E3A 2023 PSI - Exercice 2

Question de cours

1. $\mathrm{X}^{n+1}-1=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n+\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+\mathrm{X}+1)$, donc le quotient vaut $\mathrm{X}^n+\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+\mathrm{X}+1$ et le reste 0.

2. Conséquence du résultat précédent, $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge SSI $|x|<1$ et, pour tout complexe x de module strictement plus petit que 1, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

*****

3. Étude d'une suite

(a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}} = \dfrac{1}{1+t+\cdots+t^n}$ est définie et continue sur $[0,1[$, prolongeable par continuité en 1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t$ converge donc pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

(b) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, et tout réel $t\in[0,1[$, on pose $f_n(t)=\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$.

— Pour tout $n\geq 1$, la fonction f_n est intégrable sur $[0,1[$, d'après la question précédente et la positivité de f_n.

— La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction affine $t\mapsto 1-t$, continue (par morceaux) sur $[0,1[$.

— Pour tout entier $n\geq 1$ et tout $t\in[0,1[$, $0\leq f_n(t)=\dfrac{1}{1+t+\cdots+t^n}\leq 1$, et la fonction $t\mapsto 1$, indépendante de n, est intégrable sur $[0,1[$.

Le théorème de convergence dominée permet alors d'écrire :

$$u_n=\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t \to \int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\text{quand } n\to+\infty.$$

4. Étude de la série de terme général $u_n - l$

(a) Soit $t\in[0,1]$.

Si $t=0$, $g_p(t)=1$ et la série $\sum_{p\geq 1} g_p(t)$ converge.

Si $t\in[0,1[$, la série $\sum_{p\geq 1} g_p(t)$ est une série géométrique de raison t^{n+1}, qui converge puisque $t^{n+1}\in[0,1[$.

Finalement, la série de fonctions $\sum_{p\geq 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et a pour somme la fonction $t\mapsto(1-t)t^{(n+1)}\times\dfrac{1}{1-t^{n+1}}$ si $t\in[0,1[$ et qui à 1 associe 0.

(b) $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)t^{p(n+1)}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{p(n+1)}\mathrm{d}t-\int_0^1 t^{p(n+1)+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)p+1}-\frac{1}{(n+1)p+2}=\frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}\sim\frac{1}{(n+1)^2p^2}$ quand $p\to\infty$.

(c) Soit n un entier strictement positif.

$$\begin{aligned} u_n - l &= \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-t^{n+1}} - (1-t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{n+1} \frac{1-t}{1-t^{n+1}} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t) \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On applique ensuite le théorème d'intégration termes à termes des séries de fonctions intégrables : puisque $\displaystyle\int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{p^2}$ d'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t$ converge, et $\displaystyle u_n - l = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}$.

(d) Soient $p \geq 1$ et $t \geq 0$. Puisque $((t+1)p+2) \geq tp$ et $((t+1)p+1) \geq tp$,

$$|h_p(t)| = \frac{t^2}{((t+1)p+2)((t+1)p+1)} \leq \frac{1}{p^2},$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{p\geq 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle n^2(u_n - l) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n^2}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n)$.

On utilise alors le théorème de la double limite. Puisque la série de fonctions $\displaystyle\sum_p h_p$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$, et que chaque fonction h_p tend vers $\displaystyle\frac{1}{p^2}$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} h_p(t) \to \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ quand $t \to +nfty$, et par conséquent $\displaystyle n^2(u_n - l) \to \frac{\pi^2}{6}$ quand $n \to +\infty$.

On en déduit alors que

$$u_n = l + \frac{\pi^2}{6n^2} + \frac{1}{n^2}.$$

E3A 2012 PSI - Exercice 3

5. u et v sont à termes strictement positifs et $v_n = \ln(1+1/n) \sim 1/n = u_n$. Comme $\sum(u_n)$ diverge, on peut utiliser (R) pour obtenir (la somme se simplifiant par télescopage)

$$\mathrm{H}_n \sim \sum_{k=1}^{n} v_k = \ln(n+1)$$

Enfin, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) \sim \ln(n)$ permet de conclure que

$$\mathrm{H}_n \sim \ln(n)$$

6. (a) On pose cette fois $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ et $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ (définies pour $n \geq 2$). On a des suites à termes strictement positifs. De plus, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \to +\infty$$

ce qui montre que $\sum(v_k)$ diverge. Enfin,

$$v_n = \ln\left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \sim \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \sim \frac{1}{n\ln(n)} = u_n$$

On peut donc encore utiliser (R) pour conclure que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \sim \ln(\ln(n+1))$$

Bien sûr, le fait que les séries soient définies à partir du rang 2 *seulement ne change rien au fait que l'on peut utiliser* (R).
Comme $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln(n)+\ln(1+1/n)) = \ln(\ln(n)) + \ln(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}) \sim \ln(\ln(n))$ on conclut que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

(b) En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum(w_n)$ est de limite infinie et la série diverge.

(c) De façon alternative, on peut considérer la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$. f est décroissante sur $[2,+\infty[$ et on peut donc utiliser une comparaison série-intégrale pour montrer que

$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \to +\infty$$

On retouve que la suite des sommes partielles de la série $\sum(w_n)$ est de limite infinie et donc la série diverge.
La méthode pourrait d'ailleurs donner, en écrivant un encadrement, l'équivalent de **2.1**.

7. (a) Les trois premiers points de (P) sont immédiats et le quatrième aussi (on a une série géométrique de raison 1 qui diverge). Ici, $\mathrm{A}_n = n$ et

$$b_n = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)}$$

La question **1** indique que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

(b) Les quatre points de la propriété (P) sont immédiats (la suite est à valeurs dans $]0,1]$ et la série associée, de Riemann, est divergente). On a $\mathrm{A}_k = \mathrm{H}_k$ et donc

$$b_n = \frac{1}{\ln(\mathrm{H}_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\mathrm{H}_k}$$

Posons $u_n = \frac{1}{n\mathrm{H}_n}$; u et w (définies à partir du rang 2) sont strictement positives à partir du rang 3. Ce sont des suites équivalentes (question **1**) de séries divergente (question **2.2**). La propriété (R) indique que

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\mathrm{H}_k} \sim \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Ajouter les termes d'indices 1 et 2 ne change rien à l'équivalence car les sommes sont de limites infinies (les constantes sont alors négligeables) et avec la question **2.1** on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\mathrm{H}_k} \sim \ln(\ln(n))$$

Enfin, $\ln(\mathrm{H}_n) = \ln(\ln(n)) + \ln(\frac{\ln(n)}{\mathrm{H}_n}) \sim \ln(\ln(n))$ (le second terme, de limite nulle, est négligeable devant le premier, de limite infinie). On a finalement

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

8. (a) On a $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}_{n-1} + a_n$. Par ailleurs $\mathrm{A}_n \to +\infty$ (suite croissante car (a_n) est à termes positives, etnon convergente car $\sum(a_n)$ diverge) et (a_n) est bornée donc $a_n = o(\mathrm{A}_n)$. Ainsi, $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}_{n-1} + o(\mathrm{A}_n)$ et donc

$$\mathrm{A}_n \sim \mathrm{A}_{n-1}$$

(b) On en déduit que $\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{n-1}} \to 1$ et donc $\ln(\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{n-1}}) \sim \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{n-1}} - 1 = \frac{a_n}{\mathrm{A}_{n-1}}$. Enfin, $\mathrm{A}_{n-1} \sim \mathrm{A}_n$ donne

$$\ln\left(\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n}{\mathrm{A}_n}$$

(c) $u_n = \ln\left(\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{n-1}}\right)$ est le terme général ($n \geq 2$) d'une suite strictement positive de série divergente ($\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln(\mathrm{A}_n) - \ln(\mathrm{A}_1) = \ln(\mathrm{A}_n) \to +\infty$). Comme $u_n \sim \frac{a_n}{\mathrm{A}_n}$ qui est aussi à termes > 0, on peut utiliser (R) pour obtenir

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{\mathrm{A}_k}{\mathrm{A}_{k-1}}\right) \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{\mathrm{A}_k}$$

Ces suites sont de limite infinie et ainsi $\sum(a_k/\mathrm{A}_k)$ diverge.

(d) L'équivalence obtenue ci-dessus s'écrit

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{\mathrm{A}_k} \sim \ln(\mathrm{A}_n)$$

Ajouter le terme pour $k = 1$ ne change rien car les termes tendent vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

9. On va essayer d'utiliser le résultat précédent pour construire (v_n). Pour cela, il nous faut une suite vérifiant (P) et je distingue donc deux cas.

- Si (u_n) est bornée, je pose $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = u_n$. On a alors (a_n) qui vérifie (P) .$\sum(a_n/\mathrm{A}_n)$ diverge (question **4.3**) et $\frac{a_n}{\mathrm{A}_n} = o(a_n)$ (le quotient vaut $1/\mathrm{A}_n$ et tend vers 0). La suite de terme général $v_n = \frac{a_n}{\mathrm{A}_n}$ convient donc.
- Sinon, je pose $w_n = \min(u_n, 1)$; on a $w_n > 0$ et $\sum(w_n)$ diverge (car u_n est régulièrement plus grand que 1 et il existe une extraite de w qui est constante égale à 1 ce qui donne la divergence grossière de la série). Le premier cas donne une suite $v_n = o(u_n)$ à termes > 0 et de série divergente. On a a fortiori $v_n = o(u_n)$ (puisque $0 \leq w_n \leq u_n$).

10. Si $x \in [0, 1[$, $(a_n x^n)$ est de limite nulle (car (a_n) est bornée). Le rayon cherché est donc ≥ 1.
Comme $\sum(a_n)$ diverge, le rayon de convergence est ≤ 1.
Le rayon de convergence est donc égal à 1.
On n'utilise pas ce qui précède pour conclure simplement.

CCinP 2023 PSI - Problème 2

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

11. Lorsque a et b sont réels, la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ est symétrique réelle, donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable.

12. Le calcul matriciel donne $\mathrm{M}(a,b)\mathrm{V} = (b+(n-1)a)\mathrm{V}$. Et comme V n'est pas le vecteur nul, par définition :

$$\boxed{\text{V est un vecteur propre de } \mathrm{M}(a,b) \text{ associé à la valeur propre } b+(n-1)a.}$$

13. $\mathrm{M}(1,0)$ est unitaire et de degré n donc il est complètement défini si l'on connaît ses racines (complexes) et leurs multiplicités respectives.

• On remarque que la matrice $\mathrm{M}(1,0)+\mathrm{I}_n$ est de rang $1 < n$ (tous les coefficients sont égaux à 1 et donc $\mathrm{Im}(\mathrm{M}(1,0)+\mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}\{\mathrm{V}\}$).
Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M}(1,0)+\mathrm{I}_n)) = n-1 > 0$, ainsi, -1 est valeur propre de $\mathrm{M}(1,0)$ et sa multiplicité m_{-1} est au moins égale à $n-1$.

• Par la question précédente, $b+(n-1)a = n-1$ est aussi valeur propre de $\mathrm{M}_{0,1}$ et elle est distincte de -1 car $n > 0$. Comme la somme des multiplicité de valeurs propres de $\mathrm{M}(1,0)$ est égale à n, celle de $n-1$ ne peut excéder 1, elle est donc égale à 1 et il n'y a pas d'autre valeur propre.

$$\boxed{\mathrm{P}_{1,0}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-(n-1))^{m_{n-1}}(\mathrm{X}+1)^{m_{-1}} = (\mathrm{X}-(n-1))(\mathrm{X}+1)^{n-1}.}$$

14. On suppose que $a \neq 0$. Par définition du polynôme caractéristique, et par propriétés du déterminant, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{a,b}(\mathrm{X}) &= \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}(a,b)) = \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - b\mathrm{I}_n - a\mathrm{M}(1,0)) = \det\left(a\left(\frac{\mathrm{X}-b}{a}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}(1,0)\right)\right) \\
&= a^n \det\left(\frac{\mathrm{X}-b}{a}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}(1,0)\right)
\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\mathrm{P}_{a,b}(\mathrm{X}) = a^n \mathrm{P}_{1,0}\left(\frac{\mathrm{X}-b}{a}\right).}$

Le résultat de la question précédente donne alors :

$$\mathrm{P}_{a,b}(\mathrm{X}) = a^n\left(\frac{\mathrm{X}-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{\mathrm{X}-b}{a}+1\right)^{n-1} = (\mathrm{X}-(b+a(n-1)))\,(\mathrm{X}-(b-a))^{n-1}.$$

De plus, $b-a = (b+(n-1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), on distingue donc deux cas :

• Si $a \neq 0$: $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}(a,b)) = \{b-a, (b+(n-1)a)\}$ avec $m_{b+a(n-1)} = 1$ et $m_{b-a} = n-1$.

• Si $a = 0$: $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}(0,b)) = \{b\}$ avec $m_b = n$.

15. On définit $\mathrm{Q}_{a,b}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - (b-a))(\mathrm{X} - (b+(n-1)a))$.
La matrice $\mathrm{M}(a,b) - (b-a)\mathrm{I}_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à b donc son image est contenue dans $\mathrm{Vect}\{\mathrm{V}\}$. De plus, d'après la question (**Q19**), on a :

$$\mathrm{Vect}\{\mathrm{V}\} \subset \mathrm{E}_{(b+(n-1)a)}(\mathrm{M}(a,b)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M}(a,b) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n).$$

On a donc

$$\mathrm{Im}(\mathrm{M}(a,b) - (b-a)\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{M}(a,b) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n)$$

Et par conséquent $(\mathrm{M}(a,b) - (b-a)\mathrm{I}_n)(\mathrm{M}(a,b) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n) = \mathrm{Q}_{a,b}(\mathrm{M}(a,b)) = 0$.

$$\boxed{\mathrm{Q}_{a,b} \text{ est un polynôme annulateur de } \mathrm{M}(a,b).}$$

Remarque :
on peut aussi calculer directement. En notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_{a,b}(\mathrm{M}(a,b)) &= (\mathrm{M}(a,b) - (b-a)\mathrm{I}_n) \times (\mathrm{M}(a,b) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n) \\
&= (a(\mathrm{M}(1,0) + \mathrm{I}_n)) \times (a(\mathrm{M}(1,0) - (n-1)\mathrm{I}_n)) \\
&= a^2 \ \mathrm{J} \times (\mathrm{M}(1,0) - (n-1)\mathrm{I}_n) \\
&= a^2 \ (\mathrm{J}\mathrm{M}(1,0) - (n-1)\mathrm{J}) = 0
\end{aligned}$$

De plus, $b - a = (b+(n-1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), comme précédemment, on distingue donc deux cas :

- Si $a \neq 0$: $\mathrm{Q}_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $\mathrm{M}(a,b)$ et il est scindé à racines simples donc $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable.
- Si $a = 0$: alors $\mathrm{M}(a,b) = b\mathrm{I}_n$ est diagonale, a fortiori diagonalisable.

On a donc démontré : $\boxed{\text{Pour tout } (a,b) \in \mathbb{C}^2, \text{ la matrice } \mathrm{M}(a,b) \text{ est diagonalisable.}}$

16. On suppose que $a \neq 0$. Le polynôme $\mathrm{Q}_{a,b}$ n'est pas le polynôme nul, on peut donc effectuer la division euclidienne de X^k par $\mathrm{Q}_{a,b}$. Pour tout $k \in \mathrm{N}$, on a :

$$\exists!\mathrm{P}_k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}],\ \exists!\mathrm{R}_k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}], \qquad \mathrm{X}^k = \mathrm{P}_k(\mathrm{X})\mathrm{Q}_{a,b}(\mathrm{X}) + \mathrm{R}_k(\mathrm{X}) \quad \text{et} \quad \deg(\mathrm{R}_k) < \deg(\mathrm{Q}_k) = 2.$$

Ainsi, il existe des complexes α_k et β_k tels que : $\mathrm{R}_k(\mathrm{X}) = \alpha_k \mathrm{X} + \beta_k$.
On évalue cette égalité polynomiale aux racines (distinctes) de $\mathrm{Q}_{a,b}$. On obtient :

$$(b-a)^k = \alpha_k(b-a) + \beta_k,$$
$$(b+(n-1)a)^k = \alpha_k(b+(n-1)a) + \beta_k.$$

Puisque $a \neq 0$, ce système a une unique solution (α_k, β_k). Après calculs, on trouve :

$$\alpha_k = \frac{1}{na}\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right) \text{ et}$$
$$\beta_k = \frac{1}{na}\left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\right).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^k par $\mathrm{Q}_{a,b}(\mathrm{X})$ est :

$$\boxed{\mathrm{R}_k(\mathrm{X}) = \frac{1}{na}\left(\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)\mathrm{X} + \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\right)\right).}$$

Puisque $X^k = P_k(X)Q_{a,b}(X) + R_k(X)$ on a :

$$M(a,b)^k = P_k(M(a,b))Q_{a,b}(M(a,b)) + R_k(M(a,b)) = R_k(M(a,b)) \qquad \text{car } Q_{a,b}(M(a,b)) = 0$$

Et donc :

$$\boxed{M(a,b)^k = \frac{1}{na}\Big(\big((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\big) M(a,b) + \big((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\big) I_n\Big)}$$

17. Si $|b-a| < 1$ et si $|(b+(n-1)a| < 1$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty}(b-a)^k = \lim\limits_{k\to+\infty}(b+(n-1)a)^k = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} \Big\| \big((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\big) M(a,b) \Big\| &= \left|(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right| \|M(a,b)\| \\ &\leq \big(|b+(n-1)a|^k + |b-a|^k\big) \|M(a,b)\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty} \big((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\big) M(a,b) = 0$.

De même, on montrerait que $\lim\limits_{k\to+\infty} \big((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)\big) I_n = 0$.

Et par opérations sur les limites : $\boxed{\text{Si } |b-a| < 1 \text{ et si } |(b+(n-1)a| < 1 \text{ alors } \lim\limits_{k\to+\infty} M(a,b)^k = 0.}$

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

18. T est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, sa première colonne donne l'image de e_1 : $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$. Et puisque $|\lambda_1| < 1$, on a :

$$\boxed{\|u^k(e_1)\| = \|\lambda_1^k e_1\| = |\lambda_1|^k \|e_1\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Et de manière immédiate $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0$.

19. La $i+1$-ème colonne de T donne l'image de e_{i+1} par u. Plus précisément :

$$u(e_{i+1}) = \underbrace{T_{1,i+1}e_1 + \cdots + T_{i,i+1}e_i}_{=x} + \lambda_{i+1}e_{i+1}.$$

On a bien trouvé $x \in \operatorname{Vect}\{e_1, \ldots, e_i\}$ tel que $\boxed{u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.}$

On pourrait démontrer le résultat demandé par récurrence. On choisit ici de faire apparaître une série télescopique.

- si $\lambda_{i+1} \neq 0$: on a $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$ et comme u^m est linéaire :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}u^m(e_{i+1}) = u^m(x).$$

On divise par $\lambda_{i+1}^{m+1} \neq 0$: $\dfrac{u^{m+1}(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^{m+1}} - \dfrac{u^m(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^m} = \dfrac{u^m(x)}{\lambda_{i+1}^{m+1}}$. On ajoute ces égalités pour $m = 0, \ldots, k-1$. La somme est télescopique, il reste :

$$\frac{u^k(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^k} - \frac{u^0(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^0} = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{-m-1} u^m(x).$$

En multipliant par λ_{i+1}^k, on obtient le résultat demandé.

• si $\lambda_{i+1} = 0$: alors d'une part, $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x = x$ donc $u^k(e_{i+1}) = u^{k-1}(x)$.
Et d'autre part, dans la somme suivante, tous les termes sont nuls sauf un, celui pour $m = k-1$:

$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = u^{k-1}(x) = u^k(e_{i+1}).$$

Dans les deux cas, on a bien démontré que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u^k(e_{i+1}) = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).}$

20. On a $x \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ donc il existe des complexes $x_1, \dots, x_i$ tels que $x = \sum_{j=1}^{i} x_i e_i$.

Par linéarité de u, $u^k(x) = \sum_{j=1}^{i} x_i u^k(e_i)$. On on a supposé que pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim_{k\to+\infty} u^k(e_i) = \mathrm{O}$.
Par opérations sur les limites, on a donc aussi :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u^k(x) = \mathrm{O}.}$$

Une première conséquence est que la suite $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists \mathrm{M} > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \|u^k(x)\| \leq \mathrm{M}$.
On montre le résultat demandé en revenant à la définion de limite.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé : on a les majorations suivantes (inégalité triangulaire).

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|.$$

Or, $\lim_{m\to+\infty} u^m(x) = 0$ donc, il existe un rang $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq \mathrm{N},\ \|u^m(x)\| \leq \varepsilon.$$

Pour $k > \mathrm{N}$, on coupe la somme en 2. On sait que $|\lambda_{i+1}| < 1$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{i+1}|^n$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| &= \sum_{m=0}^{\mathrm{N}-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq \mathrm{M}} + \sum_{m=\mathrm{N}}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq \varepsilon} \\
&\leq \mathrm{M} \sum_{m=0}^{\mathrm{N}-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} + \varepsilon \sum_{m=\mathrm{N}}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\
&\leq \mathrm{M} \sum_{n=k-\mathrm{N}}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n \\
&\leq \frac{\mathrm{M}}{1 - |\lambda_{i+1}|} |\lambda_{i+1}|^{k-\mathrm{N}} + \varepsilon \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda_{i+1}|^{k-\mathrm{N}} = 0$ donc il existe $\mathrm{N}' \geq \mathrm{N}$ tel que pour tout $k \geq \mathrm{N}'$, on ait $|\lambda_{i+1}|^{k-\mathrm{N}} \leq \varepsilon$.
En reportant dans la majoration précédente, on a trouvé N' tel que pour tout entier $k \geq \mathrm{N}'$, on ait :

$$\left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \leq \varepsilon \frac{\mathrm{M}+1}{1-|\lambda_{i+1}|} = \mathrm{C}\varepsilon.$$

Quitte à reprendre le raisonnement avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{C}}$, on a bien démontré que :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| = 0.}$$

On a alors, en utilisant la question précédente et $|\lambda_{i+1}| < 1$:

$$\|u^k(e_{i+1})\| = \left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| \leq |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et par le théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0.}$

21. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$ on note $\mathcal{P}_i$ la propriété : $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_i) = 0$.
Dans une question précédente, on a montré que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Dans les deux questions suivantes, on a montré que, pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$ si $\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_i$ sont vraies, alors $\mathcal{P}_{i+1}$ est vraie.
Par le principe de **récurrence forte**, $\mathcal{P}_i$ est vraie pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.
On note come dans l'énoncé, $\mathrm{T}_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de T^k. Puisque T^k est la matrice de u^k dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ u^k(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_{i,j}^{(k)} e_i$$

Et comme $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_i) = 0$, ses suites coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ tendent aussi vers 0.
Et finalement :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{T}_{i,j}^{(k)} = 0.$$

Et par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{T}^k = 0.}$

22. On suppose juste que $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\ |\lambda| < 1$.
On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A répétées avec multiplicité. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractérisque de A est scindé et donc A est trigonalisable. Plus précisement, il existe une matrice tringulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, et une matrice inversible P telles que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}.$$

- D'après les questions précédentes, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{T}^k = 0$.
- De plus, $\mathrm{A}^k = (\mathrm{PTP}^{-1})^k = \mathrm{PTP}^{-1}.\mathrm{PTP}^{-1}\dots\mathrm{PTP}^{-1} = \mathrm{PT}^k\mathrm{P}^{-1}$.
- Enfin, l'application $\varphi : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{PMP}^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, elle est continue, en particulier continue en 0. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{T}^k = 0$, on a donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(\mathrm{T}^k) = \varphi(0) = 0.$$

Ce qui s'écrit $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{A}^k = 0.}$

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

23. Remarquons tout d'abord que puisque A est une matrice à diagonale strictement dominante et puisqu'un module est un réel positif ou nul, on a, grâce à l'inégalité stricte : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \quad |a_{ii}| > 0$.
M est une matrice triangulaire inférieure donc

$$|\det(\mathrm{M})| = \prod_{i=1}^{n} |m_{ii}| = \prod_{i=1}^{n} |a_{ii}| > 0$$

Ainsi $\det(\mathrm{M}) \neq 0$ et $\boxed{\text{M est inversible.}}$

24. Avec les notations de l'énoncé :

$$\mathrm{BX} + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{FX} + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{AX} = \mathrm{M}^{-1}(\mathrm{F}+\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{MX} = \mathrm{X}$$

25. Par définition de λ et V, $\mathrm{V} \neq 0$ et $\mathrm{BV} = \lambda\mathrm{V}$.
Donc $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{FV} = \lambda\mathrm{V}$ et en multipliant par M à gauche, $\boxed{\mathrm{FV} = \lambda\mathrm{MV}.}$

L'énoncé ne le dit pas mais il est clair que $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

En utilisant les définitions de M et F et la convention de l'énoncé, l'égalité vectorielle précédente se traduit alors par

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \quad -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j = \lambda \left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_j\right)$$

En isolant le terme a_{ii}, on obtient donc

$$\boxed{\lambda a_{ii}v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_j\right)}$$

26. $\{|v_j| \;/\; j \in [\![1\,;\,n]\!]\}$ est un ensemble fini de réels donc admet un maximum $|v_{i_0}|$. Comme V est un vecteur non nul, il existe $j \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $v_j \neq 0$ et donc $|v_{i_0}| \geqslant |v_j| > 0$. Ainsi $v_{i_0} \neq 0$.
Utilisons l'égalité de **Q32.** pour $i = i_0$ et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda a_{i_0i_0}v_{i_0}| \leqslant \left|\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0j}v_j\right| + |\lambda| \left|\sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0j}v_j\right|$$

$$|\lambda a_{i_0i_0}|\ |v_{i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}||v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0j}||v_j|$$

$|v_{i_0}| > 0$ donc

$$|\lambda a_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}|\ \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0j}|\ \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|}$$

Par définition de i_0, $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!], \quad \dfrac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leqslant 1$ et on manipule des termes positifs donc

$$\boxed{|\lambda a_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0j}|}$$

27. Si $\lambda = 0$, on a bien $|\lambda| < 1$.
Sinon, A étant une matrice à diagonale strictement dominante, on a :

$$|\lambda|\ |a_{i_0 i_0}| > |\lambda| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| + |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0 j}|$$

Q33. permet de déduire :

$$\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0 j}| > |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0 j}|$$

Et $\displaystyle\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0 j}| > 0$ car sinon, on aurait $0 > 0$ donc en simplifiant, on obtient

$$\boxed{|\lambda| < 1}$$

Les valeurs propores de B sont donc toutes de module strictement inférieur à 1.
Par conséquent la **partie II** permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \mathrm{B}^k = 0.}$$

28. Montrons le résultat par récurrence. On note pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_k : \mathrm{X}_k - \mathrm{X} = \mathrm{B}^k(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X})$.

- Initialisation : $\mathcal{H}_0$ est clairement vraie.
- Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie à un rang fixé k et montrons que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
  Par définition de la suite et par **Q31.**, on a :

  $$\mathrm{X}_{k+1} - \mathrm{X} = (\mathrm{B}\mathrm{X}_k + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y}) - (\mathrm{B}\mathrm{X} + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y}) = \mathrm{B}(\mathrm{X}_k - \mathrm{X})$$

  Donc par HR_k, $\mathrm{X}_{k+1} - \mathrm{X} = \mathrm{B}^{k+1}(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X})$ et $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_k - \mathrm{X} = \mathrm{B}^k(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X})}$$

De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie et l'application $\psi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \mathrm{M}(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X})$ est linéaire donc elle est continue (en 0). Comme $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \mathrm{B}^k = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \psi(\mathrm{B}^k) = \psi(0) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{k \to +\infty} (\mathrm{X}^k - \mathrm{X}) = 0.$$

$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{X}_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge donc bien vers X.}}$

FIN