Exercice 1 *Équivalence des normes usuelles de $\mathbb{R}^n$*

Démontrer les encadrements suivants sur les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$.

1. $||.||_\infty \leq ||.||_1 \leq n\,||.||_\infty$

2. $||.||_2 \leq ||.||_1 \leq \sqrt{n}\,||.||_2$

3. $||.||_\infty \leq ||.||_2 \leq \sqrt{n}\,||.||_\infty$

Exercice 2 *Norme et morphisme injectif*

Soit (F,N) un espace vectoriel normé. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
On suppose que u est injective.
Montrer que la fonction $\mathrm{N}\circ u : x \mapsto \mathrm{N}(u(x))$ est une norme sur E.

Exercice 3 *Espaces L_1 et L_2 de Lebesgue*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On note L_1 l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^\mathrm{I}$ intégrables.

a) Montrer que L_1 est un espace vectoriel.

b) Montrer que

$$||.||_1 : \mathrm{L}_1 \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \int_\mathrm{I} |f|$$

est une norme sur L_1.

2. On note L_2 l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^\mathrm{I}$ dont le carré est intégrable.

a) Justifier que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

b) Montrer que L_2 est un espace vectoriel.

c) On définit $||.||_2$ par

$$||.||_2 : \mathrm{L}_2 \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sqrt{\int_\mathrm{I} f^2}$$

À l'aide de l'inégalité précédente, justifier que pour f et g dans L_2

$$\int_\mathrm{I} \left(\frac{|f|}{||f||_2} \times \frac{|g|}{||g||_2} \right) \leqslant 1$$

et en déduire l'inégalité de Cauchy-Shwarz intégrale

$$\int_\mathrm{I} |f|\,|g| \leqslant ||f||_2\,||g||_2$$

d) Montrer que $||.||_2$ est une norme sur L_2.

3. Dans cette question, $\mathrm{I} = [\,1\,;\ +\infty[$.

a) Soit $\alpha \in \,]\,0\,;\ +\infty[$. À quelle condition $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ appartient-elle à L_1 ? Et à L_2 ?

b) Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{x^{1+1/n}}$. (f_n) est-elle une suite bornée de L_1 ? Et de L_2 ?

Exercice 4 *Exemples de normes sur un espace de dimension infinie*

Dans $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1([\,0\,;\ 1\,],\mathbb{R})$, on considère :

$$\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \nu : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que N et ν sont des normes sur E.

2. a) Pour $f \in \mathrm{E}$, quelle relation y a-t-il entre $f(0)$, $f(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$?

b) Montree que : $\forall f \in \mathrm{E}, \nu(f) \leq 2\mathrm{N}(f)$.

c) Justifier que N et ν sont équivalentes.

3. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. À l'aide de la suite $(t \mapsto t^n)$, étudier si $||.||_1$ et N sont équivalentes.

Exercice 5 *Caractérisation des limites de puissances d'une matrice*

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$. Montrer que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$.

2. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$.

3. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 6 *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On pose, pour tout x de $\mathbb{K}$, $\mathrm{P}(x) = \det(\mathrm{A} + x\mathrm{I}_n)$.
Justifier que f n'a qu'un nombre fini de racines non nulles.

2. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{A}_k = \mathrm{A} + \dfrac{1}{k}\mathrm{I}_n$. Justifier qu'il existe un entier k_0 tel que

$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{A}_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

3. En déduire que A est limite d'une suite de matrices inversibles.

4. Qu'en déduire ?

Exercice 7 *Exponentielle de matrices particulières*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $S_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} M^j$.

On appelle *exponentielle de M*, si elle existe, la limite de la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$, notée e^M.

1. Dans les cas suivants, montrer que e^M existe et la calculer :

a) $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On suppose M diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que

$$D = P^{-1}MP.$$

Montrer que e^D et e^M existent, et donner une relation entre elles.

3. Calculer e^M pour

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 *Normes et convergence dans* $\mathbb{R}[X]$

Pour tout polynôme réel P, écrit sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X_k,$$

on note

$$||P||_\infty = \sup_{x\in[0\,;\,1/2]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N(P) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $||.||_\infty$ et vers 1 pour la norme N.

3. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X.

Exercice 9 *Intérieur, adhérence et opérations ensemblistes*

Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé.

1. Montrer que :

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. En déduire des propriétés analogues pour l'intérieur de $A \cap B$ et de $A \cup B$.

Exercice 10 *Une caractérisation de l'adhérence*

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide E. On rappelle que, pour tout $x \in E$, la distance de x à A, est définie par $d(x, A) = \inf_{y\in A} ||x - y||$. Montrer que :

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

Exercice 11 *Dans un espace de fonctions*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$.

1. On se propose de démontrer que

$$U = \{f \in E / \forall x \in [0\,;\,1], f(x) > 0\}.$$

est un ouvert de E.

a) Soit $f \in E$. Justifier : $\exists a \in [0\,;\,1], \forall x \in [0\,;\,1], f(x) \geq f(a)$.

b) Soit $f \in U$ et a défini comme précédemment. On pose $m = f(a)$. Montrer que $B(f, m)$ n'est pas vide et que $B(f, m) \subset U$.

c) Qu'a-t-on démontré ?

2. Soit

$$F = \{f \in E / \forall x \in [0\,;\,1], f(x) \geq 0\}.$$

Montrer que F est un fermé de E.