}$.

On revient au cas général. n est maintenant supposé quelconque.
Soit u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u^2 = v^2 = id$ et $u \circ v + v \circ u = 0$.

3. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = 0$.

4. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(v) = 0$. *On pourra écrire $u = u \circ v^2$...*

5. Montrer que la dimension de E est paire.
On notera $n = 2k$, avec k un entier naturel.

6. Montrer que $v(\mathrm{E}_1(u)) = \mathrm{E}_{-1}(u)$ et que $v(\mathrm{E}_{-1}(u)) = \mathrm{E}_1(u)$.

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_{2k})$ de E dans laquelle les matrices de u et de v s'écrivent, par blocs :

$$\mathcal{M}_\mathcal{C}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_k \end{array}\right) \text{ et } \mathcal{M}_\mathcal{C}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_k \\ \hline \mathrm{I}_k & 0 \end{array}\right).$$

Exercice 2 *Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 3*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $c \neq 0$.
On dit que la suite u de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ vérifie la relation $(\mathcal{R})$ de récurrence linéaire d'ordre 3 si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n \qquad (\mathcal{R})$$

On appelle équation caractéristique (E) associée à $(\mathcal{R})$ l'équation

$$z^3 = a z^2 + b z + c \qquad (\mathrm{E})$$

On note enfin P le polynôme défini par $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - a\mathrm{X}^2 - b\mathrm{X} - c$.

__Les deux parties__ proposent d'étudier les suites vérifiant la relation ($\mathcal{R}$) de deux façons indépendantes, et __doivent être traitées indépendamment.__ On ne doit par conséquent pas utiliser un résultat de l'une d'elles pour justifier un résultat de l'autre.

Partie 1 - Une méthode dans un cas particulier

On suppose, uniquement dans cette partie, que (E) possède exactement trois solutions distinctes λ, μ et ν.

1. Soit F l'ensemble des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant ($\mathcal{R}$).

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

b) Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & u & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

est un isomorphisme.

c) En déduire que F est de dimension de 3.

On définit, jusque la fin de cette partie, les suites u, v et w par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n, \quad v_n = \mu^n \quad \text{et} \quad w_n = \nu^n.$$

2. Montrer que la suite u appartient à F. Qu'en est-il des suites v et w ?

3. a) *Question de cours*

Rappeler la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 \\ 1 & \nu & \nu^2 \end{vmatrix}$.

b) On note $\mathcal{B}$ la famille (u, v, w). Montrer que $\big(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)\big)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) Que peut-on en déduire concernant la famille $\mathcal{B}$?

d) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant ($\mathcal{R}$).
Justifier l'existence de trois complexes α_1, α_2 et α_3 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \alpha_1\lambda^n + \alpha_2\mu^n + \alpha_3\nu^n.$$

4. *Application*

On considère la suite (x_n) définie par

$$x_0 = 2, x_1 = x_2 = -1 \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

Exprimer explicitement x_n à l'aide de n.

Partie 2 - Une méthode matricielle

Dans cette partie, on suppose que u est une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation ($\mathcal{R}$).
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

5. a) Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ que l'on explicitera telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{U}_n.$$

b) En déduire une expression de U_n en fonction de n, M et U_0.

6. Calculer le polynôme caractéristique χ_{M} de M et en déduire que λ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est une solution de l'équation caractéristique (E).

7. Soit λ une valeur propre de M et E_λ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.

Montrer que $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}\right)$.

8. On suppose dans cette question uniquement que χ_{M} possède exactement 3 racines distinctes que l'on note λ_1, λ_2 et λ_3.

a) Justifier qu'il existe trois matrices A_1, A_2 et A_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^n = \lambda_1^n \mathrm{A}_1 + \lambda_2^n \mathrm{A}_2 + \lambda_3^n \mathrm{A}_3.$$

b) Justifier l'existence de trois complexes α_1, α_2 et α_3 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \alpha_3 \lambda_3^n.$$

9. On suppose dans cette question uniquement que χ_{M} possède une racine double λ et une racine simple μ.

a) M est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

b) On note Q la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & \mu \\ \lambda^2 & 2\lambda & \mu^2 \end{pmatrix}.$$

Justifier que Q est inversible.

c) Sans chercher à calculer Q^{-1}, montrer que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{Q} = \mathrm{T}$ où

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

d) Calculer T^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

e) Justifier l'existence de trois complexes α_1, α_2 et α_3 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n(\alpha_1 + \alpha_2 n) + \alpha_3 \mu^n.$$

On admet que si χ_{M} possède une unique racine triple λ, alors

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n(\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2).$$

10. Que dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ si toutes les solutions de (E) sont de module strictement inférieur à 1 ?

11. Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $\mathrm{X}^3 + 25\mathrm{X}^2 + 12\mathrm{X} + 2023$.

Un corrigé

Solution (Ex.1 – *Symétries anticommuntantes***)**

1. $s^2 = id$ donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur scindé à racines simples de s donc s est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$. Comme $s \neq \pm id$, $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$.

2. a) $U^2 = I_4$, $V^2 = I_4$ et $UV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -VU$ donc u et v sont des symétries, et $u \circ v = -v \circ u$.

b) $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(v) = 0$. u est diagonalisable donc $\dim E_{-1} + \dim E_1 = 4$ et en considérant la matrice représentant u dans une base de vecteurs propres $(-1) \times \dim E_{-1} + 1 \times \dim E_1 = \mathrm{Tr}\,(u)$.

Ainsi $\begin{cases} \dim E_{-1} + \dim E_1 &= 4 \\ -\dim E_{-1} + \dim E_1 &= 0 \end{cases}$ donc $\dim E_{-1} = \dim E_1 = 2$.

c) $(e_1, e_2) = (b_2, (1, 0, -1, -1))$ est une base de $E_1(u)$.
On obtient $(e_3, e_4) = (-b_1, -b_4)$ qui est libre et formée de vecteurs propres associés à -1 de u, donc est une base de $E_{-1}(u)$.
Il y a un raisonnement plus général comme le montre la seconde partie de l'exercice.

d) $\mathcal{E}$ est la concatenée de deux bases des sous-espaces supplémentaires E_{-1} et E_1 donc est une base de E.

$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 \end{array}\right)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_2 \\ \hline I_2 & 0 \end{array}\right)$.

On revient au cas général. n est maintenant supposé quelconque.
Soit u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u^2 = v^2 = id$ et $u \circ v + v \circ u = 0$.

3. Par linéarité de la trace, $0 = \mathrm{Tr}\,(u \circ v + v \circ u) = \mathrm{Tr}\,(u \circ v) + \mathrm{Tr}\,(v \circ u)$, et comme $\mathrm{Tr}\,(v \circ u) = \mathrm{Tr}\,(u \circ v)$, $2\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = 0$ donc $\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = 0$.

4. $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(u \circ v^2) = \mathrm{Tr}\,((u \circ v) \circ v)) = \mathrm{Tr}\,(-(v \circ u) \circ v) = -\mathrm{Tr}\,(v \circ u \circ v) = -\mathrm{Tr}\,(u \circ v \circ v) = -\mathrm{Tr}\,(u)$ donc $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$. De même $\mathrm{Tr}\,(v) = 0$.

5. u étant diagonalisable, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda = n$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \dim E_\lambda = \mathrm{Tr}\,(u)$, et comme de spectre $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$,
$\begin{cases} \dim E_{-1} + \dim E_1 &= n \\ -\dim E_{-1} + \dim E_1 &= 0 \end{cases}$, donc $\dim E_{-1} = \dim E_1 = \dfrac{n}{2}$.
Tout dimension étant un entier naturel, $n = \dim(E)$ est pair : $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

6. • v est un automorphisme donc conserve la dimension, et $\dim(E_{-1}(u)) = \dim(E_1(u)) = k$, donc $\dim(v(E_1(u))) = \dim(E_{-1}(u))$ et $\dim(v(E_{-1}(u))) = \dim(E_1(u))$.
• Soit $x \in E_1(u)$. $v(x) = v(u(x)) = v \circ u(x) = -u \circ v(x) = -u(v(x))$ donc $v(x) \in E_{-1}(u)$. Donc $v(E_1(u)) \subset E_{-1}(u)$. Par égalité des dimensions, $v(E_1(u)) = E_{-1}(u)$.
• Soit $x \in E_{-1}(u)$. $v(x) = v(-u(x)) = -v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x))$ donc $v(x) \in E_1(u)$. Donc $v(E_{-1}(u)) \subset E_1(u)$. Par égalité des dimensions, $v(E_{-1}(u)) = E_1(u)$.

7. Soit $\mathcal{C}_1 = (e_1, ..., e_k)$ une base de $E_1(u)$. Soit : $\forall i \in [\![1\,;\ k]\!], e_{k+i} = v(e_i)$. Par la question précédente, $\mathcal{C}_2 = (e_{k+1}, ..., e_{2k})$ est une base de $E_{-1}(u)$.
Par concaténation de bases de sous-espaces supplémentaires, $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est une base de E, et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_k \end{array}\right)$.
Ensuite, $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!], v(e_i) = v(u(e_i))$ puisque $u(e_i) = e_i$, $v(e_i) = -u \circ v(e_i) = -u(e_{k+i}) = e_{k+i}$ puisque $e_{k+i} \in E_{-1}(u)$.
Puis $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!], v(e_{k+i}) = v^2(e_i) = e_i$.

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_k \\ \hline \mathrm{I}_k & 0 \end{array}\right)$.

Solution (**Ex.2** – *Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 3*) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $c \neq 0$.
On dit que la suite u de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie la relation $(\mathcal{R})$ de récurrence linéaire d'ordre 3 si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \qquad (\mathcal{R})$$

On appelle équation caractéristique (E) associée à $(\mathcal{R})$ l'équation

$$z^3 = az^2 + bz + c \qquad \text{(E)}$$

On note enfin P le polynôme défini par $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - a\mathrm{X}^2 - b\mathrm{X} - c$.

Les deux parties *proposent d'étudier les suites vérifiant la relation $(\mathcal{R})$ de deux façons indépendantes, et* ***doivent être traitées indépendamment.*** *On ne doit par conséquent pas utiliser un résultat de l'une d'elles pour justifier un résultat de l'autre.*

Partie 1 - Une méthode dans un cas particulier

1. a) F est inclus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, contient la suite nulle puisqu'elle verifie $(\mathcal{R})$, et si deux suites u et v vérifient $(\mathcal{R})$, $\lambda u + v$ vérifie aussi $(\mathcal{R})$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

b) • φ est linéaire.
• Si $u \in \mathrm{F}$ et $\varphi(u) = 0$, alors $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, et comme u vérifie $(\mathcal{R})$, u est la suite nulle par récurrence immédiate. Donc $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$ et φ est injective.
• Soit $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$. Soit u telle que $u_0 = x$, $u_1 = y$ et $u_2 = z$ et vérifiant $(\mathcal{R})$. Alors $u \in \mathrm{F}$ et $\varphi(u) = (x,y,z)$. Ceci prouve que φ est surjective.

c) Comme φ est un isomorphisme, $\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathbb{C}^3) = 3$.

2. • Puisque $a\lambda^2 + b\lambda + c = \lambda^3$,
$\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} = bu_{n+1} + cu_n = \lambda^n(a\lambda^2 + b\lambda + c) = \lambda^n\lambda^3 = u_{n+3}$ donc u appartient à F.
• Le raisonnement précédent vaut pour tout racine de (E), donc v et w sont aussi dans F.

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 \\ 1 & \nu & \nu^2 \end{vmatrix} \overset{\text{V}andermonde}{=} \mathrm{V}(\lambda,\mu,\nu) = (\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\nu-\mu)$.

b) $\varphi(\mathcal{B}) = \big(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)\big) = ((1,\lambda,\lambda^2),(1,\mu,\mu^2),(1,\nu,\nu^2))$ et $\det(\varphi(\mathcal{B})) = \mathrm{V}(\lambda,\mu,\nu) \neq 0$ puisque λ, μ et ν sont deux à deux distinctes, donc $\varphi(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) $\mathcal{B} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{B}))$ est une base de F puisque φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ sur F et $\varphi(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

d) $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant un vecteur de F et (u,v,w) une base de F, il existe trois complexes α_1, α_2 et α_3 (uniques) tels que $x = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \alpha_1\lambda^n + \alpha_2\mu^n + \alpha_3\nu^n.$$

4. *Application*
Sur cet exemple, (E) : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \iff (x-1)(x+1)(x-2) = 0$.
Soit $\lambda = -1$, $\mu = 1$ et $\nu = 2$ les trois solutions distinctes de (E). Il existe trois complexes α, β et γ (uniques) tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n + \gamma\nu^n$.
Cette relation appliquée pour n valant 0, 1 et 2 fournit
$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ \alpha + \beta + 4\gamma = -1 \end{cases}$ dont les uniques solutions sont $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (-1)^n + 2 - 2^n.$$

Partie 2 - Une méthode matricielle

Dans cette partie, on suppose que u est une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

5. a) $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ convient (et c'est la seule...).

b) Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{M}^n \mathrm{U}_0.$$

En déduire une expression de U_n en fonction de n, M et U_0.

6. Calculer le polynôme caractéristique χ_{M} de M et en déduire que λ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est une solution de l'équation caractéristique (E).
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -c & -b & \lambda - a \end{vmatrix} = \lambda\big(\lambda(\lambda - a) - b\big) - c = \lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c = \mathrm{P}(\lambda)$$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \Longleftrightarrow \chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{P}(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda$ vérifie (E).

7. Soit λ une valeur propre de M et E_λ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.

Soit $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$\mathrm{V} \in \mathrm{E}_\lambda \Longleftrightarrow \mathrm{MV} = \lambda \mathrm{X} \Longleftrightarrow \begin{cases} y & = \lambda x \\ z & = \lambda y \\ -cx - by - az & = \lambda z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y & = \lambda x \\ z & = \lambda^2 x \\ (-c - b\lambda - a\lambda^2)x & = \lambda^3 x \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y & = \lambda x \\ z & = \lambda^2 x \\ x \in \mathbb{C} \end{cases} \text{ puisque } -c - b\lambda - a\lambda^2 = \lambda^3.$$

Donc $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}\right)$.

Variante– On peut aussi observer que $\mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_3) \leqslant 2$ car λ est une valeur propre et $\mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_3) \geqslant 2$ car ses deux dernières colonnes sont libres. Donc $\dim(\mathrm{E}_\lambda) = 1$.

Et comme $-c - b\lambda - a\lambda^2 = \lambda^3$, $\mathrm{M}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_\lambda$, donc $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}\right)$.

8. a) $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}ard(\mathrm{Sp}(\mathrm{A})) = 3$ donc est diagonalisable et il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{Q}\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathrm{Q}^{-1}$.

Et $\forall n \in \mathbb{Z}, \mathrm{M}^n = \mathrm{Q}diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)\mathrm{Q}^{-1} = \lambda_1^n \mathrm{A}_1 + \lambda_2^n \mathrm{A}_2 + \lambda_3^n \mathrm{A}_3$ où $\mathrm{A}_i = \mathrm{Q}\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{Q}^{-1}$, $\mathrm{E}_{i,i}$ désignant la matrice usuelle de la base canonique.

b) On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = (\lambda_1^n \mathrm{A}_1 + \lambda_2^n \mathrm{A}_2 + \lambda_3^n \mathrm{A}_3) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

d'où l'existence de trois complexes α_1, α_2 et α_3 tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \alpha_3\lambda_3^n$
Précisément, α_i est le produit de la première ligne de A_i par U_0.

9. On suppose dans cette question uniquement que χ_M possède une racine double λ et une racine simple μ.

a) M n'est pas diagonalisable car par 7. $\dim(\mathrm{E}_\lambda) = 1 < 2 = \mu(\lambda)$.
Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, χ_M scindé et M est trigonalisable.

b) On note P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & \mu \\ \lambda^2 & 2\lambda & \mu^2 \end{pmatrix}.$$

Justifier que P est inversible.

$$\det(\mathrm{Q}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & \mu \\ \lambda^2 & 2\lambda & \mu^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \mu-\lambda \\ \lambda^2 & 2\lambda & \mu^2-\lambda^2 \end{vmatrix} = (\mu-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\lambda & \mu+\lambda \end{vmatrix} = (\mu-\lambda)^2 \neq 0,$$ donc Q est inversible.

c) Sans chercher à calculer P^{-1}, montrer que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{T}$ où

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

On vérifie par le calcul que $\mathrm{MQ} = \mathrm{QT}$.

d) $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix}$ par récurrence ou par la formule du binôme en décomposant T en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente strictement triangulaire supérieure.

e) Un raisonnement analogue à 8 montrer alors l'existence de trois complexes α_1, α_2 et α_3 tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n(\alpha_1 + \alpha_2 n) + \alpha_3\mu^n$.

10. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n 0$ si toutes les solutions de (E) sont de module strictement inférieur à 1.

11. $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2023 & -12 & -25 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique est $\mathrm{X}^3 + 25\mathrm{X}^2 + 12\mathrm{X} + 2023$.