Exercice 1 *Détermination de rayon de convergence*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$ dans les cas suivants :

1. $u_n(z) = \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$ **2.** $u_n(z) = \mathrm{e}^{-n^2} z^n$ **3.** $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{n^2} z^n$

4. $u_n(z) = n! z^n$ **5.** $u_n(z) = \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$ **6.** $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^n} z^{2n+1}$

Solution (**Ex.1** – *Détermination de rayon de convergence*)

Je note a_n le coefficient de z^n dans $u_n(z)$.

1. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3n^2}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}|z|$ donc $\mathrm{R} = 3$.

2. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \mathrm{e}^{-2n-1}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{R} = +\infty$.

3. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$ car $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}$, donc $\mathrm{R} = 1$.

4. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{R} = 0$ (divergence grossière dès que $z \neq 0$).

5. $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}|z|^3 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n |z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}|z|^3$ donc $\mathrm{R} = \mathrm{e}^{-1/3}$.

6. $|u_{n+1}(z)u_n(z)| = \dfrac{\ln(n+1)\mathrm{e}^n}{\ln(n)\mathrm{e}^{n+1}}|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{|z|^2}{\mathrm{e}}$ donc $\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 2 *Rayons de convergence abstraits*

On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $\mathrm{R} \in]0\,;\,+\infty[$.

Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$? Et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$?

Solution (**Ex.2** – *Rayons de convergence abstraits*)

• Si $|z| < \sqrt{\mathrm{R}}$, alors $|z^2| < \mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ converge.

Si $|z| > \sqrt{\mathrm{R}}$, alors $|z^2| > \mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ diverge.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{\mathrm{R}}$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Soit $r \in]0\,;\,\mathrm{R}[$.

$\dfrac{a_n z^n}{n!} = a_n r^n \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n = o(a_n r^n)$ car $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge puisque $0 < r < \mathrm{R}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Exercice 3 *Indéfiniment dérivable*

Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.3** – *Indéfiniment dérivable*)

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} x^n$. Cette expression est encore valable pour $x = 0$. Donc f est la somme d'une série entière de rayon infini. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 *De « n » à « 2n »*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$.

2. Pour $x \in]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, on note $\mathrm{S}(x)$ la somme d cette série.

a) Calculer $\mathrm{S}(0)$.

b) Pour $x \in]0\,;\,\mathrm{R}[$, calculer $\mathrm{S}(x)$ en observant que $x^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2n}$.

c) Pour $x \in]-\mathrm{R}\,;\,0[$, calculer $\mathrm{S}(x)$ en observant que $x^n = (-1)^n\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}$.

Solution (**Ex.4** – *De « n » à « 2n »*)

$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|x|}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout x et $\mathrm{R} = +\infty$.

Pour $x = 0$, $f(x) = 1$.

Pour $x > 0$: $f(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n+1)!} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\geq 0} \dfrac{\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Pour $x < 0$: $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$

Exercice 5 *Convergence et valeur au bord du domaine*

1. Montrer l'existence de $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;\,1]$, $\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

a) Justifier l'existence, pour $x \in [0\,;\,1]$, de $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Que vaut, pour $x \in [0\,;\,1[$, $\mathrm{S}(x)$?

c) Montrer que la série converge uniformément sur $[0\,;\,1]$.

d) En déduire la valeur de S.

Solution (**Ex.5** – *Convergence et valeur au bord du domaine*)

1. Théorème de Leibniz : $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.

2. a) Sur $[0\,;\,1[$, S.E. de Arctan. En 1, voir 1).

b) S.E. de R.C. 1 : $\forall x \in [0\,;\,1[\,, \mathrm{S}(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

c) Leibniz : $\forall x \in [0\,;\,1]\,, |\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$. Donc $||\mathrm{R}_n||_{\infty,[0\,;\,1]} \leq \frac{1}{2n+3}$.

d) La convergence de $\sum_n f_n$ est uniforme sur $[0\,;\,1]$ donc la somme est continue sur $[0\,;\,1]$.

3. Par continuité de S et Arctan en 1, $\mathrm{S} = \mathrm{S}(1) = \lim_{x \to 1^-} \mathrm{S}(x) = \lim_{x \to 1^-} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}$.

On peut aussi invoquer le théorème de la double limite sur $[0\,;\,1[$ puisque la convergence est uniforme.

Exercice 6 *Différence de S.E.*

Soit $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est développable en série entière, en précisant les coefficients et le rayon de convergence du développement obtenu.

Solution (**Ex.6** – *Différence de S.E.*)

1. $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) = (1-z)(2-z)$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$.

2. $\forall z \in \mathcal{D}_f$,
$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - z/2}$. Pour z tel que $|z/2| < 1$ et $|z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 1$, par convergence de la série géométrique,
$\forall z \in \mathcal{D}(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} z^n$
f étant la somme de deux séries entières de rayons distincts 1 et 2, le rayon de convergence de cette somme est $\min(1,2) = 1$. Sinon, on peut réveiller M. D'Alembert pour s'en convaincre.

Exercice 7 *Expression fonctionnelle d'une S.E.*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{(n+1)!} x^n$.

On note $f :]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\to \mathbb{R}$ sa somme.

2. Calculer f

a) en écrivant $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer ;

b) en écrivant $f(x) = xg(x)$ et en explicitant g.

Solution (**Ex.7** – *Expression fonctionnelle d'une S.E.*)

1. $\forall z \neq 0, \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{(n+1)}{(n+2)n} |z| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout z et $\mathrm{R} = +\infty$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} z^n$ ont un rayon de convergence infini (série exponentielle).

Pour $z \neq 0$,

$\mathrm{S}(z) = \mathrm{e}^z - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^z - \frac{1}{z}\big(\mathrm{e}^z - 1\big)$.

Pour $z = 0$, $\mathrm{S}(z) = 0$.

Exercice 8 *En commençant par une dérivation*
Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

et préciser le rayon de convergence R.
Indication : on pourra commencer par dériver f…

Solution (**Ex.8** – *En commençant par une dérivation*)
Commençons par dériver f qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes classiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2} = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Or par la série géométrique de rayon 1, et comme $\left|-x^4\right| < 1 \iff |x| < 1$, on peut écrire, toujours avec un rayon 1 :
$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n}.$$

Donc pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^{n+1}x^{4n+1}$.
En primitivant, ce qui conserve le rayon,
$\forall x \in]-1\,;\,1[$,
$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{4n+2}x^{4n+2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{4n+1}.$$

Exercice 9 *En commençant par une primitivation*
Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$$

et préciser le rayon de convergence R.
Indication : on pourra commencer par primitiver f…

Solution (**Ex.9** – *En commençant par une primitivation*)
Notons que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-3/2\}$, donc le rayon ne pourra excéder $3/2$.
Commençons par primitiver f (une primitive suffit) : $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{2}\times\frac{1}{2x+3} = \frac{-1}{6}\times\frac{1}{1+2x/3}.$$
En utilisant la série géométrique, avec $|2x/3| < 1 \iff |x| < 3/2$,
$$\forall x \in]-3/2\,;\,3/2[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{3^{n+1}}x^n.$$
Alors, par dérivation terme à terme qui conserve le rayon,
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{3^{n+1}}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n(n+1)}{3^{n+2}}x^n$ avec un rayon de convergence $\mathrm{R} = \dfrac{3}{2}$.
Méthodes alternatives :
– on peut partir du développement de $\dfrac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$,
avec $\alpha = -2$, $a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{n!} = (-1)^n(n+1)$, puis pour $|x| < 3/2$
$$\frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{9((2/3)x+1)^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)2^n}{3^{n+2}}x^n$$
– on peut envisager le produit de Cauchy $\dfrac{1}{2x+3}\times\dfrac{1}{2x+3}$...

Exercice 10 *En formant une équation différentielle*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.
Indication : on pourra commencer par former une équation différentielle dont f est solution…

Solution (**Ex.10** – *En formant une équation différentielle*)
1. $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à $-x^2$.
$x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à x^2, donc sa primitive nulle en 0 aussi.
Donc f est développable en série entière de rayon infini comme produit de série qui le sont.
2. f est par conséquent $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Commençons par dériver f.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = -2xf(x)+1.$

Utilisons cette équation différentielle pour développer f.

J'écris :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$

Alors :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = -2x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = -2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = -2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} + 1$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul et, avec la valeur de f en 0,

$\begin{cases} a_0 = f(0) = 0, \\ a_1 = 1, \\ \forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1}. \end{cases}$

Ceci détermine la suite (a_n) de façon unique :

$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \dfrac{-2}{n+2}a_n.$

On a immédiatement :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \dfrac{-2}{2n+1}a_{2n-1} = \dfrac{(-2)^2}{(2n+1)(2n-1)}a_{2n-3} = \dots$

$a_{2n+1} = \dfrac{(-2)^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1}a_1 = \dfrac{(-2)^n 2^n (n!)}{(2n+1)!}$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$

Exercice 11 *Calcul d'une somme de série*

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$$

de deux façons.

1. Justifier l'existence de S.

2. *Première méthode*

a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}.$$

b) Conclure.

3. *Seconde méthode*

a) Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{n}x^n.$$

b) Déterminer S en séparant les termes de rangs pairs et les termes de rangs impairs de cette somme.

Solution (**Ex.11** – *Calcul d'une somme de série*)

1. Par exemple, $\dfrac{1}{(2n+1)4^n} = o\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$, t.g. d'une série géométrique convergente.

2. RC $= 1$, $\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$

Par primitivation de série entière :

$\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right),$

donc $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in \left]-1\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,1\right[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Pris en $x = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{S} = \ln(3)$.

3. Pour tout $x \in \left]-1\,;\,1\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n}x^n = \sum_{n\ pair}\dfrac{1}{n}x^n + \sum_{n\ impair}\dfrac{1}{n}x^n$ conduit à

$-\ln(1-x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}$ d'où en $x = 1/2$

$\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)4^n} = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$, donc

$\mathrm{S} = 2\ln(2) + \ln(3) - \ln(4) = \ln(3).$

Exercice 12 *Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série*

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Solution (**Ex.12** – *Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série*)

Notons $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Comme $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$, f est continue en 0... et f est intégrable sur $[0\,;\,1]$.

$\forall t \in [0\,;\,1[, \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}t^n$ et en primitivant terme à terme :

$\forall x \in [0\,;\,1[, \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}x^n$.

Quand $x \to 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$.

Reste à établir que lorsque $x \to 1$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}x^n \to \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = g(1)$, i.e.$g$ est continue en 1.

Or $\left\|x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}\right\|_{\infty,[0\,;\,1]} = \dfrac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions définissant g converge normalement donc uniformément, et comme chaque $x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$ est continue, donc g est continue sur $[0\,;\,1]$. Donc g est continue en 1. Gagné.

Exercice 13 *Application à la résolution d'équations différentielles*

Pour les équations différentielles suivantes, on demande de déterminer les solutions développables en séries entières au voisinage de 0 en précisant le rayon de convergence des séries obtenues :

1. (E_1) $\quad(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$;
2. (E_2) $\quad y' - 2xy = 2x^2 - 2x - 1$.

Solution (**Ex.13** – *Application à la résolution d'équations différentielles*)

1. En posant $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour $x \in \,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, y est solution de (E_1) ssi
$\forall n \in \mathbb{N}, [n(n-1)+4n+2]a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} = 0$, i.e. $a_{n+2} = a_n$, donc
ssi $f(x) = a_0\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1} = \frac{a_0+a_1x}{1-x^2}$.
Le rayon de convergence de cette série est $\mathrm{R} = 1$.
L'ensemble des solutions DSE au voisinage de 0 est
$$\left\{f :]-1\,;\,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{ax+b}{1-x^2}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. $y : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ vérifie (E_2) sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ ssi
$\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-2a_{n-1})x^n = 2x^2-2x+1$ et par unicité des coefficients ssi
$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = a_0 - 1 \\ 3a_3 = 2a_1 + 2 \\ \forall n \geqslant 3, a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}a_{n-1} \end{cases}$$
ssi
$$\begin{cases} a_0 = a_2 + 1 \\ a_1 = -1 \\ \forall p \geqslant 1, a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \geqslant 1, a_{2p} = \dfrac{1}{p!}a_2 \end{cases}$$
ssi $y : x \mapsto a_2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}x^{2p} - x + 1 = a_2\mathrm{e}^{x^2} - x + 1$.
Le rayon de convergence de cette série étant $+\infty$, l'ensemble des solutions DSE est
$$\left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a\mathrm{e}^{x^2} - x + 1, a \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 14 *Un développement asymptotique : merci Augustin Louis !*

On pose, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}$, nombre appelé « i-ème nombre harmonique ». On rappelle que :
$$\mathrm{H}_i \underset{i\to+\infty}{\sim} \ln(i).$$

On pourra poser de plus $\mathrm{H}_0 = 0$.

Dans cet exercice, on se propose de déterminer un développement asymptotique de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} H_i$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$?

Dans la suite, x désigne un réel de $]-1\,;\,1[$.

2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

3. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)H_{n+1}x^n$.

4. Montrer alors à l'aide d'un produit de Cauchy que

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)(H_{n+1}-1).$$

5. En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. *Piqûre de rappel*
Comment démontrer *rapidement* $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, et même, et pour pas plus cher, $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est une constante réelle (appelée constante d'Euler).

Solution (**Ex.14** – *Un développement asymptotique : merci Augustin Louis !*)

1. De $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$ on tire $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puis $H_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} H_n$ donc par le critère de D'Alembert, la série proposée a un rayon de convergence valant 1.

2. Par produit de Cauchy,
$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$$

3. Par dérivation terme à terme avec conservation du rayon de convergence
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)H_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nH_n x^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} H_n x^n\right) = \frac{1-\ln(1-x)}{(x-1)^2}.$$

4. Développons d'une autre façon le second membre :
$$\begin{aligned}\frac{1-\ln(1-x)}{(x-1)^2} &= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\ln(1-x)}{x-1} \times \frac{1}{x-1}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} H_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} H_i \times 1\right)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1) + S_n\big)x^n\end{aligned}$$
Par unicité du DSE avec un rayon non nul,
$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)H_{n+1} = (n+1) + S_n$, i.e. $S_n = (n+1)(H_{n+1}-1)$.

5. Comme $1 = o(H_{n+1})$, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

6. $u_n = H_n - \ln(n)$ vérifie $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge donc (u_n) converge, disons vers une constante γ, d'où $H_n - \ln(n) = \gamma + o(1)$.